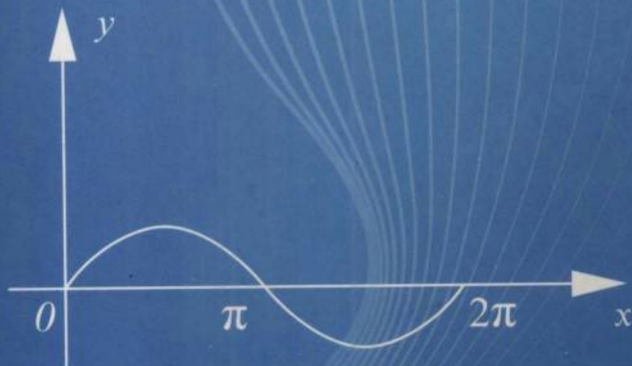
名家导学系列

孙维刚高中数学

孙维刚　编著



$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

名家导学系列

孙维刚高中数学

孙维刚 编著

北京大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是著名的数学教育家孙维刚老师的著作，涵盖了现行高中数学教育大纲中所要求掌握的内容，是孙老师三轮实验班的教材。本书立足于对高中数学中基础知识的分析把握，以及对方法和思想的指导，在详述概念后，引申概念外围的规律、方法，以及解题思考规律。书中提出，学好数学必须站在系统的角度看问题，力求一题多解、多解归一（结论一个）、多题归一（善于总结），善于用“动”的观点思考问题（做到“风物长宜放眼量”），这对开启学生的数学智慧，掌握科学的学习方法、思维规律，提高学习效率有很大的帮助。

本书可作为教师和学生的辅导用书或自学教材。

图书在版编目(CIP)数据

孙维刚高中数学/孙维刚编著. —北京：北京大学出版社，2005.1
（名家导学系列）
ISBN 7-301-08497-8

Ⅰ.孙…　Ⅱ.孙…　Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第135309号

书　　名：孙维刚高中数学
著作责任者：孙维刚　编著
责 任 编 辑：温丹丹
标 准 书 号：ISBN 7-301-08497-8/G·1381
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 58874083　编辑部 62765126
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
排　版　者：北京东方人华北大彩印中心　电话：62754190
印　刷　者：河北涿县鑫华书刊印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　13印张　332千字
2005年1月第1版　2005年11月第2次印刷
定　　价：19.00元

第三版序

拿着笔，眼前不断地浮现出孙维刚老师著述时的情景。

他真的很忙，也很累。对于出版社的约稿，从不会拒绝别人要求的孙老师，总是一拖又拖，直至无法再拖，最后，只好硬着头皮放下手里永远干不完的“活儿”，伏案而书。

每逢写作，他总习惯桌子上除了稿纸以外，就是一支笔，其他东西统统搬走。

桌子还是那张桌子，灯光依旧。

我还清楚地记得他写作本书时用的那支笔，一支套着白色金属帽，有着草绿色笔杆的普通钢笔。因长时间的频繁使用，笔尖早已磨秃了，但写起字来却很流畅。他说：“这支笔可立了功，从一参加工作，我就用它，从没有离开过。”后来，这支笔在一次开会时不慎遗失，为此，他遗憾了很多日子。

孙老师写作起来，速度很快。从早晨到晚上，头都不肯抬一抬，只看见他握笔的手在稿纸上疾速地移动，发出沙沙的声音，间或夹杂着晃动涂改液的嗒嗒声。就这样，一天一万字，一气呵成。那笔尖流淌出的智慧，分明是他和学生心的碰撞。因此，读他的文字，就像听见他在课堂上的讲课，娓娓道来，带领着他的学生思潮如涌。

当这部著述终于完成时，他微微活动一下早已疲惫的身躯，细细地审视着手中的稿子，自言自语地说：“我要对得住我的读者。”这是他的心声。我还清楚地记得他很多次地引用过好友周沛耕老师的话：“教师的一切成就都是学生给的。”

另外，当您拿到这本由北京大学出版社出版的《孙维刚高中数学》时，一定要将前面“作者的话”细细地阅读，因为里面有很多重要的话要告诉您，这也是孙老师生前常常说给来信、来电或当面咨询的读者的话。

最后，衷心地希望这本《孙维刚高中数学》能对广大青少年朋友学习数学有所启迪。

如今，斯人已逝，谨以此序寄以无限的思绪。

王海亭

2003 年元月于北京

第二版修订说明

幸蒙老师和同学们的关怀，拙述《初中数学》、《高中数学》两本书，至今已六次印刷，逾 16 万册。

其间，我受到各地老师和同学们热情来信的勉励和盛情建议，使两本书修订再版。

在保留原书主体的基础上，两书都在解题思考规律的应用，即提高解题能力方面，进行了补充。《初中数学》在一些主要章节，补充了一些新的例题分析；《高中数学》，则补充了“第四篇　解题思考分析的再示范”。

