经济应用数学

主编 杨慎辉 涂努民
副主编 张新越

中山大学出版社

经济应用数学

主　编　杨慎辉　涂努民
副主编　张新越

中山大学出版社

(粤)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/杨慎辉 涂努民主编．－广州：中山大学出版社，1994 年 7 月－ISBN 7-306-00933-8

Ⅰ 经济应用数学
Ⅱ 杨慎辉 涂努民
Ⅲ ①数学 ②经济应用数学
Ⅳ O29

责任编辑：章 伟 责任校对：张礼凤
封面设计：朱霭华
中山大学出版社出版发行
（广州市新港西路 135 号）
中山大学印刷厂印刷 广东省新华书店经销
*
850×1168 毫米 32 开本 16.25 印张 39 万字
1994 年 7 月第 1 版 1994 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—8000 册 定价：12.00 元

前　言

《经济应用数学》是为高等财经院校专科编写的教材，可供财经类专科院校、管理干部学院、职工大学财经类专业选作教材或教学参考书，也可作为有关专业干部专修科或短训班的教学用书。

本教材由广东商学院、五邑大学、广东农工商管理学院、广州对外贸易学院、广东省青年干部学院部分教师参加编写。在编写过程中，充分考虑财经类专科特点，力求选材深浅适度、联系经济实际．每章附有习题，并在书后给出习题答案。

全书由李志强（第一章）、杨慎辉（第二章）、贾佩国（第三章）、周传世（第四章）、张妙燕（第五章）、张少霞（第六章）、李宁（第七章）、何文汉（第八章）、张新越（第九章）、涂努民（第十、十一章）参加编写。由杨慎辉、涂努民任主编，张新越任副主编。

郝同壬教授为本书审稿，广东商学院有关同志为本书的完成和出版给予支持和帮助，谨表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，错误和不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1994 年 4 月

目　　录

第一章 函　　数

函数是微积分研究的对象，是高等数学重要概念之一。我们有必要从一般的角度重温和进一步学习函数的概念及有关内容，建立经济学中的常用函数。本课程在实数范围内研究函数。

§1.1　实数

（一）实数与数轴

人们认识数是由低级到高级，由简单到复杂逐步发展的：首先是自然数，后来发展到有理数(即正负整数，正负分数及 0)，后来又发展到无理数(如 π，$\sqrt{2}$ 均是无理数)。有理数可以表示为分数 $\frac{p}{q}$，无数理不可以表示为分数 $\frac{p}{q}$，其中 p、q 均为整数，$q \neq 0$。

分数可以用有穷小数或无穷循环小数表示，反之有穷小数或无穷循环小数也可用分数表示。因此，有理数为有穷小数或无穷循环小数，而无理数为无穷不循环小数。

如果在一直线上确定一点为原点，标以 0，指定一个方向为正方向，规定一个单位长度，则称这样的直线为数轴，如图 1-1。

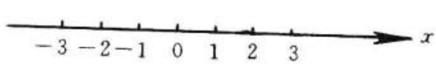


图 1-1

数轴是实数的直观图形，全体实数与数轴上的点存在着一一对应的关系，即任一实数都对应数轴上唯一一点，数轴上每一点都唯一地代表一个实数。如果数轴上的点 A 与实数 a 相对应，我们便说点 A 是实数 a 的象，实数 a 是点 A 的坐标。以后我们把"实数"与"数轴上的点"两种说法看作有相同的含义，而不加以区别。

实数有如下一些主要特征：

(1) 实数具有稠密性、连续性

任意两个实数，必存在一个实数居于它们之间，实数充满整个数轴而且没有空隙。

我们可以推出，任意两个实数之间都有无穷多个实数，而且有无穷多个有理数，也有无穷多个无理数。在数轴上看，任意两点无论它们多么接近，它们之间总有无穷多个点。

(2) 实数具有有序性

任意两个实数 a、b，必满足且仅满足下述三个关系之一：

$a<b$, $a=b$, $a>b$。

在数轴上看，任何两个不同的实数 a、b，在数轴上沿正方向都有先后次序，要么 a 在前，要么 b 在前。

(3) 实数对于四则运算具有封闭性

对任意两个实数施行加、减、乘、除(除数不为 0)，运算后的结果仍为实数。

(二) 绝对值

实数 a 的绝对值定义为：

$$|a|=\begin{cases} a & a\geqslant 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

