同等学力人员申请硕士学位

控制科学与工程学科综合水平

全国统一考试大纲及指南

（第二版）

国务院学位委员会办公室　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

同等学力人员申请硕士学位

控制科学与工程
学科综合水平

全国统一考试大纲及指南

（第二版）

国务院学位委员会办公室　编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

同等学力人员申请硕士学位控制科学与工程学科综合水平全国统一考试大纲及指南/国务院学位委员会办公室编.—2版.—北京:高等教育出版社,2003.7

ISBN 7-04-013386-5

Ⅰ.同… Ⅱ.国… Ⅲ.自动控制-研究生-统一考试-自学参考资料 Ⅳ.TP273

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第052509号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京市联华印刷厂		
		版 次	1998年12月第1版
开 本	880×1230 1/32		2003年7月第2版
印 张	2.5	印 次	2003年7月第1次印刷
字 数	67 000	定 价	6.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

为规范同等学力人员申请硕士学位的工作，确保学位授予的质量，国务院学位委员会第十六次会议决定对同等学力人员申请硕士学位增设学科综合水平全国统一考试。自 1999 年 9 月 1 日起，以同等学力申请硕士学位人员取得相应学科的《学科综合水平全国统一考试合格证书》，成为其获得硕士学位的必要前提。

进行学科综合水平考试旨在加强国家对授予同等学力人员硕士学位的宏观质量控制、规范管理，是国家组织的对申请硕士学位的同等学力人员进行专业知识结构与水平认定的重要环节。1998 年，我们组织专家编写并出版了《同等学力人员申请硕士学位控制科学与工程学科综合水平全国统一考试大纲及指南》，五年来，根据广大考生和有关专家的建议，我们在总结近几年统一考试经验的基础上，组织有关方面的专家对本书进行了认真的修订。经过修订的新大纲（第二版）将是今后几年同等学力人员申请硕士学位控制科学与工程学科综合水平考试统一命题的依据，是各院校进行有关教学和辅导的参考，也可作为应试者复习和备考的参考资料。

国务院学位委员会办公室

2003 年 5 月

目　　录

矩 阵 理 论

第一部分 考 试 大 纲

一、线性空间

1. 线性空间的定义与性质
2. 线性相关与线性无关
3. 基、维数与坐标
4. 子空间

二、线性变换

1. 线性变换的定义与运算
2. 线性变换的矩阵
3. 线性变换的核与值域
4. 特征值与特征向量
5. 矩阵的若尔当(Jordan)标准形

三、欧几里得空间

1. 欧几里得空间的定义与性质
2. 标准正交基
3. 正交变换
4. 对称变换

四、双线性函数与二次型

1. 双线性函数
2. 二次型及其标准形
3. 实二次型的惯性定理
4. 实二次型的正定性

五、矩阵分析

1. 向量范数与矩阵范数
2. 矩阵分解
3. 函数矩阵的微积分
4. 矩阵序列与矩阵级数
5. 矩阵函数
6. 微分方程组的矩阵解法

六、线性泛函

1. 度量空间
2. 赋范线性空间及有界线性算子
3. 希尔伯特空间

第二部分　复 习 指 南

第一章　线 性 空 间

1. 理解线性空间的概念和性质。
2. 理解向量组线性相关及线性无关的定义。
3. 掌握有关向量组线性相关性的重要结论。
4. 能够证明线性相关性的命题。
5. 理解线性空间的基、维数和坐标等概念。
6. 掌握基变换和坐标变换的公式。
7. 了解子空间的概念。
8. 掌握子空间的维数公式。
9. 掌握子空间的直和分解理论。

