中等专科学校通用教材

中专数学教程

第一册

主编　吴　坚　陈士屏

上海交通大学出版社

中等专科学校通用教材

中专数学教程

第一册

本册主编　赵大公

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本教程系适用于各类中等专科学校通用的数学教程。全书共分四册，第一册的主要内容为集合与函数、三角及排列组合、二项式定理等。可供招收初中毕业生的中等专科学校各专业作为教材使用，也可供职业高中选用。

中专数学教程

第一册

上海交通大学出版社出版、发行

上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030

全国新华书店经销

上海交通大学印刷厂 · 印刷

开本：850×1168（毫米）1/32 印张：8.75 字数：227000

版次：1997 年 5 月 第 1 版 印次：1997 年 5 月 第 1 次

印数：1-4800

ISBN 7－313－01811－8/O·113 定价：10.50 元

前　言

为了适应中专为主体的我国中等职业技术教育的改革需要，构造以通用基础课程加模块式的专业课程为特征的新型课程体系，上海交通大学出版社陆续出版了中等专科学校基础课系列教程。《中专数学教程》就是其中之一。

本套《中专数学教程》面向新世纪，以培养高素质的服务于21世纪的初中级专业人才为宗旨，编写中以国家教委1991年审定的工科类专业《中等专科学校数学教学大纲》和正在修订的财经类《中等专科学校数学教学大纲》为根据，突出应用性，强调通用性，确保先进性，注意与现行9年制义务教育的数学基础相衔接，适当渗透数学建模思想。

本套教程共分四册，其中第一、第二册内容包括代数、三角、空间图形和平面解析几何；第三册的内容为一元函数微积分。第一、第二、第三册可作为各类中专学校通用教材。

考虑到各专业对数学的需求侧重面之不同，第四册分甲、乙两种版本。甲种本可供工科类学校选用，内容包括常微分方程、行列式与矩阵、概率与统计、级数及积分变换；乙种本可供非工科类中专学校选用，内容包括矩阵与线性方程组、线性规划简介、投入产出简介、概率论初步及数理统计初步。

针对数学学科的教学特点，本教程精心配置了适量的习题。考虑到地域、专业类别和生源基础差异诸因素，每章习题分A、B两组。A组习题着重于巩固大纲要求的基本知识点；B组习题侧重于数学知识的综合运用，且适当增加了难度，故B组习题可供各校教师教学中灵活取舍。另外，正文中有“*”者的内容，教学中也可灵活取舍。

为了有利于教学，我们同时编写了本套教材的《教学参考书》，可供教师在教学中参考。

安徽农业大学吴坚和合肥电力学校陈士屏担任本套教程的主编，安徽省邮电学校赵大公、合肥电力学校丛山、合肥物价学校杨光慎、合肥电力学校臧永翠和安徽农业大学张长勤分别担任各分册主编。统稿工作由陈士屏（第一、第二、第三册）、吴坚（第四册甲、乙版本）担任，全书由中国科学技术大学博士生导师苏淳教授担任主审。

在编写过程中，曾得到安徽省教委职教处、安徽省中专数学教学研究会的大力支持和帮助，在此一并致谢。

由于编者的水平所限，加之编写的时间仓促，编写过程中缺点错误在所难免，恳请各地读者和教师不吝指正。

主编

1997年1月

目　录

第一章　集合与数制

集合是近代数学中最基本,最重要的概念之一。同学们在初中已经接触到“集合”这个词,如“不等式的解集合”,“圆是到定点距离等于定长的点的集合”等。但是,什么是集合?集合之间有什么关系?集合之间有什么运算?这些问题并没有解决。这一章我们将讨论有关集合的基本知识,回答这些问题。另外还将介绍与普及计算机知识有关的数制和布尔代数的部分内容。

§1.1　集合

一、集合的基本概念

俗话说“物以类聚”,我们时常根据需要将事物分类,以便分析同类事物的共性以及和不同类事物间的区别与联系。我们看几个实例:

(1)某学校的所有的微型计算机;

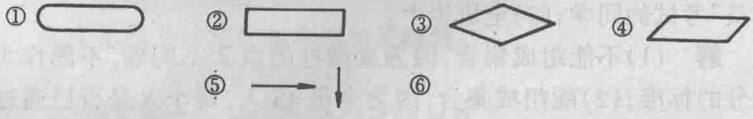
(2)在上海交易的所有股票;

(3)方程 $x^2-3x-4=0$ 的解;