《初中数学》书中某些知识，在新的九年义务教育大纲中列为选学或不学，本次再版，仍予保留。我的考虑是：

1. 读者中许多学生初中毕业后要继续学习，特别是要升入普通高中，书中对这些少量知识的学习指导，还是很有价值的；

2. 本书立足于对知识分析把握的指导，立足于对方法和思想的建议和指导，所以阅读这些部分是有益的。

另外，想多说几句的是关于如何学好数学的问题。

数学，是学生投入最多的一门课程，但许多同学却为并没取得理想效果所苦，部分同学甚至陷入题海，昏天黑地，以至望而却步。

究其原因，在于方法不得要领，或根本不当。

本人认为，学好数学，首重概念扎实、基础知识牢固，这几乎是人所共识。但究竟什么是“扎实”、“牢固”？又怎样才能“扎实”、“牢固”？则恐多有差异，甚至大相径庭了。

汽车飞驰，离不开动力的心脏——发动机，但必须通过变速箱、大轴，最后作用到轮子上。解数学题亦如此，概念、基础知识（发动机），要发挥作用，也必须靠一连串连接装置，即对概念的理解、引伸，概念外围的规律、方法，以及解题思考规律，这些在课本上是没有的。

学好数学，还要学会聪明地做题。既要在做题的实践中加深理解、增长才干，又不为其所累。怎样才是和才能“聪明地做题”？

而最根本的出路，是在学习过程中，提高了能力，完善了自己的素质。

怎样实现这美好的一切？本书就是要向广大同学、青年教师展示其途径。

限于水平，书中疏误仍将很多，诚请批评指正，不胜感谢。

孙维刚

1999 年 2 月于北京

作者的话

“有谁能相信，北京22中今年毕业的高三(4)班，全班40人中，有15人被清华大学、北京大学录取。”

这是《北京日报》1992年9月8日的一篇报道“润物细无声(记北京市特级教师孙维刚)”的第一自然段。所报道的是我第二轮实验班(1986～1992年)的情况。

第三轮实验班的情况又如何呢？

“中学数学特级教师孙维刚创下一个纪录——

他当班主任的北京22中高三(1)班，全班40人，1997年高考百分之百上了录取线，38人上重点线，有22人考入北京大学、清华大学，占全班总人数的55%，这在全市各校的统计中是绝无仅有的。而六年前，这40名来自工薪阶层家庭的子弟入初中时，26人达不到区重点中学的录取分数线，14人是就近入学的‘大拨轰学生’。”

这是《北京日报》1997年9月10日第六版的整版报道“特级教师孙维刚”的第一自然段，由于1991～1992学年我同时带第二和第三两轮班，所以，第三轮班(1991～1997)在1997年7月中学毕业。

特别是，这轮班的闫珺同学，1996年7月夺得了第37届国际数学奥林匹克的金牌，为祖国争得了荣誉。

北京22中是一所非重点中学，面对学生来源并不十分理想的现实，从1980年起，我在各级领导和同志们的帮助下，进行了六年一循环的数学教育改革实验。从初一接新生，教数学兼班主任，直到学生高三毕业，全面落实党的教育方针，努力使学生德智体全面发展，大幅度提高学生素质。这个素质，首先是思想品德素质，同时是紧密结合的智力素质，是以思维水平为核心的智力素质。从数学课来说，在第三轮班的中学六年，我基本没留过硬性家庭作业，从未收过作业，考试极少，又由于别的科目的老师留作业量也很少，因而使同学们每天晚上9点半左右就可以睡眠，优秀生则在9点左右睡眠。即使上高三后，大多数学生也能保证9个小时左右的睡眠，这种做法保持了学生清醒的头脑和旺盛的精力，使他们不是以题海战术取胜，而是以高水平的思维使难题迎刃而解。更重要的是这种良好的习惯为学生将来进一步的学习和深造，为他们毕生事业的成功打下了坚实的基础。

