

如果您使用过各种数学辅导资料 但成效不大
请您使用王迈迈图书品牌系列丛书

Wmm

王迈迈图书品牌 ◆ 畅销十八年 ◆ 风靡几代人

专利产品

专利证书号1697051号

同济大学 方程 审订

最新 工程数学 (第五版)

线性代数 教与学参考

主编 钱志强

与同济大学《线性代数》第五版配套

本书八大特色

- ★ 考点提示及大纲要求
- ★ 重点知识结构图
- ★ 常考题型与范例精解
- ★ 考研经典题剖析
- ★ 典型错误类型及根源分析
- ★ 学习效果三级测试
- ★ 课后习题详解与三级测试题答案
- ★ 疑难解答

APETINE
时代出版

时代出版传媒股份有限公司
安徽教育出版社

如果您使用过各种数学辅导资料 但成效不大
请您使用王迈迈图书品牌系列丛书

Wmm

王迈迈图书品牌 ◆ 畅销十八年 ◆ 风靡几代人

同济大学 方程 审订

最新工程数学 (第五版)

线性代数
教与学参考

主编 钱志强 编者 胡喜珍 能金明

APCTIME
时代出版

时代出版传媒股份有限公司
安徽教育出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

最新线性代数教与学参考 / 钱志强主编. —5 版. —合肥:
安徽教育出版社, 2011. 3
ISBN 978 - 7 - 5336 - 5898 - 4

I. ①最… II. ①钱… III. ①线性代数—高等学校
—教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 041254 号

书名: 最新线性代数教与学参考

作者: 钱志强

出版人: 朱智润

选题策划: 王迈迈

责任编辑: 肖 婷

责任印制: 王云云

装帧设计: 奚雄军

出版发行: 时代出版传媒股份有限公司 <http://www.press-mart.com>

安徽教育出版社 <http://www.ahep.com.cn>

(合肥市繁华大道西路 398 号, 邮编: 230601)

营销部电话: (0551) 3683010, 3683011, 3683015

时代迈迈教育出版传媒武汉公司 (<http://www.wmmenglish.com>)

营销部电话: (027) 87733739, 87733959

排 版: 安徽创艺彩色制版有限责任公司

印 刷: 枝江市新华印刷有限公司

电话: (0717) 4212959

(如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与印刷厂商联系调换)

开本: 889 × 1230 1/32

印张: 16

字数: 580 千字

版次: 2011 年 5 月第 1 版

2011 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5336 - 5898 - 4

定价: 19.80 元

版权所有, 侵权必究

Preface 前言

线性代数是理工科学生的一门重要的必修基础课程。但该课程教学课时少,概念多,定理多,内容抽象而实例少,这就使教师在教学过程中常有“内容无法完全展开”之苦,而学生在学习过程中常出现“知其然,而不知其所以然”的现象。为此,我们结合多年来的教学经验和考研辅导反馈的信息,试图编写一本能帮助学生巩固、加深、提高和拓宽所学知识的参考书,把学生在学习感到困难的问题、容易出错的问题集中起来进行分析探讨,对线性代数中的问题与方法进行全面系统的总结和分类,指导学生应该如何去分析解决问题,并用难度适中的题目对学生进行有计划、有步骤的训练,这对培养学生的思维能力和独立钻研精神是非常有益而必要的。

基于这种想法,我们精心汇集了历年来全国硕士研究生数学试题线性代数部分考题,对其进行了较全面的整理和分析,并反复推敲,修改和筛选出其具有很强的典型性、灵活性、启发性、趣味性和综合性的题目,并附以详细的解答过程,以便读者参考学习和自测自评,特别地,为了使学生在学完每一章节后可以立即转入到本书的学习,本书内容在编排上完全与现行教材线性代数(同济大学第五版)同步,可以作为课堂教学的补充和延续。

我们不提倡“题海战术”,但是我们一贯注重对学生思维能力的培养,基于这一宗旨,我们在对例题进行分类讲解时,特别注意了系统地讲述解题思想与解题方法,而不是题目的堆砌或单纯的题解。为了方便考研的读者,我们在解题过程中还贯穿了知识结构的前后呼应,一题多解,以期能帮助读者举一反三,起到事半功倍的效果。