任一实数 a，在数轴上必有唯一一点 a 与之相对应，那么实数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离。绝对值有如下一些性质：

(1) $|a|=|-a|\geqslant 0$；当且仅当 $a=0$ 时，有 $|a|=0$

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

(3) $|a|>h, h>0$ 等价于不等式 $a>h$ 或 $a<-h$，

$|a|<h, h>0$ 等价于不等式 $-h<a<h$；同样

$|a|\leqslant h, h>0$ 等价于不等式 $-h\leqslant a\leqslant h$

(4) 对任意实数 a、b，有不等式

$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

此不等式称为三角不等式。

(5) $|a\,b|=|a|\cdot|b|$

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$. $(b\neq 0)$

这些性质的证明并不难，读者可以自己证明，这里仅给出性质4的证明。

由性质(2)知，$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$

相加得　$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant(|a|+|b|)$

由性质(3)知它等价于　$|a+b|\leqslant|a|+|b|$　(＊)

在(＊)中将 b 改为 $-b$，$|a-b|\leqslant|a|+|b|$

因此得到性质(4)右半部分 $|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

另，$|a|=|(a-b)+b|$，由(＊)式得

$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$，移项得

$|a|-|b|\leqslant|a-b|$　　(＊＊)

再将(＊＊)中 b 改为 $-b$，得 $|a|-|b|\leqslant|a+b|$

因此得到　$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|$

综合以上我们得到

$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

这样，我们完全证明了性质(4)。

(三) 区间

设 a、b 为实数，且 $a<b$

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的开区间，记作 (a,b) 见图1-2。即

$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$

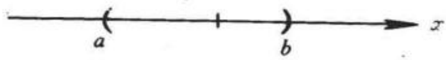


图 1-2

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$ 见图 1-3。即

$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$

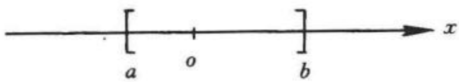


图 1-3

(3) 满足不等式 $a<x\leqslant b$（或 $a\leqslant x<b$）的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的半开区间，记作 $(a,b]$（或 $[a,b)$），分别见图 1-4 和图 1-5。即

$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$

$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$

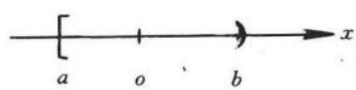


图 1-4　　图 1-5

以上三类区间为有限区间，$b-a$ 称为区间的长度。

另外还有几类无限区间。

(4) $(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$

$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\}$

(5) $(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$

$(-\infty,b)=\{x \mid x\leqslant b\}$

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$

（四）邻域

满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数称为 a 的 δ 邻域，记为：

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}，或 U(a)。$$

满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的全体实数称为 a 的空心邻域，记为：

$$U^0(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}，或 U^0(a)。$$

点 a 的空心邻域和邻域的差别在于 a 的空心邻域不包含点 a。

§1.2 函数

（一）常量与变量

在研究自然现象以及社会实践活动中，人们会遇到许多不同的量，如时间、长度、体积、速度、质量、力等，有些量在某一过程中只取同一数值，我们称这些量为常量，有些量可以取不同的一些值，我们称这些量为变量。如自由落体运动中，重力加速度始终保持不变，是常量，而位移、时间是变化的，有不同的值，因而是变量。

一个变量的所有可能的取值的集合称为该变量的变域。

常量可以看作变量的特殊情形，常量可以看成变域只有一个元素的变量。

（二）函数

在研究自然界或是社会现象时，我们往往不是孤立地研究一个常量或变量，而多是研究两个或多个变量共同变化时它们之间的相依关系。这种共同变化的一些变量在现实生活中是屡见不鲜的，它们不能同时（在各自的变域中）各取任意的值，如果已给定其中一变量的一个具体的值，则另一个变量的值也跟着确定，例如：

(1) 圆的面积 S 与圆的半径 R 有如下关系，$S=\pi R^2$，当半径

R 确定了某一个值时，圆的面积 S 就跟着被唯一确定了一个值。

(2) 某种商品的价格和该商品的产量有关系 $P=100+\frac{2000}{Q}$，当产品的产量确定后，由此关系式，商品的价格也就相应确定了。由该关系式可以看出，当某种商品产量增大时，该种商品的价格相应下降。

