中学错例解析与模拟训练丛书

高中数学错例解析

北京市海淀区及首都多所重点学校
特级、高级教师集体编写

主编　冯士腾

北京师范大学出版社

·中学错例解析与模拟训练丛书·

高中数学错例解析

（附模拟训练题与参考答案）

主　编　冯士腾

编　著　冯士腾　殷慧中

李方烈　李国安

方立风　黄健生

北京师范大学出版社

（京）新登字 160 号

《中学错例解析丛书》

高中数学错例解析

主编　冯士腾

*

北京师范大学出版社出版发行

全国新华书店经销

湖南省新华印刷二厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：16.25　字数：351 千

1993 年 12 月 第 1 版　1993 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—8,000

ISBN 7-303-02922-2/G·2005

定价：7.90 元

中学错例解析与模拟训练丛书

主　编　张德政
副主编　杨惠娟
程　迟
张世鸿

前　　言

恩格斯曾经指出："无论从哪方面学习，不如从自己所犯错误的后果学习来得快。"向错误学习，并不是去学习已经证明是错误的东西，而是通过对错误的分析，揭示错误的所在，剖析产生错误的原因，从中探寻正确的思路，以求找出正确的答案，避免类似错误的发生，进而采用最佳的思维方法、技巧，提高分析问题和解决问题的能力。本书正是从这一点出发构思编著的。

本书依据国家教委最新颁布的《全日制中学数学教学大纲》（修订本）所规定的教学内容编写，广泛收集中学生平时练习和历届高考中的错误解题，经过筛选，找出典型性错例，按知识结构分成若干章（部分）。每章（部分）又分成若干专题。每个专题设有导语，指出知识的重点难点及错解的"多发事故点"，然后举例辨析，指明错解原因，并在此基础上列举正确解答的内容。每个专题后，根据编者多年教学经验并参照历届高考试题，编出一定数量的训练题和高考模拟题，使学生举一反三，触类旁通。

由于编者水平所限，编写时间又十分仓促，疏漏不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　　者

目　录

第二篇 平面三角

第三篇 立体几何

第四篇 平面解析几何

第一篇　代数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一　概念错误

【导语】

学习本章内容，最重要的一个问题是深刻理解和掌握有关概念。

1. 要掌握有关集合的一些基本概念，即正确理解集合元素的确定性、无序性、互异性；掌握集合的表示法以及集合与集合之间的包含关系、相等关系、空集、子集、真子集、交集、并集、全集、补集等概念。

2. 要在掌握集合与映射概念的基础上，加深对函数概念的理解，正确理解函数三要素：定义域、值域和对应法则。明确函数是由定义域（设为 A）、值域（设为 B）以及定义域 A 到值域 B 上的某一对应法则（设为 f）三部分组成的一类特殊的映射：f：$A \longrightarrow B$，记作 $y=f(x)$，其中 $x \in A$，$y \in B$；而它的核心则是对应法则 f；$f(a)$ 是在定义域 A 内取一个

确定的值 a 时，所对应的函数值。

3. 要掌握幂函数、指数函数和对数函数的概念、图象和性质。

函数 $y=x^n$（n 是常量）叫做幂函数。当 $n\in N$ 时，它的定义域是 R；当 n 是零或负整数时，它的定义域是 $\{x|x\in R, x\neq 0\}$；当 n 为正分数 $\frac{p}{q}$ 或负分数 $-\frac{p}{q}$（p、q 是互质的正整数，$q>1$）时，x^n 的意义分别是 $\sqrt[q]{x^p}$ 或 $\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$，它的定义域分别是使该式有意义的实数的集合。幂函数的图象都通过点（1，1）；$n>0$ 时，在第一象限内，函数值随 x 的增大而增大；$n<0$ 时，在第一象限内，函数值随 x 的增大而减小。

函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，常量）叫做指数函数。它的定义域是 R；值域是 R^+；它的图象过（0，1）；当 $a>1$ 时，在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数；当 $0<a<1$ 时，在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数。

函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，常量）叫做对数函数。它的定义域是 R^+；值域是 R；当 $a>1$ 时，在 $(0, +\infty)$ 上是增函数；当 $0<a<1$ 时，在 $(0, +\infty)$ 上是减函数；它的图象过(1,0)。

4. 要正确理解指数方程和对数方程的概念，会解简单的指数方程和对数方程；明确对数方程验根的必要性。

在运用上述概念解有关幂函数、指数函数和对数函数的问题时，容易发生如下一些错误：

（1）不能正确理解集合元素确定性、无序性和无异性的要求而导致错误。

（2）不能确切掌握子集、交集、并集、补集产生的错误。

（3）关于函数与反函数概念理解错误。

(4) 违背指数函数定义中 $y>0$，对数函数定义中 $x>0$ 以及底数 $a>0$ 且 $a\neq1$ 的规定而出现的错误。

【例 1】

设 $A=\{(x, y) \mid |x+1|+(y-2)^2=0\}$，$B=\{-1, 0, 2\}$。则 A、B 两个集合的关系是　　　　(　　)

(A) $A\supset B$　(B) $A\subset B$　(C) $A\in B$　(D) 以上都不对。

【错解】

(B)。

【辨析】

选择 (B) 是错误的。其原因在于集合概念模糊。错误地认为集合 A 的元素是单个的数 -1 和 2，即 $A=\{-1, 2\}$.