(4)全国省会城市;

(5)所有的一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$;

(6)编制计算机程序常用的流程图符号:



①起止框,②一般处理框,③判断框,④输入(出)框,⑤流程线,⑥连接点。

以上各组虽然涉及的对象各有不同，但都是把具有某种特性的事物归为一组，看成一个整体以区别于其他事物。这就抽象出数学中的集合概念。

我们把集合描述为："具有某种特性的事物全体"叫**集合**(简称集)。前面列举的六个实例中的事物都分别组成了集合。集合一般用大写字母 A、B、C…来表示，集合中的每一个事物称为**元素**，元素一般用小写字母 a、b、c…来表示。a 是集合 A 的元素，则用 $a\in A$ 来表示，读作"a 属于 A"，如果 b 不是集合 A 的元素，则表示为 $b\notin A$，读作"b 不属于 A"。

按照集合的描述，集合应具有：

(1)确定性。已知一个集合 A，对于任意元素 a 是否属于 A 是确定的，唯一标准就是 a 是否具有集合 A 的特性，判定过程如图 1.1 所示。

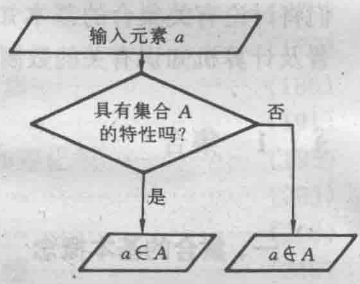


图 1.1

(2)无序性。只关心集合中元素的组成，并不需考虑各元素在集合中的排列顺序。

如由 1,2,3 三个数组成的集合，与由 2,1,3 三个数组成的集合是没有区别的。

(3)互异性。只强调集合是由哪些不同的元素组成，相同的元素只用一个作"代表"就够了。所以不说由 1,2,2,3 组成的集合，而只说由 1,2,3 组成的集合。

例 1.1 某班有男生 30 人，女生 15 人，试说明下述人员能否组成一个集合。(1)全班成绩好的同学；(2)全班已通过"计算机操作员"考试的同学；(3)全班男生。

解 (1)不能组成集合，因为成绩好的概念不明确，不能作为区分的标准；(2)能组成集合，因为全班 45 人，每个人是否已通过"计算机操作员"考试是明确的，这个集合就是由已通过"计算机操

作员"考试的那些同学组成;(3)"男生"是明确的特性,能组成集合。

二、集合的分类

集合可以按它含有的元素特点来分类。

由数组成的集合称为**数集**。如不等式 $|x|<1$ 的解集,就是满足 $-1<x<1$ 的实数 x 组成的数集。

由平面(或空间)的点组成的集叫**点集**。如圆心在坐标原点,半径为 1 的圆周上的点组成的集合(见图 1.2)。

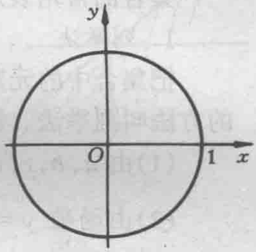


图 1.2

下列数集是我们经常遇到的:

由所有自然数组成的集合称为**自然数集**(记为 N)。

由所有整数组成的集合称为**整数集**(记为 Z)。

由所有有理数组成的集合称为**有理数集**(记为 Q)。

由所有实数组成的集合称为**实数集**(记为 R)。

为方便,常用 Q^+ 表示正有理数集,用 R^- 表示负实数集等。

集合也可按其所含元素的多少来分类,含有有限个元素的集合叫做**有限集**。

如:①某商店的商品品种组成的集;

②京九铁路沿线各车站组成的集;

③小于 5 的自然数组成的集。

特别是仅含一个元素的集合又称**单元素集**。

如:①由"中国"组成的集;

②数"0"组成的集。

含有无限个元素的集合叫做**无限集**。

如:①天上的星星组成的集;

②不等式 $2x<3$ 的解组成的集合。

为了方便，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**(记为 $\varnothing$)。

如：①方程 $x^2+x+1=0$ 的实根组成的集；

②内角和小于 360° 的凸四边形组成的集。

显然，空集是唯一的。

三、集合的表示

集合的常用表示方法有两种：列举法和描述法。

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫列举法。例如：

(1)由 a,b,c,d 组成的集合记为 $\{a,b,c,d\}$；

(2)由函数 $y=2x$, $y=\frac{x}{2}$, $y=2x+2$ 组成的集合记为 $\{y=2x, y=\frac{x}{2}, y=2x+2\}$；