本书每一章(第六章除外)都包括以下七个方面的内容:

- 一、考点提示及大纲要求。大纲要求一目了然,考点简明扼要。
- 二、重点知识结构图。该图提纲挈领,逻辑性强,体系完整。
- 三、常考题型与范例精解。题型典型灵活,解题方法富于技巧,内容覆盖面宽。抓住要害,突出重点、难点,深化概念,拓宽知识面。

四、考研经典题剖析。开阔视野,“一步到位”,使读者更加明了考研的题型和难度,做到有的放矢。

五、典型错误类型及根源分析。析理透彻,一针见血。

六、学习效果三级测试。循序渐进,层次分明,适合不同要求,便于复习巩固所学知识。

七、习题解答与三级测试题详解,便于读者自我检测。

最后附疑难问题解答,便于读者更加方便及时地掌握书中的重点和难点,拓宽知识面。

另外,同学们在使用本书时,请尽量先做练习,再参考本书答案和疑难详解。

我们衷心希望《最新线性代数教与学参考》能够成为广大读者的得力助手。



Contents

目录

第一章 行列式

一、考点提示及大纲要求	(1)
二、重点知识结构图	(2)
三、常考题型与范例精解	(3)
四、考研经典题剖析	(17)
五、典型错误类型及根源分析	(22)
六、学习效果三级测试	(25)
基础测试题	(25)
提高测试题	(27)
考研训练题	(30)
七、课后习题解答与三级测试题详解	(31)

第二章 矩阵及其运算

一、考点提示及大纲要求	(55)
二、重点知识结构图	(56)
三、常考题型与范例精解	(57)
四、考研经典题剖析	(69)
五、典型错误类型及根源分析	(78)
六、学习效果三级测试	(82)
基础测试题	(82)
提高测试题	(84)
考研训练题	(86)
七、课后习题解答与三级测试题详解	(88)

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

一、考点提示及大纲要求	(126)
二、重点知识结构图	(127)
三、常考题型与范例精解	(128)
四、考研经典题剖析	(140)
五、典型错误类型及根源分析	(149)
六、学习效果三级测试	(152)
基础测试题	(152)

提高测试题	(155)
考研训练题	(157)
七、课后习题解答与三级测试题详解	(160)

第四章 向量组的线性相关性

一、考点提示及大纲要求	(204)
二、重点知识结构图	(205)
三、常考题型与范例精解	(206)
四、考研经典题剖析	(224)
五、典型错误类型及根源分析	(246)
六、学习效果三级测试	(249)
基础测试题	(249)
提高测试题	(253)
考研训练题	(257)
七、课后习题解答与三级测试题详解	(260)

第五章 相似矩阵及二次型

一、考点提示及大纲要求	(315)
二、重点知识结构图	(316)
三、常考题型与范例精解	(317)

四、考研经典题剖析	(336)
五、典型错误类型及根源分析	(357)
六、学习效果三级测试	(359)
基础测试题	(359)
提高测试题	(363)
考研训练题	(365)
七、课后习题解答与三级测试题详解	(368)

第六章 线性空间与线性变换

一、考点提示及大纲要求	(426)
二、经典例题精析	(426)
三、学习效果测试题	(437)
四、课后习题解答及测试题详解	(438)
 综合测试题(一)	 (448)
综合测试题(二)	(451)
符号说明	(469)
2008 年考研数学(线性代数部分)真题及参考答案	(471)
疑难问题解答	(483)



第一章

行列式



一、考点提示及大纲要求

➡ 考点提示

1. 排列、排列的奇偶性;
2. 逆序、逆序数;
3. 对换改变排列的奇偶性;
4. 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数;
5. 行列式的定义;
6. 行列式的展开;
7. 行列式的性质;
8. 行列式的化简及计算;
9. 克拉默法则;
10. 行列式的证明.