【正确思考】

$\because$ $|x+1|+(y-2)^2=0$ 同解于方程组 $\begin{cases}|x+1|=0\\(y-2)^2=0\end{cases}$，

显然，这方程组的解为 $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$.

$$\therefore\ A=\{(x, y) \mid |x+1|^2+(y-2)^2=0\}$$
$$=\left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}\right\}=\{(-1, 2)\}.$$

这就是说，A 是点集，可 B 是数集，所以正确的答案应选择 (D)。

【方法指导】 判定两个集合之间的关系，关健在于它们的元素构成特征以及它们的所属关系。下面再看一例：

【例 2】

已知$I=\{$实数对$(x, y)\}$，$A=\left\{(x, y) \mid \frac{y-4}{x-2}=3\right\}$，$B=\{(x, y) \mid y=3x-2\}$. 求$\overline{A}\cap B$。

【错解一】

$$A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-4}{x-2}=3\right.\right\}=\{(x,y)|y=3x-2\}=B,$$

$\therefore\ \overline{A}\cap B=\overline{A}\cap A=\Phi.$

【错解二】

$$A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-4}{x-2}=3\right.\right\}$$
$$=\{(x,y)|y=3x-2,\text{但}(x,y)\neq(2,4)\}$$

$\therefore\ \overline{A}\cap B=\{2, 4\}.$

【辨析】

错解一的错误是集合A中没有排除使分母没有意义的元素$(2, 4)$；

错解二是答案中的集合符号错误，$\{2, 4\}$表示以2和4为元素的集合。

【正确思考】

$\because\ A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-4}{x-2}=3\right.\right\}=\{(x,y)|y=3x-2,$但$(x,y)\neq(2,4)\}$.

$\therefore\ \overline{A}\cap B=\{(2,4)\}.$

【例3】

已知$f(x)=1+\frac{2}{x}$，求$f^{-1}(\sqrt{3}+1)$.

【错解】

$$f^{-1}(\sqrt{3}+1)=\frac{1}{f(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{3}+1}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【辨析】

错解中混淆了“负指数”和“反函数”的概念及符号：

(1) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $(a\neq0)$；

(2) $f^{-1}(x)$ 是表示 $f(x)$ 的反函数。

【正确思考】

设 $y=f(x)=1+\frac{2}{x}$，则 $x=\frac{2}{y-1}$，

$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{2}{x-1}$

$\therefore\ f^{-1}(\sqrt{3}+1)=\frac{2}{(\sqrt{3}+1)-1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【方法指导】

在解决有关反函数的问题时，一定要注意概念之间、符号之间的区别：如 $f^{-1}(x)$ 不同于“负指数幂”；$f^{-1}[f^{-1}(x)]$ 是 $f[f^{-1}(x)]$ 的反函数，而不是指 $f^{-1}(x)$ 的反函数。下面再看一例：

【例 4】

设 $f^{-1}[f^{-1}(x)]=25x-30$，求一次函数 $f(x)$。

【错解】

设 $f(x)=ax+b$ $(a\neq0)$，则一次函数的反函数 $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$，从而 $f^{-1}(x)$ 的反函数就是 $f(x)$，故有

$$f(x)=f^{-1}[f^{-1}(x)]=ax+b,$$

$\because\ f^{-1}[f^{-1}(x)]=25x-30$,

$\therefore\ f(x)=25x-30.$

【辨析】

上述错解的错误在于混淆了 $f^{-1}[f^{-1}(x)]$ 与 $f^{-1}(x)$ 的反函数这两个不同的概念。因为 $f^{-1}[f^{-1}(x)]$ 的意思是 $f[f^{-1}(x)]$ 的反函数，而不是指 $f^{-1}(x)$ 的反函数。

【正确思考】

设 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$，

则 $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$

$$f^{-1}[f^{-1}(x)]=f^{-1}\left(\frac{x-b}{a}\right)=\frac{\frac{x-b}{a}-b}{a},$$

$$\therefore\ f^{-1}[f^{-1}(x)]=\frac{1}{a^2}x-\frac{b(1+a)}{a^2}=25x-30$$

比较两边系数，得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}=25\\ \dfrac{b(1+a)}{a^2}=-30\end{cases}.$$

解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{5}\\ b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{5}\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}.$

$\therefore$ 所求的一次函数为 $y=\dfrac{1}{5}x-1$，$y=-\dfrac{1}{5}x-\dfrac{3}{2}.$

【例 5】

求函数 $f(x)=\sqrt{\log_{0.1}\dfrac{3x-2}{2x-1}}$ 的定义域。

【错解】