

中学错例解析与模拟训练丛书

高中 数学 错例 解析



北京市海淀区及首都多所重点学校
特级、高级教师集体编写

主编 冯士腾
北京师范大学出版社

· 中学错例解析与模拟训练丛书 ·

高中数学错例解析

(附模拟训练题与参考答案)

主 编	冯士腾	
编 著	冯士腾	殷慧中
	李方烈	李国安
	方立风	黄健生

北京师范大学出版社

(京)新登字 160 号

《中学错例解析丛书》

高中数学错例解析

主编 冯士腾

*

北京师范大学出版社出版发行

全国新华书店经销

湖南省新华印刷二厂印刷

开本: 787 × 1092 1/32 印张: 16.25 字数: 351 千

1993 年 12 月 第 1 版 1993 年 12 月 第 1 次印刷

印数: 1—8,000

ISBN 7 303 02922 2/G · 2005

定价: 7.90 元

中学错例解析与模拟训练丛书

主 编

张德政

副主编

杨惠娟

程 迟

张世鸿

前 言

恩格斯曾经指出：“无论从哪方面学习，不如从自己所犯错误的后果学习来得快。”向错误学习，并不是去学习已经证明是错误的东西，而是通过对错误的分析，揭示错误的所在，剖析产生错误的原因，从中探寻正确的思路，以求找出正确的答案，避免类似错误的发生，进而采用最佳的思维方法、技巧，提高分析问题和解决问题的能力。本书正是从这一点出发构思编著的。

本书依据国家教委最新颁布的《全日制中学数学教学大纲》（修订本）所规定的教学内容编写，广泛收集中学生平时练习和历届高考中的错误解题，经过筛选，找出典型性错例，按知识结构分成若干章（部分）。每章（部分）又分成若干专题。每个专题设有导语，指出知识的重点难点及错解的“多发事故点”，然后举例辨析，指明错解原因，并在此基础上列举正确解答的内容。每个专题后，根据编者多年教学经验并参照历届高考试题，编出一定数量的训练题和高考模拟题，使学生举一反三，触类旁通。

由于编者水平所限，编写时间又十分仓促，疏漏不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编 者

目 录

前言

第一篇 代数

第一章 幂函数、指数函数和对数函数..... (3)

一、概念错误 (3)

二、忽视条件产生的错误 (19)

思考题参考答案与提示 (39)

第二章 不等式..... (48)

一、忽视条件产生的错误 (48)

二、违反证明规则产生的错误 (63)

思考题参考答案与提示 (79)

第三章 复数..... (87)

一、概念错误 (87)

二、忽视条件产生的错误 (99)

思考题参考答案与提示 (107)

第四章 排列组合二项式定理和数学归纳法

.....	(110)
一、概念错误	(110)
二、忽视条件产生的错误	(123)
思考题参考答案与提示	(139)
第五章 数列和极限	(142)
一、概念错误	(142)
二、忽视条件产生的错误	(151)
思考题参考答案与提示	(164)
第二篇 平面三角	
第一章 三角函数	(171)
一、概念错误	(171)
二、审题错误	(190)
三、计算错误	(208)
思考题参考答案与提示	(223)
第二章 两角和与差的三角函数	(226)
一、计算错误	(226)
二、审题错误	(239)
三、变形错误	(251)
四、论证错误	(265)
思考题参考答案与提示	(275)
第三章 反三角函数和三角方程	(278)
一、概念错误	(278)
二、计算错误	(283)

三、解三角方程的错误	(292)
思考题参考答案与提示	(299)

第三篇 立体几何

第一章 直线和平面	(303)
一、概念错误	(303)
二、审题错误	(318)
三、画图错误	(326)
四、方法错误	(340)
五、论证错误	(343)
思考题参考答案与提示	(354)

第二章 多面体与旋转体	(356)
一、概念错误	(356)
二、审题错误	(373)
三、画图错误	(380)
四、计算错误	(386)
五、论证错误	(391)
思考题参考答案与提示	(397)

第四篇 平面解析几何

第一章 直线	(401)
一、概念错误	(401)
二、审题错误	(412)
三、方法错误	(421)
思考题参考答案与提示	(429)