1986年秋初一入学的第二轮班，当年入学成绩排北京市东城区第8位(小学升中学，是按区考试的)。三年后，在1989年全国初中数学联赛北京赛区一、二等奖的共15名得奖者中，本班占了7名。又过三年，在全国高中数学联赛北京赛区的一、二等奖的共15名得奖者中，本班占了4名，并且是第1、4、7、9这4个靠前的名次。实验班的彭壮壮同学，1991年赴美探亲，随即在全美数学竞赛中考入前25名(由于不是美国公民也不是永久居留者，未能获得美国奥林匹克数学国家集训队资格，不能参加集训和进一步选拔)，1992年初，他又以一篇数学论文“ON SOLVING FRACTIONS REPRESENTED BY P－ADIC INTEGERS”及答辩，获美国 Westinghouse Science Talent Search Contest 奖(西屋寻找科学天才竞赛，是一年一度美国高中学生最高规格竞赛)，十多家报纸杂志报导了这一消息并刊登照片，他被哈佛大学免试录取。

第三轮班，不但夺得了国际数学奥林匹克的金牌，同时，在 1996～1997 年度全国高中数学联赛中，获一等奖 5 人，二等奖 3 人，三等奖 6 人，高考时数学平均分为 117 分，这个分高出当年北京市任何一所中学的校平均分。这个班高考五科总分平均分为 558.67 分，而在当年升中学时，全班 2/3 的学生成绩低于区属重点中学的录取线。我是不是只抓了数学，挤了别的科目？以上事实已经作出回答。

那么，是什么原因，促成了学生的进步呢？

客观条件上，实验班的工作，得到了北京 22 中校长的领导和支持，三轮实验班的全体老师：张振良老师、何启真老师（政治），金润芝老师、李向前老师、李锦文老师、关益成老师（语文），娄宁老师、聂影梅老师、贾桂芳老师、隋志伟老师（物理），董爽老师、邹法瑜老师（化学），蒋倩梅老师、姚远老师、费松丽老师、徐崇孝老师、韩春英老师（英语），周宝兰老师、景文老师、华亚铃老师（体育），肖尧望老师、周强老师（生物），王青梅老师、宋立真老师（历史），王淑芳老师、李式娴老师（地理），他们不但业务造诣很深，而且热爱学生，热爱教育事业，使整个教师集体和学生集体心心相印、息息相通、血肉相连。

东城区教育局、区委、区政府，北京市教育局，一直关怀我们实验班的工作，许多著名教师，如陶晓勇等常常来班讲学，使学生受益匪浅。

主观上，实验班一贯重视把对学生的思想教育落到实处，教育学生勤奋学习、积极进取，做诚实、正派的人，立志为人民多作贡献。

另外，师生共同在探索一个新的思路，一套崭新的数学学习方法。

本书，就是要向读者介绍这套方法。

这套方法，首先是指导思想上的新认识，而后，才是由此而产生和由它所决定的具体做法。本书的第一篇“怎样学好高中数学”，就是介绍上述认识和方法。结合实例，边叙边议。阅读本书时要两者兼顾，既不要光看条条，也不能只读举例。一定请读者结合例题，认真体会所介绍的思想和方法的真谛。

学习方法产生于具体数学内容的学习过程中，其价值在于促成高水平的学习。为此，在本书第二篇“高中数学各章学习指要”的每一章中，都分为“学习指导”和“解题思考方法小结”，这主要是着眼于本章知识的联系和规律，进行简要分析，帮助读者深入认识知识本质，并能做到切实掌握；总结本章题目内容有关特点，学会归纳解题思路。在写法上，凡课本上已写出的定义、定理、公式及解题方法，均不再重复。议叙分析一般从简，多数情况不再配以例题。

为了避免造成读者浮光掠影，收益受限，本书第一篇第 4 章中分别举例，就如何学习概念，如何学习定理、公式，如何学习和小结一个单元，如何总结一章习题的解题思考方法，做了示范，请读者细读消化之后，能运用到第二篇的各章，依照“学习指导”和“解题思考方法小结”所列出的纲目，结合课本和习题，依照第一篇第 4 章，写出深入详细的分析和总结。这是请读者一定要完成的作业。

本书修订后，还增加了第四篇“解题思考分析的再示范”。

我们反对题海战术，反对让学生通过大量考试、大量做题以成为做题的“熟练工”，而去对付考试应试教育的做法，这种做法不但与我们的教育方针相悖，而且损害学生健康，使学生思维僵化，其结果只能是劳民伤财，于国于民不利。

但是要学好数学，不做题是不行的。题要精彩，做题不在多而在精；对待做题的思想认识和方法要对头，要通过做题，深刻理解概念，扎实掌握基本知识，学会运筹帷幄、纵横捭阖，使自己的思维