定义 1.1　设在某一变化过程中有两个变量 x、y，如果对于变量 x 的变域 D 中的任意一个值，依照某一法则或规律 f，变量 y 都有唯一确定的一个值与之相对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x), x\in D$

其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量．自变量 x 的变域 D 叫做函数的定义域，也可以记作 $D(f)$，y 的对应值称为函数值，函数值的全体，称为函数的值域，记作 Z 或 $Z(f)$。

在上例中，例(1)中面积 S 是半径 R 的函数。例(2)中，价格 P 可看作是产量 Q 的函数。

确定一个函数，需要三个条件，函数的定义域，对应规则以及值域。但只要定义域和对应规则确定了，函数的值域也就相应确定了。因此，定义域和对应法则是确定函数关系的两个要素。只要两个函数的定义域和对应法则都相同，那么这两个函数就相同。只要定义域或对应规则之一不相同，那么这两个函数就不相同。

例 1　比较函数 $f(x)=x$，与 $g_1(x)=\sqrt{x^2}$ 以及 $f(x)=x$，与 $g_2(x)=(\sqrt{x})^2$，他们是否为相同的函数，为什么？

$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$g_1(x)$的定义域也为$(-\infty,+\infty)$，是相同的，但 $g_1(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，即 $f(x)$与 $g_1(x)$的对应规则不同，所以 $f(x)$与 $g_1(x)$不是相同的函数。

$g_2(x)$的定义域为$[0,+\infty)$，所以 $f(x)$与 $g_2(x)$的定义域不同，因而 $f(x)$与 $g_2(x)$也不是相同的函数，尽管他们在$[0,+\infty)$内对应规则是相同的。