第二章　线 性 变 换

1. 理解线性变换的概念。
2. 掌握线性变换的矩阵表示。
3. 掌握线性变换的运算。
4. 了解不变子空间、线性变换的核及线性变换的值域等概念。

5. 了解空间分解的理论。

6. 会求矩阵的若尔当标准形及变换矩阵，并了解其原理。

第三章　欧几里得空间

1. 理解内积的概念及欧几里得空间的概念。

2. 理解标准正交基的概念，能够将线性无关的向量组正交规范化。

3. 了解正交补空间的概念及欧几里得空间的直和分解。

4. 掌握正交矩阵的概念及性质。

5. 掌握正交变换的性质，了解正交变换的几何背景以及正交变换和正交矩阵的关系。

6. 了解对称变换和对称矩阵的关系。

第四章　双线性函数与二次型

1. 了解双线性函数的概念。

2. 掌握二次型及其矩阵表示。

3. 掌握用正交变换方法化二次型为标准形的方法。

4. 掌握实二次型的惯性定理。

5. 理解实二次型的正定性概念并掌握其判别法。

第五章　矩 阵 分 析

1. 了解向量范数和矩阵范数的概念。

2. 掌握矩阵的三角分解、QR 分解等。

3. 了解矩阵的奇异值分解。

4. 了解函数矩阵的概念及其运算和性质。

5. 了解函数矩阵的微积分。

6. 了解矩阵序列和矩阵级数判断收敛的条件。

7. 会矩阵函数的幂级数表示。

8. 掌握微分方程组的矩阵分析解法。

第六章　线 性 泛 函

1. 了解度量空间的基本概念。
2. 了解赋范线性空间的概念。
3. 了解一些常见赋范线性空间(如 L^∞)的基本性质。
4. 了解线性算子和线性泛函的概念和性质。
5. 了解希尔伯特空间的性质。

第三部分　思　考　题

第一章　线 性 空 间

1.1　检验以下集合对于所有指定的加法和数乘运算是否构成线性空间：

(1) 全体 n 阶对称矩阵对于矩阵的加法和数乘；

(2) 平面上全体向量，两个运算(记作$\oplus$和$\circ$)定义为

$$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},k\circ\boldsymbol{\alpha}=-k\boldsymbol{\alpha}$$

(3) 全体正实数 $\mathbf{R}^+$，两个运算定义为

$$a\oplus b=ab,k\circ a=a^k$$

1.2　判断下列向量组的线性相关性

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,-1,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-8,-1)^T$$

1.3　求下列向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其他向量用极大线性无关组线性表示

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,0)^T$$

1.4　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关。

1.5　证明 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是它们可以表示任何一个 n 维向量。

1.6　求矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & -4 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 4 & 3\\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1\end{bmatrix}$$

1.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶幂等矩阵,即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,证明秩$(\boldsymbol{A})$+秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n$。

1.8 在四维空间 V 中,求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_4=(1,3,2,3)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,3,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(-2,-3,-5,-4)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\eta}_3=(2,2,5,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_4=(-2,-3,-4,-4)^{\mathrm{T}}$$

1.9 设

$$\boldsymbol{e}_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{g}_{11}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{g}_{12}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{g}_{21}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{g}_{22}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

证明 $\boldsymbol{g}_{11},\boldsymbol{g}_{12},\boldsymbol{g}_{21};\boldsymbol{g}_{22}$ 是 $M_2(\mathbf{R})$ 的一组基,并求它到 $\boldsymbol{e}_{11},\boldsymbol{e}_{12},\boldsymbol{e}_{21},\boldsymbol{e}_{22}$ 的过渡矩阵;再求

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

在这两组基下的坐标。

1.10 设 $\boldsymbol{W}_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{W}_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,3,1)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(5,6,7,8)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$$

试求 $\boldsymbol{W}_1\cap\boldsymbol{W}_2,\boldsymbol{W}_1+\boldsymbol{W}_2$ 的基与维数。

1.11 证明每个 n 维线性空间都可以表示成 n 个一维子空间的直和。

1.12 证明 $\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{SM}_n(\boldsymbol{F})\oplus\boldsymbol{W}$,其中

$$\boldsymbol{SM}_n(\boldsymbol{F})=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{F}),\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\},\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{F}),\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}\}$$

第二章 线 性 变 换

2.1 设 V 是数域 F 上的一个一维向量空间,试证 V 到自身的映

射 σ 为线性变换的充分必要条件是，对任何 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，都有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\lambda\in F$ 是一个常数。

2.2 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是线性空间 V 的一组基，σ 是 V 上的线性变换，证明 σ 可逆，当且仅当 $\sigma\boldsymbol{\varepsilon}_1,\sigma\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\sigma\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关。