水平不断上升，高屋建瓴，只有这样，学生在面对千变万化、面目各异的题目时，才能做到胸有成竹、应付自如，使一道道的难题“落花流水”。当然，这里最关键的是学生形成了系统的解题思考规律。在“解题思考分析的再示范”中，我们对此将作典型的示范。

鉴于篇幅的限制，本书各章之后不再编配习题，请读者在完成上述作业的基础上，选择质量好的习题集，检验自己的解题思考方法，以便提高解题技巧。同时，对新发现的不足之处要及时进行修正。这种循环往复、螺旋式上升的过程，会使自己的思维方法的水平以及能力的水平扶摇直上。

目　　录

第一篇　怎样学好高中数学

第1章　热爱数学,学好数学 …… (1)
一、热爱数学,是学好数学的前提与途径 …… (1)
二、学好数学,需"醉翁之意不仅在酒" …… (2)
第2章　站在系统的高度学习 …… (4)
一、理解概念要深入本质,注意抓住知识之间的联系 …… (4)
二、在类比中发现和谐,简化记忆 …… (5)
第3章　把知识的学习、能力的培养、素质的发展与完善有机地结合起来 …… (7)
一、主动学习 …… (7)
二、注意学习、积累和掌握数学方法与思想 …… (10)
第4章　各类知识学习方法示范 …… (21)
一、概念与基础知识的学习 …… (21)
二、公式、定理的学习 …… (32)
三、一个单元的学习与小结 …… (34)
四、一个数学方法(数学归纳法)的学习和小结 …… (47)
五、一个思考方法的学习和小结 …… (55)
第5章　学会做题 …… (65)
一、题不求多,但求精彩 …… (65)
二、讲究做题的方法 …… (66)
第6章　学会复习 …… (75)
一、培养做小结的习惯和能力 …… (75)
二、有效地进行高中数学总复习 …… (83)

第二篇　高中数学各章学习指要

I　重要概念、基础知识、方法、思想 …… (86)

一、有关命题的知识 …… (86)
二、充分条件和必要条件 …… (86)
三、数学归纳法 …… (86)
四、反证法 …… (86)
五、同一法 …… (89)

六、换元法 …… (90)
七、列方程组的方法 …… (92)
八、待定系数法 …… (93)
九、配方法 …… (95)
十、转化归结思想 …… (96)
十一、动的思想方法——换个角度看问题 …… (96)
十二、对称的观点和思想 …… (96)
十三、数形结合的方法 …… (96)

Ⅱ 高中代数 …… (97)

第7章 幂函数、指数函数和对数函数 …… (97)
一、学习指导 …… (97)
二、解题思考方法小结 …… (100)
第8章 三角函数、三角变换、反三角函数与三角方程 …… (103)
一、学习指导 …… (103)
二、解题思考方法小结 …… (105)
第9章 数列与数学归纳法 …… (110)
一、学习指导 …… (110)
二、解题思考方法小结 …… (111)
第10章 不等式 …… (119)
一、学习指导 …… (119)
二、解题思考方法小结 …… (121)
第11章 复数 …… (124)
一、学习指导 …… (124)
二、解题思考方法小结 …… (126)
第12章 排列、组合、二项式定理 …… (128)
一、学习指导 …… (128)
二、解题思考方法小结 …… (129)

Ⅲ 微积分初步 …… (134)

第13章 极限 …… (134)
一、学习指导 …… (134)
二、解题思考方法小结 …… (135)

Ⅳ 立体几何 …… (137)

第14章 直线和平面 …… (137)
一、学习指导 …… (137)
二、解题思考方法小结 …… (139)

第 15 章　多面体和旋转体 …… (142)
一、学习指导 …… (142)
二、解题思考方法小结 …… (144)

V　平面解析几何 …… (146)

第 16 章　直线 …… (146)
一、学习指导 …… (146)
二、解题思考方法小结 …… (148)
第 17 章　圆锥曲线 …… (150)
一、学习指导 …… (150)
二、解题思考方法小结 …… (151)
第 18 章　坐标变换 …… (153)
一、学习指导 …… (153)
二、解题思考方法小结 …… (153)
第 19 章　参数方程、极坐标 …… (154)
一、学习指导 …… (154)
二、解题思考方法小结 …… (156)

第三篇　学 会 考 试

一、做好应考前的准备 …… (158)
二、学会在考场上科学应对 …… (158)
三、养成检验习惯,积累检验方法,提高检验能力 …… (159)
四、分析一份综合练习,看对待难题的态度和方法 …… (159)

第四篇　解题思考分析的再示范

一、示范一 …… (172)
二、示范二 …… (181)
三、示范三 …… (183)
四、示范四 …… (189)
后记 …… (195)

