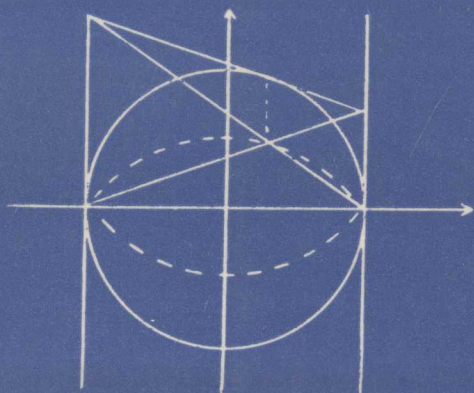


中学

几何典型题解证规律

王惠良 编著

理解题意
逻辑思路
解证过程



黑龙江科学技术出版社

中学几何典型题解证规律

王惠良 编著

黑龙江科学技术出版社

(黑) 新登字第2号

责 任 编 辑: 车承棣

封 面 设 计: 刘连生

中学几何典型题解证规律

王惠良 编 著

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区建设街41号)

哈尔滨市龙华印刷厂印刷

黑 龙 江 省 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米32开 本17.375印张 358千字

1993年12月第1版·1993年12月第1次印刷

印数: 1—5,500册 定价: 11.50元

ISBN 7-5388-2314-x/N·105

前 言

平面几何、立体几何、平面解析几何是中学数学教材的重点和难点。为了帮助中学生解决这一难题，掌握解证几何题的规律，编著了这本《中学几何典型题解证规律》。

本书的内容包括两部分：一是论证和解答几何典型题的规律；二是平面几何44道典型题、立体几何50道典型题、平面解析几何100道典型题的论证和解答的分析过程，并对每道题都给予了精辟地分析。其中平面几何运用了分析法及综合法与分析法相结合的方法进行了分析，立体几何与平面解析几何运用了分析法进行了分析，并且给予了简略地计算。每道论证题的分析过程都遵循两个步骤：第一是理解题意（理解已知条件，隐含条件及它们与结论的关系）；第二是欲证结论的思路。每道解答题的分析过程则遵循三个步骤：第一是理解题意；第二是解题途径；第三是计算其结果。有些题还给出了两种或两种以上的分析方法，以帮助读者掌握各种类型题的解证规律。

《中学几何典型题解证规律》一书是中學生，特别是高中學生的高考必读之书；又是中学数学教师及广大爱好几何学习的青年的良师益友；也是高等师范院校数学系学生的重要参考资料。

本书所用的符号：1. “ $\dashrightarrow$ ”表示条件。即表示：(1)

命题所给的已知条件；(2) 由已知条件所推出的隐含条件；

(3) 所引辅助线而创造的条件。2. “ $\Rightarrow$ ”表示：(1) 欲证的结论（在分析法中）；(2) 推出的结论（在综合法中）。

换言之，在分析法中，符号“ $\Rightarrow$ ”的含意是“就得证”或“就得算”；在综合法中，符号“ $\Rightarrow$ ”的含意是能够推出或能够算出。本书典型题分析过程中的“解证思路”一步（含有欲证或欲算字样的后边），符号“ $\Rightarrow$ ”表示就得证或就得算；在条件之内的“ $\Rightarrow$ ”表示推出；在“解证过程”一步的符号“ $\Rightarrow$ ”表示推出或算出。

编著者

目 录

第一章 平面几何	1
第一节 论证和解答平面几何典型题的规律	1
一、证题法.....	1
二、辅助线与辅助图.....	3
三、面积证明题的论证与计算途径.....	14
四、四点共圆的论证思路.....	15
五、共线点.....	16
六、共点线.....	18
七、共圆点.....	19
第二节 平面几何典型题分析 (44题)	19
第二章 立体几何	97
第一节 论证和解答立体几何典型题的规律	97
一、两条异面直线间的公垂线长的求法.....	97
二、两条异面直线间的公垂线长的求法的步骤.....	97
三、直线和平面所成的角及二面角的平面角 的意义理解和应用.....	97
四、某些四边形或三角形的部分图形沿着它 的某线段折起后形成几何体的综合计算 的方法.....	104
五、柱体(棱柱体)的导出性质.....	105