对于由数学表达式表示的函数，我们有时省略定义域的说明，此时函数的定义域可以看成是使该函数的数学表达式有意义的所有自变量的值的集合：例如。

$y=\sin x$ 的定义域为：$(-\infty,+\infty)$。

$y=\dfrac{1}{1-x}$的定义域为：$x\neq 1$。

$y=\sqrt{x-2}$的定义域为：$x\geqslant 2$。

（三）函数的表示法

表示函数的方法主要有以下三种。

(1) 解析法

借助于数学表达式给出函数的对应规则，称这种表示函数的方法为解析法。例如：

$$y=\sin x+\cos x \qquad (-\infty,+\infty)$$

$$y=\frac{1}{1+x^2} \qquad (|x|<1)$$

$$y=\ln x+x \qquad (x>0)$$

$$y=x^2-2x+3 \qquad (x>1)$$

以上均为解析法表示的函数。今后我们研究的函数绝大多数就是这种由解析法表达的函数。

有时函数不能用一个解析式表达，而是在定义域的不同部分分别用不同的解析式表达，这样的函数称为“分段函数”，如函数：

$$y=\begin{cases} x & 0\leqslant x<1 \\ x^2 & 1\leqslant x<\infty \end{cases}$$

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$ 都是分段函数。

$y=3-|x-1|$也可用分段函数形式表为：

$$y=\begin{cases} 4-x & x\geqslant 1 \\ 2+x & x<1 \end{cases}$$

(2) 列表法

如果用一张表格来表达自变量 x 与函数值 $f(x)$的对应关系，

称这种函数的表示方法为列表法。例如：

货船船头下部一般都有表示货船吃水深度的吃水线，货船吃水越深，说明排水量越大，相应地，货船的装载量亦越大。因而货轮的排水量可以看作吃水深度的函数。

某货轮吃水深度与排水量间的对应关系可用下表表示：

表 1-1

吃水深度（米）	3	4	5	6	7	8	9
排水量（吨）	5 020	7 225	9 275	11 475	13 750	16 125	18 525

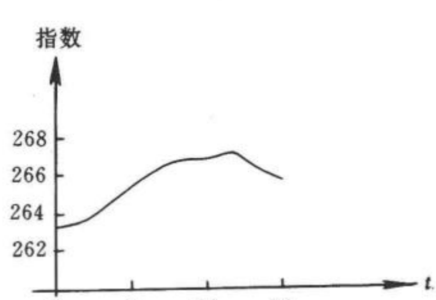
根据此表，如果知道了吃水深度，就可以知道货船的排水量。

另外，我们常用的平方根表，立方根表，三角函数表，对数表，都是用列表法表达函数的例子。

显然列表法的优势在于求函数值比较快捷方便，但是表中没有列出的自变量的值所对应的函数值不易求得，只能用相邻的值去近似推得，精确度不高。

(3) 图象法

对于函数 $y=f(x)$，$x\in A$，我们把坐标平面上的点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in A\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图象，由图象给出函数的对应法则的方法称为图象法。如股市综合指数可以看作是时间的函数 $Z=Z(t)$，下图就是某日股市指数从上午 8 点至 11 点的变化情况。



图象法直观，易于从总体上掌握函数的情形，因此应用较为广泛。

（四）函数值

在函数 $y=f(x)$ 中，若自变量 x 取定一个值 x_0，通过对应法则，与 x_0 相对应的因变量 y 的值 y_0，称为函数 $f(x)$ 在 x_0 的函数值，记为：$f(x_0)$。

定义 1.1 规定了对 $x\in D$ 的每一个值，y 都有唯一确定的值与之对应。我们称这种函数为单值函数。如果对 x 的每一个值，y 都有多个值与之对应，则称这样的函数为多值函数。本书一般只讨论单值函数。

§1.3 函数的几种性质

（一）函数的奇偶性

设函数为 $y=f(x)$，定义域 D 为对称于原点的数集，即当 $x\in D$ 时，有 $-x\in D$。

(1) 若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数，如：$y=x^3$，$y=\sin x$ 均为奇函数。

(2) 若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数，如：$y=x^2$，$y=\cos x$，$y=\frac{1}{1+x^2}$ 均为偶函数。

奇偶函数的图象具有明显的特征，对于偶函数，由于有 $f(-x)=f(x)$，因此若 $(x,f(x))$ 是函数图象上的点，则 $(-x,f(x))$ 也是函数图象上的点，即偶函数的图象上总有点 $(-x,f(x))$ 和 $(x,f(x))$，而 $(-x,f(x))$ 与 $(x,f(x))$ 是关于 y 轴对称的点，因此整个偶函数的图象是关于 y 轴对称的，如 $y=x^2$（见图 1-6）。

对于奇函数，有 $f(-x)=-f(x)$，因此，若 $(x,f(x))$ 是函数

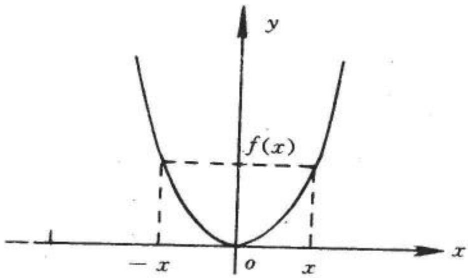


图 1-6

图象上的点，$(-x,-f(x))$也是函数图象上的点，即奇函数的图象上总有点$(-x,-f(x))$和$(x,f(x))$，而$(-x,-f(x))$和$(x,f(x))$是关于原点对称的点，因而整个奇函数的图象是关于原点对称的，如 $y=x^3$（见图 1-7）。

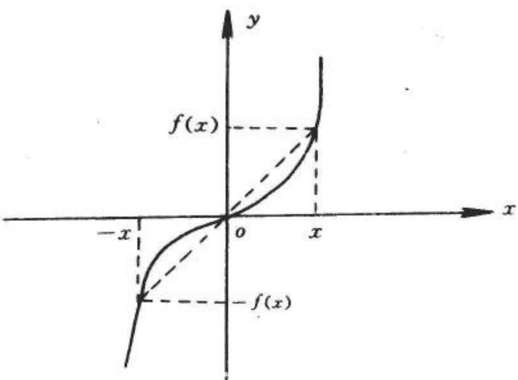


图 1-7

（二）函数的周期性

函数 $y=f(x)$，定义域为 D，如果存在一个正数 k，使关系式：$f(x\pm k)=f(x)$对于 D 内所有的 x 恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，称 k 为该函数的一个周期。显然如果 k 为 $y=f(x)$的一个周期，则 $2k,3k,\cdots nk,\cdots$都是 $y=f(x)$的周期。

∵若 k 为 $f(x)$的周期，则有