➡ 大纲要求

1. 会求 n 元排列的逆序数;
2. 深入领会行列式的定义;
3. 掌握行列式的性质,并且会正确使用行列式的有关性质化简、计算行列式;
4. 灵活掌握行列式按行(列)展开;
5. 会用克拉默法则判定线性方程组解的存在性、唯一性及求出方程组的解.

```

graph TD
    Root[行列式] --> Node1[全排列逆序数]
    Root --> Node2[行列式]
    Node1 --> Node1_1["n元排列一共有n!个, 其中奇、偶排列各有n!/2个"]
    Node1 --> Node1_2[对换改变排列的奇偶性]
    Node1 --> Node1_3[求逆序数]
    Node2 --> Node2_1[性质]
    Node2 --> Node2_2[展开]
    Node2 --> Node2_3[计算]
    Node2_1 --> Node2_1_1["1. D^T = D 2. 互换行列式的两行(列), 行列式变号.  
3. 用一个数乘行列式的某一行(列) 就等用这个数乘此行列式. 4. 若行列式中有两行(列)元素成比例, 则此行列式等于零. 5. 把行列式的某一行(列)的倍数加到另一行(列)上, 行列式不变."]
    Node2_2 --> Node2_2_1["展开  
D = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad i=1, 2, \dots, n \quad D = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}, j=1, 2, \dots, n"]
    Node2_3 --> Node2_3_1["计算  
利用“化三角法”计算行列式  
利用范德蒙行列式计算行列式  
利用“归纳法”计算或证明行列式"]
    Node2_3_1 --> Node2_3_1_1["\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}"]
    Node2_3_1_1 --> Node2_3_1_1_1["若 D \neq 0, 则 x_i = D_i / D, (i=1, 2, \dots, n)"]
    Node2_3_1_1 --> Node2_3_1_1_2["\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}"]
    Node2_3_1_1_2 --> Node2_3_1_1_2_1["若 D \neq 0, 则 x_i = 0 (i=1, 2, \dots, n)"]
    Node2_3_1_1_2 --> Node2_3_1_1_2_2["若 D = 0, 则方程组有非零解."]
  
```

行列式

全排列逆序数

n 元排列一共有 $n!$ 个, 其中奇、偶排列各有 $\frac{n!}{2}$ 个

对换改变排列的奇偶性

求逆序数

性质

1. $D^T = D$ 2. 互换行列式的两行(列), 行列式变号.

3. 用一个数乘行列式的某一行(列) 就等用这个数乘此行列式. 4. 若行列式中有两行(列)元素成比例, 则此行列式等于零. 5. 把行列式的某一行(列)的倍数加到另一行(列)上, 行列式不变.

展开

$D = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad i=1, 2, \dots, n \quad D = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}, j=1, 2, \dots, n$

计算

利用“化三角法”计算行列式

利用范德蒙行列式计算行列式

利用“归纳法”计算或证明行列式

克拉默法则

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若 $D \neq 0$, 则 $x_i = D_i / D, (i=1, 2, \dots, n)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

若 $D \neq 0$, 则 $x_i = 0 (i=1, 2, \dots, n)$

若 $D = 0$, 则方程组有非零解。



三、常考题型与范例精解

例1 排列 134782695 的逆序数为()

(A)9; (B)10; (C)11; (D)12.

解 在排列 134782695 中,

1 排在首位,逆序数为 0;

3, 4, 7, 8 各数的前面没有比它们自身大的数,故这四个数的逆序数均为 0;

2 的前面比 2 大的数有四个(3, 4, 7, 8),故逆序数为 4;

6 的前面比 6 大的数有两个(7, 8),故逆序数为 2;

9 是最大数,逆序数为 0;

5 的前面比 5 大的数有四个(7, 8, 6, 9),故逆序数为 4;

于是这个排列的逆序数为

$$t = 0 + 0 + 4 + 2 + 0 + 4 = 10$$

故正确答案为(B).

例2 下列排列中()是偶排列.

(A)4312; (B)51432; (C)45312; (D)654321.

解 按照例1的方法计算知:

排列 4312 的逆序数为 5,

排列 51432 的逆序数为 7,

排列 45312 的逆序数为 8,

排列 654321 的逆序数为 15,

故正确答案为(C).

例3 行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$,

若 $D_1 = D_2$, 则 λ 的取值为()

(A)0, 1; (B)0, 2; (C)1, -1; (D)2, -1.

解 按三阶行列式的对角线法则,有

$$D_1 = 10 + 2 + 27 - 6 - 30 - 3 = 0$$

$$D_2 = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

若 $D_1 = D_2$, 则 $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$, 解得 $\lambda = -1$ 或 $\lambda = 1$

故正确答案为(C).