六、正 n 棱锥体的派生性质 ($n \geq 3$ 的正整数).....	111
七、有关截面积问题的综合计算的步骤.....	113
第二节 立体几何典型题分析 (50题)	114
第三章 平面解析几何	233
第一节 论证和解答平面解析几何典型题的规律.....	233
一、解析法.....	233
二、对于直线方程和二次曲线方程中常数的讨论.....	234
三、过点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线 l 与二次曲线相切时, 直线 l 的斜率 k_L 的求法 (或求 l 的方程的方法)	235
四、过点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线 l 与二次曲线相交时, 并且 $P_0(x_0, y_0)$ 为弦的中点, 求直线 l 的斜率 k_L 的方法 (或求直线 l 的方程的方法)	235
五、抛物线的焦点弦的派生性质.....	243
六、二次曲线的焦点半径公式的推导及应用.....	251
七、曲线的参数方程.....	261
八、极坐标.....	273
第二节 平面解析几何典型题分析 (100题)	286

第一章 平面几何

第一节 论证和解答平面几何 典型题的规律

平面几何中的大量命题，都是应用“分析与综合”相结合的方法进行论证的。为了获得正确的证明，必须先进行分析，题目简单的根据图形可以在大脑中直接进行分析；题目较复杂的根据图形可以在草纸上进行有步骤地分析。即从结论逐步地探索逐步地分析到已知，然后再运用综合法表述“证明过程”。

一、证题法

1. 直接证法定义

由原题入手，应用本学科的公理，定理或已证的命题的逻辑推理方法叫直接证题法。

2. 间接证法定义

有的命题往往不能或不易直接入手导出，此时，不妨证明它的等效命题，这种间接逻辑推理的方法叫间接证题法。

3. 直接证题法分类

(1) 综合法：由因导果的思维方法（即由题给条件推导出结论的思维方法）。

(2) 分析法：指果索因的思维方法（即由结论探索出题给条件或真命题的思维方法）。

4. 间接证题法分类

(1) 反证法：先否定题的论断，然后推出一个结果，而这个结果与某公理、定理或真命题矛盾或与题设矛盾或自相矛盾，从而得出题的论断是真的，这种间接证法叫反证法。

(2) 同一法：作出一个具有所说特性的图形，然后证明所作的图形与题设是同一图形（所作的图形是真实的，即是正确的，题设的图形与所作图形是同一的，反映了题设也是真实的）。

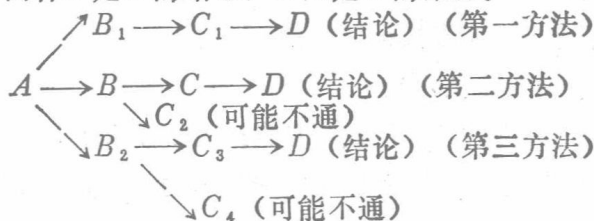
(3) 反证法分类：这里符号：“ $\Rightarrow$ ”表示“就得证”或“就得算”

①归谬法：题断的反面只有一种情况。

②穷举法：题断的反面不只是一种情况。

5. 综合法与分析法理路图

(1) 综合法理路图：若 A 是题设（题给条件或真命题），这里符号：“ $\longrightarrow$ ”表示“推出”， B 是 A 的结论， B 又是 C 的条件，同样 C 是 B 的结论， C 又是 D 的条件。



(2) 分析法理路图：这里符号：“ $\Rightarrow$ ”表示“就得证”或“就得算”

(果)

$D \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow A$ (题设)

(结论) (条件) (条件)

(新果) (新果)

C 是 D 成立的除题给条件与隐含条件及创造条件以外的未知条件，因此， C 又是下步推理的新结论（新果）；同样， B 是 C 成立的除题给条件与隐含条件及创造条件以外的未知条件，因此 B 又是下步推理的新结论（新果）。

(3) 两法比较：①分析法利于思考；②综合法宜于表述；③作题时合并使用，先分析，后综合。

二、辅助线与辅助图

证明某一个命题时，除选择恰当的证题法外，关键是引辅助线或作辅助图。辅助线与辅助图不是死记硬背的，而是由正确的分析得来的，因此我们专门研究一下它们所包括的内容及应用的规律。

1. 辅助线与辅助图的定义

(1) 辅助线：平面几何教材中的基本作图叫证题的辅助线。

(2) 辅助图：平面几何教材中的简单作图叫证题的辅助图。

2. 辅助线的内容

语言化

图形化

符号化

(1) 连结两点成线段 $A \cdot \cdots \cdots \cdots \cdot B$ 连 AB

图 1

(2) 延长已知线段成 $A \cdot \text{——} \cdot \cdots \cdots \cdot C$ 延 AB 至 C

图 2

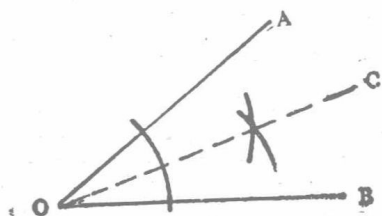
线段或成射线 $A \cdot \text{——} \cdot \cdots \cdots \cdot \cdots$ 延 AB 过 C