第一篇　怎样学好高中数学

第1章　热爱数学，学好数学

一、热爱数学，是学好数学的前提与途径

要完成任何一番事业，首先要热爱它，只有这样，才会满腔激情、全身心地投入，聪明才智、灵感悟性一齐涌上心头，铺平成功之路．这是人人皆知的道理．

但是，数学凭什么让人“爱”？

近两年来，我接到过上百封信，希望了解怎样才能学好数学，这些信北京和其他省市的都有，不但来自中学生，还来自许多家长．

广大中学生希望学好数学，他们的父母也都希望自己孩子的数学“棒”！为什么呢？

做家长的谁不望子成“龙”，成为祖国四化建设栋梁之材！但成“龙”之路怎么走？一些人认为，必须要升高中、上大学，甚至考硕士、当博士．而每每考试，数学总首当其冲，必考，又最难；况且，数学又是许多课程的基础，应用广泛，于是，尽管数学十分枯燥，拼命也得学好．

我不怀疑，伟大目标，将为刻苦学习数学带来巨大的力量，但是能否学好，这里就大有文章了．

因为，被迫地刻苦学习，有如捏住鼻子灌药，咽下去，又可能呕吐出来．近来，许多苦口良药外面裹上了糖衣，大概就是要避免这种遗憾吧！

如果拼命去学的动力，是发现了数学的美，为数学本身的魅力所吸引，则将如美味佳肴，凭它的色香味，使人油然升起强烈的向往．这才是美好数学的沧桑正道．

但是，数学是美味佳肴吗？它的色香味在哪里？

数学的美，是由它的高度严谨和合理而达到的和谐，这是一种令人神怡的内在和谐．

举个小小的例子．

小学生开始学习除法，老师说：把一个量分成若干等份，求其中“1份”那个量（一倍量）的运算叫除法．这样，孩子便产生了一个想法：商肯定不会大于被除数！

可是后来，6米$\div\frac{1}{2}=12$米，商怎么大于被除数呢？不可思议！只好死记：这是分数除法法则中“颠倒相乘”的结果．于是，

$$6\text{米}\div\frac{1}{2}=6\text{米}\times\frac{2}{1}=12\text{米}.$$

其实，把一个量分成若干等份，可以换言为：一个量（指被除数）如果是“1份”那个量的若干倍，除法，就是去计算那个“1份”是多少．于是，在本例中，6米即是那个“1份”的$\frac{1}{2}$倍，那么“1份”当然

应该是 6 米 $\div \frac{1}{2}=12$ 米了.

这样,在寻求彼此孤立的现象统一解释的过程中,对一个概念(除法)的认识不知不觉地深化了.

事情并未到此结束,从这里继续想下去.由于 6 米还可以是那个"1 份"的$\frac{1}{20}$倍,$\frac{1}{200}$倍,$\frac{1}{2000}$倍,…,这时,那个"1 份"就是 120 米,1200 米,12000 米,…,越来越大.可以想见,对于 $6\div a$,当$a\to 0$时,$6\div a$将无限地增长,由于 $a\to 0$ 可以从正、负两个方向进行,所以,$6\div a$ 也将向正或负两个方向无限增大.记做,当 $a\to 0$ 时,$\frac{6}{a}\to\pm\infty$.这时,我们就从小学算术,经过初中代数、高中代数,而达到高等数学的边缘了.因为,我们从中对高等数学的极限问题,获得了初步的感性认识.

当然,再深入一步,又会产生新的疑问,$a\to 0$ 在数轴上,是趋向于一个点,而$\frac{6}{a}\to\pm\infty$,却是背道而驰的两个方向.这怎么统一呢?

在非欧空间中统一这个矛盾现象,并非难事,当然,这远远超出了中学的范围.

这样的例子,数学中俯拾皆是.而这种寻求联系、统一的过程,不仅令人兴趣盎然,也是学好数学的正确途径.这样就能置知识于系统中,从系统的高度去理解、去把握每一个概念,着眼于并掌握每个环节的内涵和它与它以外事物的关联,以及相互联系中的规律.

这样学习,将能扎实地掌握知识.因为,得到的知识是具有结构的整体.不仅如此,由于总是着眼于联系的发现和规律的研究,一方面,养成了联想的习惯;另一方面,经常需要从本质上认识事物,逐步形成较深刻的观点,从而提高了能力,完善了素质.这其实是学习数学的重要目的.因为,近年有人提出,数学不但是研究现实世界的存在形式和数量关系的科学,数学还要研究人类的存在形式和人类思维的模式.