第二章	圆锥曲线	(430)
一、概念错误		(430)
二、审题错误		(452)
三、方法错误		(471)
思考题参考答案与提示		(477)
第三章	参数方程和极坐标	(479)
一、概念错误		(479)
二、审题错误		(503)
思考题参考答案与提示		(510)

第一篇 代数

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

一 概念错误

【导语】

学习本章内容，最重要的一个问题是深刻理解和掌握有关概念。

1. 要掌握有关集合的一些基本概念，即正确理解集合元素的确定性、无序性、互异性；掌握集合的表示法以及集合与集合之间的包含关系、相等关系、空集、子集、真子集、交集、并集、全集、补集等概念。

2. 要在掌握集合与映射概念的基础上，加深对函数概念的理解，正确理解函数三要素：定义域、值域和对应法则。明确函数是由定义域（设为 A ）、值域（设为 B ）以及定义域 A 到值域 B 上的某一对应法则（设为 f ）三部分组成的一类特殊的映射： $f: A \rightarrow B$ ，记作 $y=f(x)$ ，其中 $x \in A$ ， $y \in B$ ；而它的核心则是对应法则 f ； $f(a)$ 是在定义域 A 内取一个

确定的值 a 时，所对应的函数值。

3. 要掌握幂函数、指数函数和对数函数的概念、图象和性质。

函数 $y=x^n$ (n 是常量) 叫做幂函数。当 $n \in N$ 时，它的定义域是 R ；当 n 是零或负整数时，它的定义域是 $\{x|x \in R, x \neq 0\}$ ；当 n 为正分数 $\frac{p}{q}$ 或负分数 $-\frac{p}{q}$ (p, q 是互质的正整数， $q > 1$) 时， x^n 的意义分别是 $\sqrt[q]{x^p}$ 或 $\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$ ，它的定义域分别是使该式有意义的实数的集合。幂函数的图象都通过点 $(1, 1)$ ； $n > 0$ 时，在第一象限内，函数值随 x 的增大而增大； $n < 0$ 时，在第一象限内，函数值随 x 的增大而减小。

函数 $y=a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，常量) 叫做指数函数。它的定义域是 R ；值域是 R^+ ；它的图象过 $(0, 1)$ ；当 $a > 1$ 时，在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数；当 $0 < a < 1$ 时，在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数。

函数 $y=\log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，常量) 叫做对数函数。它的定义域是 R^+ ；值域是 R ；当 $a > 1$ 时，在 $(0, +\infty)$ 上是增函数；当 $0 < a < 1$ 时，在 $(0, +\infty)$ 上是减函数；它的图象过 $(1, 0)$ 。

4. 要正确理解指数方程和对数方程的概念，会解简单的指数方程和对数方程；明确对数方程验根的必要性。

在运用上述概念解有关幂函数、指数函数和对数函数的问题时，容易发生如下一些错误：

(1) 不能正确理解集合元素确定性、无序性和无异性的要求而导致错误。

(2) 不能确切掌握子集、交集、并集、补集产生的错误。

(3) 关于函数与反函数概念理解错误。

(4) 违背指数函数定义中 $y > 0$, 对数函数定义中 $x > 0$ 以及底数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 的规定而出现的错误。

【例 1】

设 $A = \{ (x, y) \mid |x+1| + (y-2)^2 = 0 \}$, $B = \{-1, 0, 2\}$ 。则 A 、 B 两个集合的关系是 ()

(A) $A \supset B$ (B) $A \subset B$ (C) $A \in B$ (D) 以上都不对。

【错解】

(B)。

【辨析】

选择 (B) 是错误的。其原因在于集合概念模糊。错误地认为集合 A 的元素是单个的数 -1 和 2 , 即 $A = \{-1, 2\}$ 。

【正确思考】

$$\because |x+1| + (y-2)^2 = 0 \text{ 同解于方程组 } \begin{cases} |x+1| = 0 \\ (y-2)^2 = 0 \end{cases},$$

显然, 这方程组的解为 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ 。

$$\begin{aligned} \therefore A &= \{ (x, y) \mid |x+1|^2 + (y-2)^2 = 0 \} \\ &= \{ (x, y) \mid \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \} = \{ (-1, 2) \}. \end{aligned}$$

这就是说, A 是点集, 可 B 是数集, 所以正确的答案应选择 (D)。

【方法指导】 判定两个集合之间的关系, 关键在于它们的元素构成特征以及它们的所属关系。下面再看一例:

【例 2】

已知 $I = \{\text{实数对 } (x, y)\}$, $A = \{(x, y) \mid \frac{y-4}{x-2} = 3\}$,
 $B = \{(x, y) \mid y = 3x - 2\}$. 求 $\bar{A} \cap B$.