2.3 在线性空间 $F_n[x]$中，线性变换 σ：$\sigma f(x)=f'(x)$，$\forall f(x)\in F[x]$，求 σ 在基

$$1,x,\frac{x^2}{2},\cdots,\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

下的矩阵。

2.4 设

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}$$

已知 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{C}^{-1}$存在，求 $\boldsymbol{X}^{-1}$。

2.5 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵，证明

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{BA})$$

2.6 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 是四维线性空间 V 的一组基，已知线性变换 σ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

(1) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4$，$\boldsymbol{\eta}_2=3\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_4$，$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$，$\boldsymbol{\eta}_4=2\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的矩阵；

(2) 求 σ 的核与值域；

(3) 在 σ 的核中，选一组基，将它扩充成 V 的一组基，并求 σ 在这组基下的矩阵；

(4) 在 σ 的值域中，选一组基，将它扩充成 V 的一组基，并求 σ 在这组基下的矩阵。

2.7 设 σ 是可逆线性变换，证明

(1) σ 的特征值一定不为零；

(2) 如果 λ 是 σ 的特征值，那么 $1/\lambda$ 是 σ^{-1} 的特征值。

2.8　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & x\end{bmatrix}$$

的特征值为 $\lambda_1=3$(二重)，$\lambda_2=12$，求 x，并求对应的特征向量。

2.9　若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的属于特征值 λ_0^m 的特征向量；

(2) 对多项式 $f(\lambda)$，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。

2.10　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}^m$。

2.11　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角阵 $\boldsymbol{D}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{D}$。

2.12　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称幂等阵(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$)。

(1) 证明存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$；

(2) 若秩$(\boldsymbol{A})=r$，试计算 $\det(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})$。

2.13　设 V 是复数域上的 n 维线性空间，线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的矩阵是一个若尔当块

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{bmatrix}$$

证明(1) V 中包含 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的 σ 的不变子空间只有 V 自身；

(2) V 中任何非零的 σ 的不变子空间都包含 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$；

(3) V 不能分解为两个平凡的 σ 的不变子空间的直和。

2.14 设 $\sigma \in L(\mathbf{R}^2)$，$\sigma$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

写出所有 σ 的不变子空间。

2.15 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形 $\boldsymbol{J}$，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$。

第三章 欧几里得空间

3.1 在 $\mathbf{R}^2$ 中，设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2)^{\mathrm{T}}$，令 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1+3a_2b_2$，试证明 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的内积。

3.2 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-1,-2,2)^{\mathrm{T}}$。

(1) 求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的长度及彼此间的夹角；

(2) 求与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的向量。

3.3 根据如下向量用施密特正交化方法构造标准正交向量组

$$(1,2,2,-1)^{\mathrm{T}},(1,1,-5,3)^{\mathrm{T}},(3,2,8,-7)^{\mathrm{T}}$$

3.4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，对 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，定义 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$，证明 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是内积运算，并求 $\mathbf{R}^n$ 在自然基下的度量矩阵。

3.5 设 V 是 n 维欧几里得空间，$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，证明 $W=\{\boldsymbol{\beta}\mid\boldsymbol{\beta}\in V,(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0\}$ 是 V 的子空间，且维数为 $n-1$。

3.6 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是欧几里得空间 V 的一组标准正交基，试求将 $\boldsymbol{e}_1$ 变成 $\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_3$，将 $\boldsymbol{e}_2$ 变成 $\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_3$ 的正交变换。

3.7 证明对称变换 σ 的不变子空间的正交补也是 σ 的不变子空间。

第四章　双线性函数与二次型

4.1　在 $\mathbf{R}^3$ 中，设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，令

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$$

证明 f 是对称双线性函数，并求它在基 $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵。

4.2　求正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，化实二次型

$$3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准形。

4.3　判断二次型

$$Q(x_1,x_2,x_3)=7x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3$$

是否正定二次型。

4.4　问参数 t 满足什么条件时，二次型

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+tx_1x_2+tx_1x_3+x_2x_3$$

正定？

4.5　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵，已知 $\boldsymbol{A}$ 半正定，试证明