(3)由数“0”组成的集合记为 $\{0\}$。

注意 (1)$0\in\{0\}$, $0\notin\varnothing$；

(2)无限集也可用列举法，如自然数集 N 可表示为 $\{1,2,3,4\cdots\}$。

2. 描述法

把集合中的元素共有的特性描述出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫描述法。例如：

{直角三角形}、{小于 6 的自然数}。

我们时常在大括号内先写出元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线右边写上这个集合的元素的共有特性。如：(1) $\{x\mid |x|>3\}$；(2) $\{(x,y)\mid y=x\}$。分别表示：(1)数轴上到原点距离大于 3 的所有点所表示的数组成的集。常称点集 $\{x\mid |x|>3\}$；(2)坐标满足方程式 $y=x$ 的所有点组成的集合，常称点集 $\{(x,y)\mid y=x\}$。

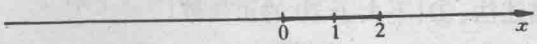
例 1.2 (1)将点集 $\{x\mid |x-1|\leqslant 1\}$ 在数轴上表示出来；(2)

用直角坐标平面内的点表示点集

$$\{(x, y) \mid y \leqslant x\}。$$

解 (1)由 $|x-1| \leqslant 1$ 得 $-1 \leqslant x-1 \leqslant 1$

所以 $$0 \leqslant x \leqslant 2;$$



(2)函数 $y=x$ 的图像为直线，直线下方的点 (x, y) 满足 $y<x$，所以，点集 $\{(x, y) \mid y \leqslant x\}$ 表示的区域是含有直线 $y=x$ 及其下方的点组成的半平面(阴影部分)。(图 1.3)

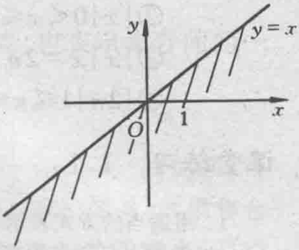


图 1.3

例 1.3 方程组 $\begin{cases}2x+3y=13 \\ 3x-2y=0\end{cases}$ 的解集为

(1) $\left\{\text{方程组}\begin{cases}2x+3y=13 \\ 3x-2y=0\end{cases}\text{的解集}\right\}$；

(2) $\{x=2, y=3\}$；

(3) $\{2, 3\}$。

问以上三种表示方法是否正确？为什么？

解 上述三种表示方法均不正确。

(1)用描述法表示集合时在括号{ }内只写元素的共同性质，不能在{ }内写成具有某种性质的元素的集合。应当写成 $\left\{\text{方程组}\begin{cases}2x+3y=13 \\ 3x-2y=0\end{cases}\text{的解}\right\}$。

(2) $\{x=2, y=3\}$ 表示以方程 $x=2, y=3$ 为元素的集合，不表示方程组 $\begin{cases}2x+3y=13 \\ 3x-2y=0\end{cases}$ 的解集，应当写成 $\left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{array}{l}x=2 \\ y=3\end{array}\right\}$。

(3) $\{2, 3\}$ 表示元素为 2，3 的集合，2 与 3 无顺序要求，应当写成 $\{(2, 3)\}$。

从这个例子可以知道，同一个集合的表示方法可以不同，但是

揭示元素的特性是一致的。

例 1.4 用几种不同的集合表示形式来表示“不大于 10 的正偶数”所组成的集合。

解 (1)列举法：$\{2,4,6,8,10\}$

(2)描述法：①{不大于 10 的正偶数}

② $\{x \mid 0<x\leqslant 10 \quad x \text{ 为偶数}\}$

③ $\{x \mid x=2n \quad 1\leqslant n\leqslant 5, n\in Z\}$

④ $\{2n \mid 1\leqslant n\leqslant 5, n\in N\}$

课堂练习 1.1

1. 用适当的方式表示下述各集合：

(1)数轴上与原点距离小于 1 的点所表示的数；

(2)坐标平面内与原点距离小于 1 的点集；

(3)所有的偶数；

(4)非负数；

(5)指南针、火药、造纸术、印刷术；

(6)方程 $x^2+x+1=0$ 的实数解；

(7)相反数等于本身的数；

(8)不等式 $|x-a|<b$ 的解集；

(9)所有一元二次方程；

(10)半径等于 1 的圆。

2. 下列对象的全体能否构成集合：

(1)非常难听的音乐；

(2)某班第一学年数学总评 80 分以上的学生；

(3)优秀的足球运动员；

(4)存贮器、控制器、运算器、输入设备和输出设备。

3. 在____处填上记号“∈”或“∉”：

-1 ____ N， 0 ____ N， $\frac{1}{2}$ ____ Q， π ____ Q

$\sqrt{2}$ ____ R， -2 ____ R^-， $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ____ R， 0 ____ $\{\varnothing\}$