图 2

(3) 过两点作直线..... $\cdot$ $\cdot$作直线 AB

图 3

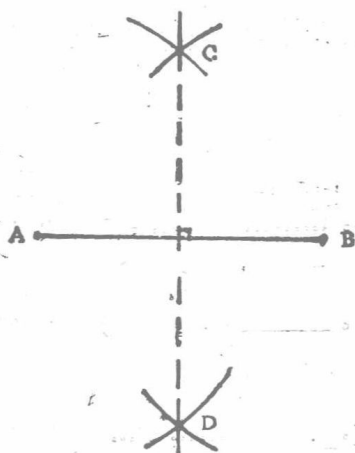
(4) 作已知角的平分线



作 OC 平分 $\angle AOB$

图 4

(5) 作已知线段的垂直平分线



作 AB 的中垂线 CD

图 5

(6) 过已知点作已知直线的平行线

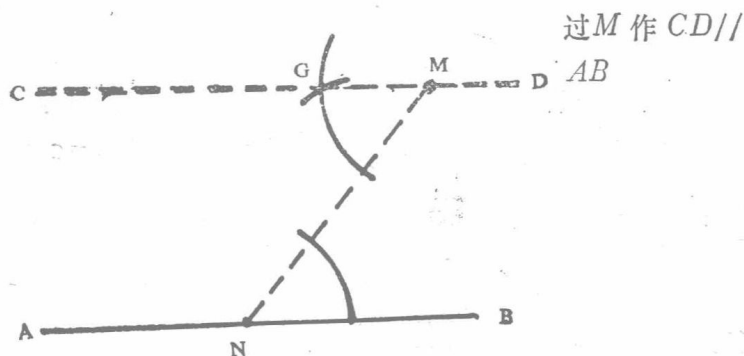


图 6

(7) 过已知点作已知直线的垂线

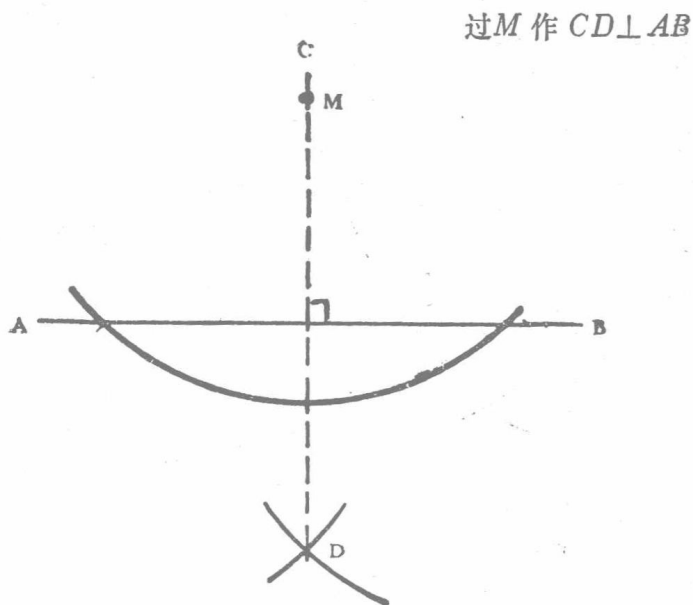
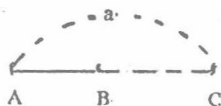
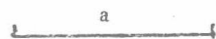


图 7

(8) 在已知线段（或它的延长线）上作线段等于已知线段



在 AB 上取点
 C , 使 $AC = a$,
延长 AB 至 C
使 $BC = a$

图 8

(9) 把已知线段分成 n 等份, 把已知圆或弧分成 n 等份。

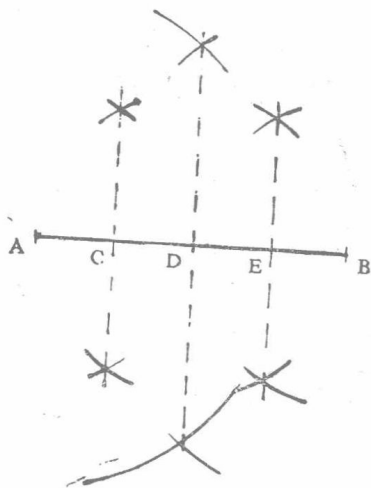


图 9 (1)