例4 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解时,对 λ 的要求是()

(A) $\lambda \neq 1, \lambda \neq 2$;

(B) $\lambda \neq -1, \lambda \neq 2$;

(C) $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$;

(D) $\lambda = 1, \lambda \neq 2$.

解

由克拉默法则知,当所给非齐次线性方程组的系数行列式不等于零时,该方程组有唯一解,于是令行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \neq 0$$

即 $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$

故正确答案为(C).

例5 用定义计算5阶行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中第2,3行及第2,3列上的元素都不等于零.

解 D_5 中各行非零元素的列标分别可取以下各值

$$p_1 = 2, 3; \quad p_2 = 1, 2, 3, 4, 5; \quad p_3 = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$p_4 = 2, 3; \quad p_5 = 2, 3;$$

在上述可能取的数码中,不能组成任何一个5元排列 $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$, 换句话说,在 D_5 的每一项5个元素中,必至少含有一个零元素,故按行列式的定义有: $D_5 = 0$.

例6 写出五阶行列式 $|a_{ij}|_{5 \times 5}$ 中包含因子 $a_{13} a_{25}$ 且带负号的所有项.

解 按行列式的定义,五阶行列式中包含因子 $a_{13} a_{25}$ 的项的一般式为

$$(-1)^{\tau(35p_3p_4p_5)} a_{13} a_{25} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5}$$

故含有 $a_{13} a_{25}$ 的所有项的项数为5元排列 $35p_3 p_4 p_5$ 的个数. 因排列 $p_3 p_4 p_5$ 是三个数码1,2,4的全排列,共3!个,故 $35p_3 p_4 p_5$ 能组成6个5元排列,即

$$35124; 35142; 35214; 35241; 35412; 35421.$$

其中35142, 35214, 35421为偶排列,35124, 35241, 35412为奇排列,故包含因子 $a_{13} a_{25}$ 且带负号的所有项为

$$a_{13} a_{25} a_{31} a_{42} a_{54}; \quad a_{13} a_{25} a_{32} a_{44} a_{51}; \quad a_{13} a_{25} a_{34} a_{41} a_{52}.$$

例7 求多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 3x & 2 & -4 & 1 \\ -x & x & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 2x & 2 \\ x & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 和 x^3 的系数.

解 4阶行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3 p_4)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4}$$

要求 x^4 的系数,则必须每个 a_{ip_i} ($i = 1, 2, 3, 4$) 都要含有 x , 这样的项只有

$$(-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = (-1)^0 3x \cdot x \cdot 2x \cdot x = 6x^4,$$

于是 $f(x)$ 中 x^4 的系数是6.

要求 x^3 的系数,则必须4个 a_{ip_i} ($i = 1, 2, 3, 4$) 中有3个含有 x , 这样的项有

$$(-1)^{\tau(2134)} a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} = 4x^3$$

$$(-1)^{\tau(4231)} a_{14} a_{22} a_{33} a_{41} = -2x^3$$

故 $f(x)$ 中 x^3 的系数是 $4 - 2 = 2$.

例8 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

解法一

因为这个 n 阶行列式中每一列中的 n 个元素之和都为 $n+1$, 所以将第2,3,..., n 行元素都加到第1行上,得



$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_i - r_1]{i=2,3,\dots,n} (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= n+1.$$

解法二 利用 n 阶行列式的性质化简

$$D_n \xrightarrow[r_i - r_1]{i=2,3,\dots,n} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n+1.$$

例9 设 $abcd = 1$, 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a^2 + \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 + \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 + \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 + \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{解} \quad D = \begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = 0.$$

例 10 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2001 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2002 \end{vmatrix}$

解 按最后一行展开, 得到 $D = 2002 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2001 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 2002 \times (-1)^{\frac{2001 \times 2000}{2}} \times 2001! = 2002!.$$

例 11 已知 4 阶行列式 D 中第一行上元素分别为 1, 2, 0, -4; 第三行上元素的余子式依次为 6, x , 19, 2; 试求 x 的值.