(1) $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\geqslant 1$；

(2) 等号成立的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}=0$。

第五章　矩 阵 分 析

5.1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}$，试用消去法求出 $\boldsymbol{A}$ 的 LU 分解。

5.2　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&0\\2&1&1\end{bmatrix}$，试对 $\boldsymbol{A}$ 作 QR 分解。

5.3　设 $\boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix}e^t&0\\t^2&e^{-t}\end{bmatrix}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}$ 及 $\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}(t)}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}$。

5.4　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix}$，求 e^{A}。

5.5　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 4\\ -12 & 3 & 8\\ -6 & 1 & 5\end{bmatrix}$，求微分方程组 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}x(t)$ 的一般解。

第六章　线 性 泛 函

6.1　设 l^{∞} 是有界实数列 $\boldsymbol{x}=\{x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$ 全体按通常的线性运算所成的线性空间。对于 $\boldsymbol{x}\in l^{\infty}$，令

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sup_{i}|x_i|,\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$$

证明 l^{∞} 依 $\|\boldsymbol{x}\|$ 成为赋范线性空间。

6.2　在二维空间 $\mathbf{R}^2$ 中，对每一点 $\boldsymbol{z}=(x,y)$，令 $\|\boldsymbol{z}\|=\max\{|x|,|y|\}$，证明 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个范数。

(1) 问点集 $K=\{\boldsymbol{z}|\ \|\boldsymbol{z}\|<1\}$ 是什么点集？

(2) 置 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$。证明以原点 $O=(0,0)$ 及 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为顶点的三角形在此范数所确定的距离之下是等边三角形。

6.3　设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维实向量空间，在 $\mathbf{R}^n$ 中取一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$，相应于任意一个 $n\times n$ 矩阵 $(t_{\mu\nu})$，作 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的算子 $\boldsymbol{T}$ 如下：当 $\boldsymbol{x}=\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu}\boldsymbol{e}_{\nu}$ 时，

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=\sum_{\mu=1}^{n}y_{\mu}\boldsymbol{e}_{\mu}$$

而 $y_{\mu}=\sum_{\nu=1}^{n}t_{\mu\nu}x_{\nu}$，$\mu=1,2,\cdots,n$。试说明 $\boldsymbol{T}$ 是一个线性算子。又如果规定向量 $\boldsymbol{x}=\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu}\boldsymbol{e}_{\nu}$ 的范数为 $\|\boldsymbol{x}\|=\max_{\nu}|x_{\nu}|$，求出算子 $\boldsymbol{T}$ 的范数。

6.4　设 l^2 是满足条件 $\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_{\nu}|^2<\infty$ 的数列 $\{x_n\}$ 全体按通常的线

性运算所成的线性空间，当

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^2,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in l^2$$

时，规定$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y}_i$。试证明这样定义的（·，·）确实满足内积的三个条件，l^2 是一个希尔伯特空间。

第四部分 参考书目

1. 俞正光，李永乐，詹汉生. 线性代数与解析几何. 北京：清华大学出版社，1998
2. 俞正光，李永乐，吕志. 理工科代数基础. 北京：清华大学出版社，1998

控 制 理 论

第一部分 考 试 大 纲

一、控制系统的数学模型

1. 单输入单输出系统的传递函数及输出响应
2. 状态,状态空间,系统的状态空间描述,系统的坐标变换
3. 状态转移矩阵
4. 各类数学模型的推导及转换
5. 传递函数矩阵的计算
6. 状态方程的求解和运动分析
7. 预解矩阵和矩阵指数

二、控制系统的稳定性分析

1. 系统的稳定性,稳定裕量
2. 渐近稳定,李雅普诺夫稳定性,BIBO 稳定性
3. 由传递函数判别系统的稳定性
4. 李雅普诺夫稳定性定理及其应用

三、单输入单输出系统的串联校正

1. 串联校正与局部反馈
2. 超前校正,滞后校正,滞后超前校正
3. 典型串联校正的基本原理及设计

四、线性时不变系统的代数结构分析

1. 可控性与可观性
2. 可控规范型,可观规范型,若尔当规范型,特征值规范型
3. 可控性分解,可观性分解
4. 可控子空间,不可观子空间