【错解一】

$$A = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-4}{x-2} = 3 \right\} = \{(x, y) \mid y = 3x - 2\} = B,$$

$$\therefore \bar{A} \cap B = \bar{A} \cap A = \Phi.$$

【错解二】

$$A = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-4}{x-2} = 3 \right\}$$

$$= \{(x, y) \mid y = 3x - 2, \text{但 } (x, y) \neq (2, 4)\}$$

$$\therefore \bar{A} \cap B = \{2, 4\}.$$

【辨析】

错解一的错误是集合 A 中没有排除使分母没有意义的元素 $(2, 4)$;

错解二是答案中的集合符号错误, $\{2, 4\}$ 表示以 2 和 4 为元素的集合.

【正确思考】

$$\because A = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-4}{x-2} = 3 \right\} = \{(x, y) \mid y = 3x - 2, \text{但 } (x, y) \neq (2, 4)\}.$$

$$\therefore \bar{A} \cap B = \{(2, 4)\}.$$

【例 3】

已知 $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$, 求 $f^{-1}(\sqrt{3} + 1)$.

【错解】

$$f^{-1}(\sqrt{3} + 1) = \frac{1}{f(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{3} + 1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【辨析】

错解中混淆了“负指数”和“反函数”的概念及符号：

(1) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$);

(2) $f^{-1}(x)$ 是表示 $f(x)$ 的反函数。

【正确思考】

设 $y = f(x) = 1 + \frac{2}{x}$, 则 $x = \frac{2}{y-1}$,

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2}{x-1}$$

$$\therefore f^{-1}(\sqrt{3}+1) = \frac{2}{(\sqrt{3}+1)-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

【方法指导】

在解决有关反函数的问题时，一定要注意概念之间、符号之间的区别：如 $f^{-1}(x)$ 不同于“负指数幂”； $f^{-1}[f^{-1}(x)]$ 是 $f[f^{-1}(x)]$ 的反函数，而不是指 $f^{-1}(x)$ 的反函数。下面再看一例：

【例 4】

设 $f^{-1}[f^{-1}(x)] = 25x - 30$ ，求一次函数 $f(x)$ 。

【错解】

设 $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)，则一次函数的反函数 $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ ，从而 $f^{-1}(x)$ 的反函数就是 $f(x)$ ，故有

$$f(x) = f^{-1}[f^{-1}(x)] = ax + b,$$

$$\therefore f^{-1}[f^{-1}(x)] = 25x - 30,$$

$$\therefore f(x) = 25x - 30.$$

【辨析】

上述错解的错误在于混淆了 $f^{-1} [f^{-1} (x)]$ 与 $f^{-1} (x)$ 的反函数这两个不同的概念。因为 $f^{-1} [f^{-1} (x)]$ 的意思是 $f [f^{-1} (x)]$ 的反函数，而不是指 $f^{-1} (x)$ 的反函数。

【正确思考】

$$\text{设 } f(x) = ax + b \ (a \neq 0),$$

$$\text{则 } f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

$$f^{-1} [f^{-1} (x)] = f^{-1} \left(\frac{x-b}{a} \right) = \frac{\frac{x-b}{a} - b}{a},$$

$$\therefore f^{-1} [f^{-1} (x)] = \frac{1}{a^2}x - \frac{b(1+a)}{a^2} = 25x - 30$$

比较两边系数，得

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = 25 \\ \frac{b(1+a)}{a^2} = -30 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{所求的一次函数为 } y = \frac{1}{5}x - 1, y = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{2}.$$

【例 5】

求函数 $f(x) = \sqrt{\log_{0.1} \frac{3x-2}{2x-1}}$ 的定义域。

【错解】