当然,伴随着能力的提高,素质的发展,学习效果必不可同日而语了.

二、学好数学,需"醉翁之意不仅在酒"

据说,爱因斯坦曾对一位朋友说:"我有一位朋友,他是一位才子,他认为,当一名学生毕业离开老师和学校时,如果把几年来所学的功课全部忘记了(当然,这是不可能的),这时,他所剩下的,才是这所学校和他的老师的教学及教育的实在成果."

都忘光了,谈何成果?不可思议.

细想之下,令我折服.这段话的意思是,教学和教育的真谛在育人,在学生能力的提高,素质的发展和完善.

那么,作为学生,不是也应该有同样的理解和认识吗!自己的目标,当是通过学习知识来学习思考,学会分析和解决问题,培养和提高自己的能力,发展和完善自己的素质,把自己变得更加聪明,实现了这个目标后,无论是继续进一步的学习,还是指导实践,都会干出突出的成就.

这就是说,学习的是知识,但"醉翁之意不在酒(知识)",而在能力、素质的发展.

但是,能力和素质的追求,实现于学习知识的过程中,离不开知识.而且,掌握知识,是进学校的初衷.所以,应该全面地认识"醉翁之意不仅在酒"的深刻道理.

怎样才能实现上述的目标?

就学习数学而言，要掌握以下几个方面：学习任何知识，都要从系统的角度出发，着眼于知识的联系和规律，发掘其本质，注意数学思想的渗透和哲理观点的升华；为此，要经常进行总结，善于比较和区别，学习知识要总结，做题也要经常总结，一题多解，多解归一，多题归一，有所发现，有所创造，有所前进；从而，在主动学习中，实现扎实掌握知识、提高自己能力、完善自己素质的目标.

本书第一篇，将分别就以上几个方面，进行详细地讲解.

第2章　站在系统的高度学习

一、理解概念要深入本质，注意抓住知识之间的联系

中学课程的每一门学科，都有自己的基本概念、基础知识，即通常所说的双基. 它们不仅本身有着广泛的应用，而且，对于其他知识有着较大的甚至规定性的影响，所以，掌握好它们，就成为十分必要的了.

但是，怎样才算把它们抓住了？背得滚瓜烂熟，是没有多大价值的. 重要的是，理解它们，才能掌握和应用它们. 那么，怎样才算理解呢？字面上弄懂仅仅是第一层次，还必须弄清它和它以外事物的关联，从本质上融会贯通，这当然应该从系统的角度去分析认识它们了.

举个例子.

有一次，我曾对一所高中数学奥林匹克学校的学生提出一个问题：

请你写出，命题"直角相等"的否命题.

居然，在数百名数学学习的尖子生中，几乎没有人能正确作出回答. 他们异口同声地答道：所求否命题是，"不是直角不相等."

问他们，根据是什么？他们说，一个命题的否命题，就是在原命题的题设和结论的前面，分别添上"不是"两个字.

多么表面和肤浅的理解！

因为，所谓添上"不是"二字，只是形式. 它的实质，是要把原来的说法否定，就是写出原来说法的反面情况.

原来题设的反面情况是什么呢？

$\angle 1,\angle 2,\angle 3,\cdots,\angle n$ 都是 90° 的反面情况，既包括它们都不是直角，也包括它们之中有的角是直角，有的角不是直角，一言以蔽之，应当说，$\angle 1,\angle 2,\angle 3,\cdots,\angle n$ 不都是直角.

同样地，$\angle 1,\angle 2,\angle 3,\cdots,\angle n$ 都相等的否定，应当是，不都相等.

这样，所提问题的正确回答应当是，"不都是直角的角，不全相等."

同学们所犯错误的根源，即在于，对于"不是"的理解只求表面现象，不抓实质.

其实，这个错误，不仅暴露了同学们对"否命题"概念的理解还停留在表面上，而且，对于"补集"概念的理解，也没有抓住实质.

如果，记 $\angle 1=90^\circ$ 为 A_1，$\angle 2=90^\circ$ 为 A_2，$\angle 3=90^\circ$ 为 A_3，$\cdots$，$\angle n=90^\circ$ 为 A_n，那么，$\angle 1,\angle 2,\angle 3,\cdots,\angle n$ 都是直角，就可表示为 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n$，那么，它的补集是 $\overline{A_1\cap A_2\cap A_3\cdots\cap A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\cup\cdots\cup\overline{A_n}$，意思就是，$\angle 1\neq 90^\circ$，或，$\angle 2\neq 90^\circ$，$\cdots$，或 $\angle\infty=n\neq 90^\circ$，换言之，$\angle 1,\angle 2,\cdots,\angle n$ 不都是直角.