4. 判断题：

(1)方程 $(x-1)^2(x+2)=0$ 的解集是 $\{1,1,-2\}$； ( )

(2)正实数组成的集合可表示为 $\{x>0\}$； ( )

(3)正方形 ∈ {四边形集合}； ( )

(4)整数和分数组成的集合记为$\{Q\}$；　( )

(5)$\sqrt{3} \notin Z$。　( )

5. 试用集合表示不等式$|x-2|>3$的解集(至少三种方式)。

§1.2 子集、交集、并集、补集

以下概念既是由集合派生出来的新概念，也表示集合间的一些运算。

1. 子集

分析集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 与集合 $B=\{a,b,c\}$ 的关系，可以看出集合 B 中的任何元素均在集合 A 中。我们定义：如果集合 B 中的任何一个元素都属于集合 A，则称 B 是 A 的**子集合**(简称**子集**)。记作 $B \subseteq A$(或 $A \supseteq B$)，读作"B 包含于 A"(或 A 包含 B)。

在常见的数集间显然有

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

因为集合 A 中的任何一个元素，当然属于集 A，所以有 $A \subseteq A$。

规定　空集是任何集合的子集，即 $\varnothing \subseteq A$。

如果 B 是 A 的子集，并且 A 中至少有一个元素不属于 B，那么集合 B 叫做集合 A 的**真子集**，记作 $B \subset A$(或 $A \supset B$)。

如：$A=\{x \mid |x|<2\}$ 与 $B=\{x \mid |x|<1\}$。

集 B 是集 A 的真子集，$B \subset A$。

如果 A 不是空集，那么显然有 $\varnothing \subset A$，说明空集是任何非空集合的真子集。

为了直观表示集合间的关系，我们经常画一个圆(或一条封闭的曲线)用其内部的点来表示一个集合，这样表示集合的图形也称为文氏(Venn)图。

如图 1.4 表示：$B \subset A$。

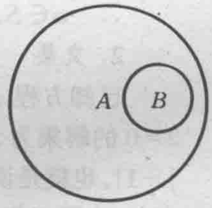


图 1.4

注意　用圆内部的点表示集合，以及集合与集合间的关系只是示意的，形象直观。并非集合中的

元素就是圆内的点，文氏图与平面直角坐标系无关，应和平面点集 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 区别清楚。

用勾股定理容易证明，平面直角坐标系内两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 之间的距离 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。所以，点集 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 表示以原点为圆心，R 为半径的圆周上和圆内的所有点组成的集合。

对于两个集合 A 和 B，如果 $B\subseteq A$，且 $A\subseteq B$，则称集 A 和集 B 相等，记为 $A=B$，读作“A 等于 B”。

图 1.5 给出判定 $A=B$ 的过程。

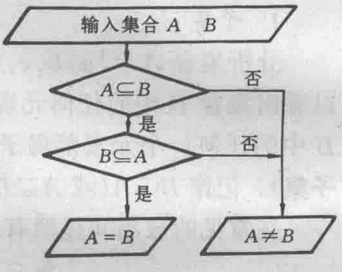


图 1.5

例 1.5 写出集合 $\{0,1,2\}$ 的所有子集及真子集。

解 集合 $\{0,1,2\}$ 的所有的子集是 $\varnothing$、$\{0\}$、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{0,1\}$、$\{0,2\}$、$\{1,2\}$、$\{0,1,2\}$，其中 $\varnothing$、$\{0\}$、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{0,1\}$、$\{0,2\}$、$\{1,2\}$ 是真子集。

例 1.6 $S=\{x|x=14m+36n,\ m、n\in Z\}$，$T=\{x|x=2k,\ k\in Z\}$，求证：$S=T$。

证明 设 b 为 S 中任一元素，$b=14m+36n=2(7m+18n)=2k$ $(\because m、n\in Z, 7m+18n=k\in Z)$。

$\therefore$ $b\in T, S\subseteq T$ 又设 a 为 T 中任一元素 $a=2k=(-5\times 14+36\times 2)k=14(-5k)+36\times 2k=14m+36n$