解 由题设知, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ 分别为 1, 2, 0, -4, $M_{31}, M_{32}, M_{33}, M_{34}$ 分别为 6, x , 19, 2, 从而得 $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}$ 分别为 6, $-x$, 19, -2. 由行列式按行(列)展开定理, 有

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} + a_{14}A_{34} = 0$$

$$\text{于是 } 1 \times 6 + 2 \times (-x) + 0 \times 19 + (-4) \times (-2) = 0$$

所以 $x = 7$.

例 12 设 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, 求 $4A_{12} + 2A_{22} - 3A_{32} + 6A_{42}$,

其中 A_{i2} 为 D 中元素 a_{i2} ($i = 1, 2, 3, 4$) 的代数余子式.

解法一 因 4, 2, -3, 6 恰好为 D 中第 3 列元素, 而 $A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$ 为 D 中第 2 列元素的代数余子式, 故 $4A_{12} + 2A_{22} - 3A_{32} + 6A_{42}$ 表示 D 中第 3 列元素与第 2 列的对应元素的代数余子式乘积的和, 由行列式按行(列)展开定理知, 此和必等于零, 即

$$4A_{12} + 2A_{22} - 3A_{32} + 6A_{42} = 0$$

解法二 因 A_{i2} 为 D 中元素 a_{i2} ($i = 1, 2, 3, 4$) 的代数余子式, 故将 D 中第 2 列元素依次换为 4, 2, -3, 6, 即得

$$4A_{12} + 2A_{22} - 3A_{32} + 6A_{42} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

例 13 已知 5 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

试求 (1) $A_{21} + A_{22} + A_{23}$; (2) $A_{24} + A_{25}$

其中 A_{2j} 是 D 中元素 a_{2j} ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) 的代数余子式.

解 由行列式按行展开定理有

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} + a_{25}A_{25} = 0 \quad (i = 1, 3, 4, 5)$$

取 $i = 1, 3$ 得

$$\begin{cases} a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + a_{14}A_{24} + a_{15}A_{25} = 0 \\ a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} + a_{34}A_{24} + a_{35}A_{25} = 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 4(A_{21} + A_{22} + A_{23}) + (A_{24} + A_{25}) = 0 \\ 3(A_{21} + A_{22} + A_{23}) + 2(A_{24} + A_{25}) = 0 \end{cases}$$

解方程组得 $\begin{cases} A_{21} + A_{22} + A_{23} = 0, \\ A_{24} + A_{25} = 0. \end{cases}$

例 14 已知 1326, 2743, 5005, 3874 都能被 13 整除, 不计算行列式的值, 试证 D_4

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} \text{ 能被 13 整除.}$$

证 把 D_4 的每一行看成一个四位数, 其千位、百位、十位、个位数字分别为 D_4 的各行上的第 1, 2, 3, 4 列上的元素, 则这 4 个四位数正好就是 1326, 2743, 5005, 3874.

为使 D_4 的第 4 列上各元素变成这 4 个四位数, 现将第 1, 2, 3 列分别乘以 10^3 , 10^2 , 10 , 并都加到第 4 列, 得到

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1326 \\ 2 & 7 & 4 & 2743 \\ 5 & 0 & 0 & 5005 \\ 3 & 8 & 7 & 3874 \end{vmatrix}$$

由题设知, 13 整除上行列式的第 4 列, 故 13 能整除 D_4 .

该法适用除数 m 为质数的情况. 如果 m 为合数, 且其各因数分别能整除该行列式某些行(列), 由行列式性质即知该行列式能被合数 m 整除, 请看下例.

例 15 不计算行列式的值, 证明行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

能被 18 整除.

证法一 因 $18 = 9 \times 2$ 为合数, 且 D_4 的第 3, 4 两行分别可被 9, 2 所整除, 由行列式性质知, D_4 可被 18 整除.

证法二 将 D_4 的第 1, 2, 3 行分别乘以 10^3 , 10^2 , 10 , 并加到第 4 行, 得到 $D_4 =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 1998 & 2196 & 2394 & 1800 \end{vmatrix}$$

因上行列式的第 4 行能被 18 整除 (1998, 2196, 2394, 1800 均能被 18 整除), 故 D_4 能被 18 整除.