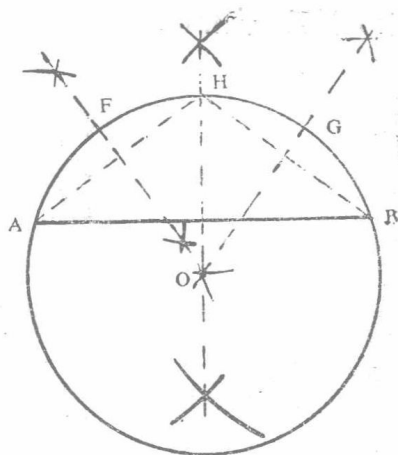


图 9 (2)

①把 AB 分成四等份, 分点为 C 、 D 、 E

②把 $\widehat{AB}$ 分成四等份, 分点为 F 、 H 、 G

(10) 在已知线段上作含有已知角的弧

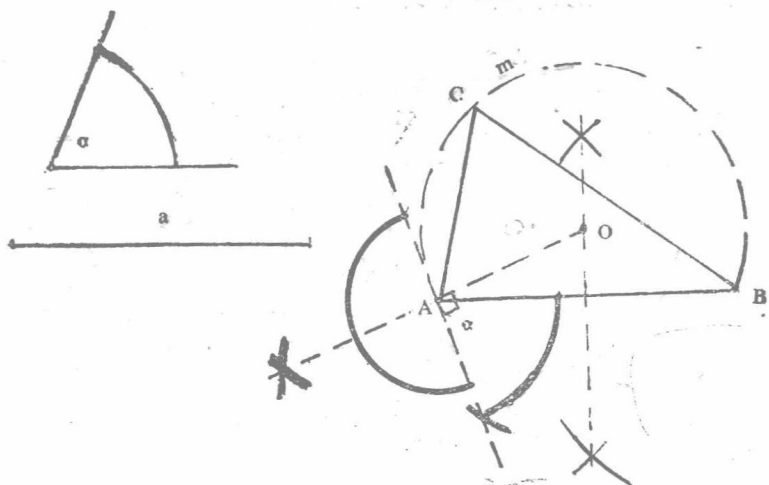
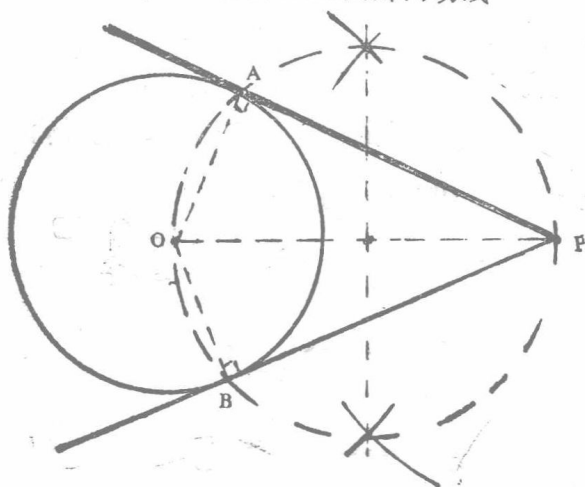


图 10

以 AB 为弦 ($AB = a$) 作 $\widehat{AmB}$ 使 $\widehat{AmB}$ 含有已知角 α

(11) 从圆外一点作已知圆的两切线



从点 P 作 PA
切 $\odot O$ 于 A ;
从点 P 作 PB
切 $\odot O$ 于 B

图 11

(12) 作两已知圆的内、外公切线

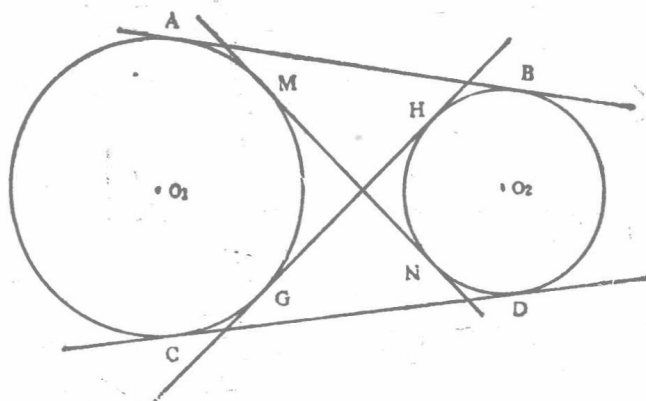


图 12

①作 MN 内切于 $\odot O_1$ 于 M 、内切于 $\odot O_2$ 于 N ；作 GH 内切于 $\odot O_1$ 于 G ；内切于 $\odot O_2$ 于 H ；