类似地可以得到：$\angle 1=\angle 2$，并且，$\angle 1=\angle 3$，并且 $\angle 2=\angle 3,\cdots,\angle(n-1)=\angle n$. 它的补集是，$\angle 1\neq\angle 2$，或 $\angle 2\neq\angle 3$，或 $\angle 1\neq\angle 3$，$\cdots$，或 $\angle(n-1)\neq\angle n$，即 $\angle 1,\angle 2,\angle 3,\cdots,\angle n$ 不都相等.

由此看来，无论是在理解"否命题"这个概念，还是在理解"补集"这个概念时，如果能抓住它们的实质，上述错误都可避免. 不仅如此，还将发现，在课本上，相距"迢迢"的两个概念("否命题"出现

在初中《几何》中,“补集”出现在高中代数中),竟然互相沟通了起来.

挖掘知识之间的联系,会使我们加深对每个知识的理解,它,多么重要!

二、在类比中发现和谐,简化记忆

数学,是中学课程中的一门主科,课时最多,内容浩瀚,记忆和掌握起来,都比较困难.

站在系统的高度,注意比较知识间的联系和区别,不但有利于抓住问题本质,而且可以找出规律即共性,简化记忆,便于掌握.这也是因为,联系、规律、和谐,正是数学科学的本来面目.

举一个例子.

如果在学习初中代数正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 的图像时,注意到函数的图像是随函数解析式中常数 k 的不同而不同,换言之,k 决定着图像直线的位置.在这里,k 的符号,决定着直线所在象限的位置;$|k|$ 则决定着直线向上方向和 y 轴正向夹角的大小.而当 k 值遍取 $(-\infty,+\infty)$ 上的全体实数时,直线 $y=kx$ 则绕原点旋转而扫遍除 y 轴以外的整个坐标平面(若允许 $k=0$).

这样,后来学习二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 时,可以事先就猜想,是否常数 a 的取值将决定曲线 $y=ax^2$ 的位置?结果发现 a 的符号决定着曲线所在象限的位置情况;$|a|$ 则决定着曲线与 y 轴的相对位置情况;当 a 值跑遍在 $(-\infty,+\infty)$ 上的全体实数时,曲线 $y=ax^2$ 将扫过除 y 轴之外的整个坐标平面.那么,这将在入门伊始,就抓住了学习二次函数的关键,使得利用二次函数求最大(小)值,解一元二次不等式等一系列问题,不难得到解决.

当然,由于 $y=ax^2$ 的图像是一条曲线,$|a|$ 在决定曲线与 y 轴相对位置的时候,已经影响了曲线的形状.

升入高中,学习幂函数 $y=x^a$,在同样思想的指导下,不难发现,仍是常数 a 决定着曲线 $y=x^a$ 的位置和形状.当然,由于常数的位置发生了变化,从系数的位置,移动了指数的位置,那么,常数 a 的符号,已不再决定曲线所在象限的位置情况,而是决定曲线通过 $(0,0)$ 点还是 $(1,1)$ 点;$|a|$ 则决定着曲线在 x 取定某个值时,曲线的曲率情况.但有一方面又是类似的,即 a 跑遍在 $(-\infty,+\infty)$ 上的实数时,曲线扫遍除直线 $x=1$ 以外的整个第一象限.

以上的两次类比,启发我们去想像,函数解析式中的常数,可能总是以某种分类方式(按符号分类,是以 0 作为界点的分类)来影响着函数图像曲线的某种持征,而且,当这个常数跑遍它所允许范围内的每个实数时(是连续取值),图像曲线总是扫遍某个区域.

对于指数函数 $y=a^x(a>0$,并且 $a\neq1)$,由于 $a>0$,我们以 1 作分类的界点.当 $a>1$ 时,函数图像曲线呈上升状态;当 $0<a<1$ 时,曲线呈下降状态;$|a|$ 较大时,则在曲线的高于直线 $y=1$ 的部分,较靠近 y 轴正向;$|a|$ 较小时,则在曲线的高于 $y=1$ 的部分,比较远离 y 轴正向.抓住了这几点,以及曲线都在 x 轴上方并且通过 $(0,1)$ 点,那么,熟记指数函数的各种性质,将易如反掌.

例如,由于曲线都在 x 轴上方,当然,$y>0$,如图 2-1 所示.