$(\because -5k=m\in Z, 2k=n\in Z)$，

$\therefore$ $a\in S, T\subseteq S$ $\therefore$ $S=T$。

2. 交集

已知方程 $x^2-2x-3=0$ 的解集为 $A=\{-1,3\}$，方程 $x^2-x-2=0$ 的解集为 $B=\{-1,2\}$，那么两方程的公共解的集合为 $C=\{-1\}$，也就是说公共解集 C 是由 A、B 集所有相同元素组成。我们定义：由属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集 A 与集 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，(读作 A 交 B)，即 $A\cap B=\{x|x\in A,$

且 $x\in B\}$。

图 1.6 中 A, B 两集重叠部分表示 $A\cap B$。

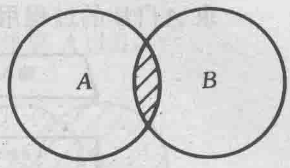


图 1.6

图 1.7 给出判定 $C=A\cap B$ 的过程。

求交集的运算称为**交运算**。

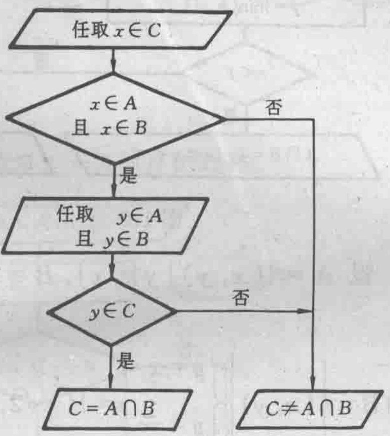


图 1.7

对于任何集合 A、B 的交集有如下关系:

(1)$A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cap B=B\cap A$;

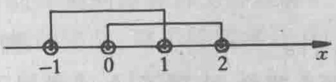
(2)若 $A\subseteq B$,有 $A\cap B=A$;同样地若 $B\subseteq A$,有 $A\cap B=B$;

(3)$A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$。

例 1.7 设 $A=\{x|0<x<2\}, B=\{x||x|<1\}$,求:$A\cap B$。

解 $B=\{x||x|<1\}=\{x|-1<x<1\}$,

$A\cap B=\{x|0<x<1\}$。



一般 $A=\{x|a<x<b\}, B=\{x|c<x<d\}$。

求 $A\cap B$ 的过程用图 1.8 表示：

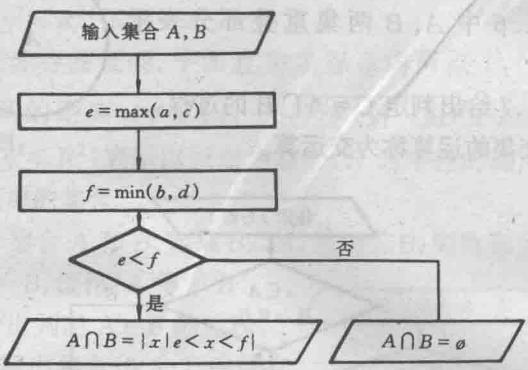


图 1.8

例 1.8 设 $A=\{(x,y)\mid y=x\}$, $B=\left\{(x,y)\middle| y=\dfrac{2}{x}\right\}$, 求 $A\cap B$。

解 $A\cap B=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}y=x\\ y=\dfrac{2}{x}\end{cases}\right\}=\{(-\sqrt{2},-\sqrt{2}),(\sqrt{2},\sqrt{2})\}$。

例 1.9 已知点集 $A=\{(x,y)\mid |x|\geqslant 1,|y|\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid |x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2\}$ 在坐标平面内把集 A 表示的区域画出来。

解 见图 1.9。阴影部分，即为集 A 表示的区域(含边界)。

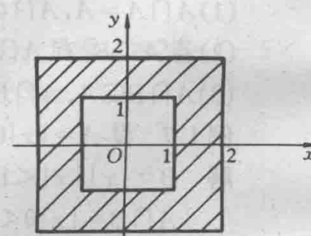


图 1.9

3. 并集

设集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{b,c,f,g\}$ 把 A、B 所有的元素合并在一起(相同的元素只取一个)可以组成一个新的集合：

$C=\{a,b,c,d,e,f,g\}$。

一般地，设 A、B 是两个集合，由属于 A 或者属于 B 的一切元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作“A 并