②作 AB 外切于 $\odot O_1$ 于 A 、外切于 $\odot O_2$ 于 B ；作 CD 外切于 $\odot O_1$ 于 C ，外切于 $\odot O_2$ 于 D ；

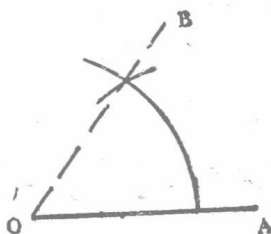
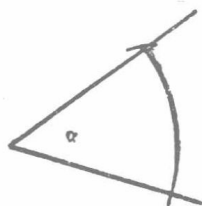
3. 辅助图的内容

语言化

图形化

符号化

(1) 作一个角等于已知角



作 $\angle AOB$
 $= \angle \alpha$

图 13

(2) 过不在同一直线上的三点作圆

过 A, B, C 作 $\odot O$

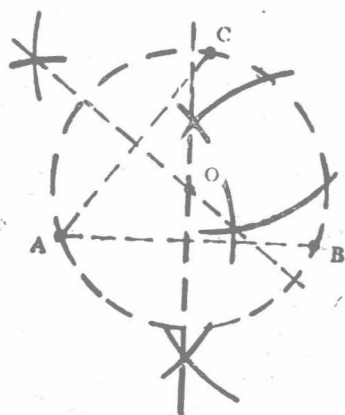


图 14

(3) 作三条已知线段的第四比例项

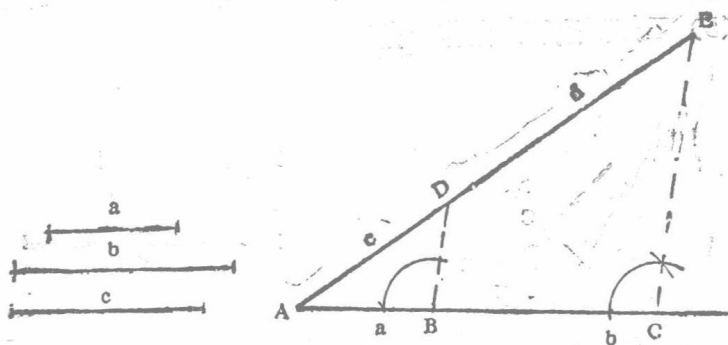


图 15

作 $AB = a$, $BC = b$ $AD = c$, 连 BD 作 $CE \parallel BD$ 交 AD 的延长线于 E , 则 DE 为 a, b, c 的第四比例项 d

(4) 作两条已知线段的比例中项

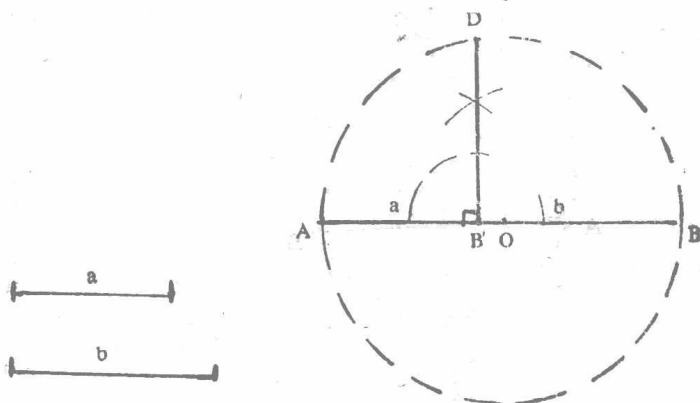


图 16

作 $AB' = a$, $B'B = b$, 以 AB 为直径作 $\odot O$ 过 B' 作 $B'D \perp AB$ 交 $\odot O$ 于 D , 则 $B'D$ 为 a 、 b 的比例中项

(5) 已知两边和夹角作三角形

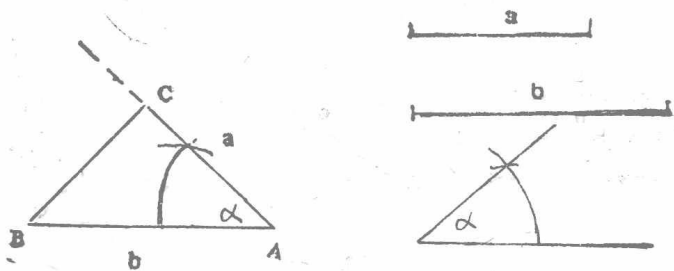


图 17

作 $\triangle ABC$, 使 $AB = b$ $AC = a$, $\angle BAC = \alpha$