又如,$0<a<1$ 时,曲线呈下降状态,当然函数 $y=a^x$ 为减函数,如图 2-2 所示.又由于,曲线通过 $(0,1)$ 点,当 $x<0$ 时,$y>1$;当 $x>0$ 时,$y<1$,如图 2-2 所示.这样掌握和记忆指数函数的性质,当然比单纯死记用列表法写出的性质表,要好得多了.

关于对数函数 $y=\log_a x(a>0$,并且 $a\neq1)$ 中常数 a 作用的讨论,与对于指数函数中 a 的讨论十分相似,请读者自己动手完成.

上述这种讨论,对于高中数学中所学习的最后一种函数——三角函数,同样是有益的.

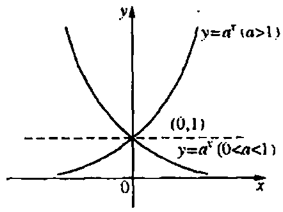


图 2-1

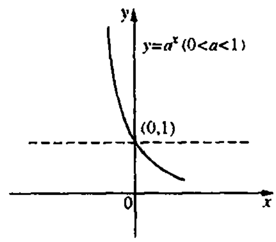


图 2-2

例如，在 $y=a\sin(\omega x+\varphi_0)$ 中，有三个常数：ω,φ_0,a.

比较 $y=\sin\omega x$ 与 $y=\sin x$，$|\omega|$ 大于 1 或是小于 1，决定着 $y=\sin|\omega|x$ 是对曲线 $y=\sin x$ 在原点处固定后，沿 x 轴向两方进行压缩或伸长变换；而 ω 的符号，则决定着曲线 $y=\sin\omega x$ 是否由曲线 $y=\sin|\omega|x$ 以 x 轴为对称轴，作翻转变换.

对于常数 a,φ_0，也可以作类似的分析，请同学们自己动手去完成.

上述讨论，从对函数解析式中常数作用的类比分析，使我们对函数性质的认识系统化了.

甚至，对于等差数列、等比数列，也可以做类似的讨论.

因为，数列 $\{a_n\}$ 可以看做是以 n 为自变量的一种函数（离散型函数），那么，在等差数列 $a_n=a_1+(n-1)d$ 的图像中，常数 a_1，是排头兵的高度，而常数 d 的符号和绝对值，就对于图像的点列是呈上升还是下降的状态，以及点列中相邻两点的高度差，起着决定作用. 在等比数列中，也有类似的分析，请读者完成.

回顾上面的类比和总结，它使代数中许多分散的知识，统一在一个认识之下，这种系统化的结果，加深了理解，简化了记忆.

顺便说一句，从对解析式中常数的某种分析入手，分析相应曲线的特征，是一个常用的方法，不仅适用于代数，我们还可举个解析几何的例子：

在分析坐标平面上的线段的定比分点公式时发现，对于 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$，当 λ 从 $-\infty\to+\infty$ 遍取全体实数时，分点 P 跑遍 P_1P_2 直线，如图 2-3 所示.

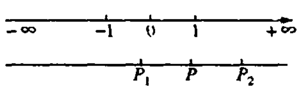


图 2-3

当 $\lambda=0$ 时，P 点和 P_1 点重合；当 λ 由 $0\to1$ 时，P 点由 P_1 向 P_1P_2 的中点移动；当 $\lambda=1$ 时，P 点在 P_1P_2 的中点上；当 λ 由 $1\to+\infty$ 时，P 点由 P_1P_2 的中点向 P_2 移动，从 P_2 的左侧，无限接近 P_2；而当 λ 由 $-\infty\to-1$ 时，P 点从 P_2 的右侧无限接近 P_2，沿 P_1P_2 的方向，向无穷远方移动；当 λ 从无限接近 -1 的 -1 右侧向 0 连续取值时，P 点则从沿 P_2P_1 方向的无穷远方移向 P_1，直至 $\lambda=0$ 时，P 再次回到 P_1 上.

这个讨论还使我们发现，整个过程是一个从实数集（λ 取值）到点集直线 P_1P_2（P 点位置）上的一一映射，这样几何和代数又融合到一起了.

并且，在这里又出现了本篇第 1 章例子中所出现的有趣现象：当 λ 往两个相反方向趋向无穷远时，P 点在直线 P_1P_2 上，却从两个方向无穷趋近于一点 P_2；当 P 点在 P_1P_2 直线上往两个相反方向趋向无穷远时，λ 则在数轴上从两个方向无穷趋近于一点 -1. 不言而喻，解释这个乍看矛盾、细想合理的有趣问题，当然又超出了中学数学的范围，而要到非欧空间中了.

上面两个例子表明，抓住知识之间的联系和规律学习数学，是深入到数学王国去的好方法.