例 16 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$

解 用递推法, 先按 D_n 的第一行展开, 得到

$$D_n = 5D_{n-1} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

于是得递推公式 $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$

或 $D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2})$

递推下去得到 $D_n - 2D_{n-1} = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1)$
 同样可得递推公式 $D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2})$
 递推下去得到 $D_n - 3D_{n-1} = 2^{n-2}(D_2 - 3D_1)$

$$\therefore D_1 = |5| = 5, D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19$$

$$\therefore \begin{cases} D_n - 2D_{n-1} = 3^n \\ D_n - 3D_{n-1} = 2^n \end{cases}$$

解方程组得 $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

例 17 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$

分析 D_n 中各行元素都分别是同一个数的不同方幂,且方幂次数从左到右按递升次由 1 到 n 排列,但不是由 0 变到 $n-1$,如提取各行的公因数,则方幂次数便从 0 增至 $n-1$,便可利用范德蒙行列式的结论计算.

$$\text{解 } D = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= n! \prod_{n \geq i > j \geq 1} (i - j)$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1) \cdot (3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots [n - (n-1)] = n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

例 18 计算 $(n+1)$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, n+1)$.

分析 利用行列式性质,改变原行列式的元素,产生以新元素为行(列)的范德蒙行列式

解 提取 D_{n+1} 各行的公因子,得到



$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & (\frac{b_1}{a_1})^2 & \cdots & (\frac{b_1}{a_1})^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & (\frac{b_2}{a_2})^2 & \cdots & (\frac{b_2}{a_2})^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^2 & \cdots & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^n \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{i=1}^{n+1} a_i^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \\ (\frac{b_1}{a_1})^2 & (\frac{b_2}{a_2})^2 & \cdots & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{b_1}{a_1})^n & (\frac{b_2}{a_2})^n & \cdots & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n+1} a_i^n \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_j}{a_j} \right).
 \end{aligned}$$

例 19 设 $a > b > c > 0$, 试用范德蒙行列式证明

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} < 0$$

分析 D_3 中前两列分别为 a, b, c 的一次、二次方幂, 但第三列元素不是相应元素的零次幂 (即该列元素都不是 1), 而是前两列元素的函数, 此时可利用行列式性质, 将第三列元素化为全是 1, 再用范德蒙行列式证明.

证 将 D_3 的第 1 列乘以 $a + b + c$ 加到第 3 列, 得到

$$\begin{aligned}
 D_3 &= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2 + ab + bc + ca \\ b & b^2 & b^2 + ab + bc + ca \\ c & c^2 & c^2 + ab + bc + ca \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{vmatrix} a & a^2 & ab + bc + ca \\ b & b^2 & ab + bc + ca \\ c & c^2 & ab + bc + ca \end{vmatrix} \\
 &= (ab + bc + ca) \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_3 \leftrightarrow c_2 \\ c_2 \leftrightarrow c_1}} (ab + bc + ca) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\
 &= (ab + bc + ca)(b - a)(c - a)(c - b) < 0.
 \end{aligned}$$

例 20 计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 + \cos \varphi_1 & 1 + \cos \varphi_2 & 1 + \cos \varphi_3 & 1 + \cos \varphi_4 \\ \cos \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 & \cos \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2 & \cos \varphi_3 + \cos^2 \varphi_3 & \cos \varphi_4 + \cos^2 \varphi_4 \\ \cos^2 \varphi_1 + \cos^3 \varphi_1 & \cos^2 \varphi_2 + \cos^3 \varphi_2 & \cos^2 \varphi_3 + \cos^3 \varphi_3 & \cos^2 \varphi_4 + \cos^3 \varphi_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad D_4 &\xrightarrow{r_i - r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos \varphi_1 & \cos \varphi_2 & \cos \varphi_3 & \cos \varphi_4 \\ \cos \varphi_1^2 & \cos \varphi_2^2 & \cos \varphi_3^2 & \cos \varphi_4^2 \\ \cos \varphi_1^3 & \cos \varphi_2^3 & \cos \varphi_3^3 & \cos \varphi_4^3 \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\cos \varphi_i - \cos \varphi_j)
 \end{aligned}$$

例 21 求奇数阶行列式 $D_n = \det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, n 为奇数.