教育部高等农林院校理科基础课程

教学指导委员会推荐示范教材配套辅导教材

# 线性代数学习指导

## Guidance for Linear Algebra

梁保松　苏金梅　主编

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=4\\x_1-x_2+2x_3=5\\2x_1-x_2+x_3=3\end{cases}$$

中国农业大学出版社
ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

推荐示范教材
教育部高等农林院校理科教学指导委员会

教育部高等农林院校理科基础课程
教学指导委员会推荐示范教材配套辅导教材

# 线性代数学习指导

# Guidance for Linear Algebra

梁保松 苏金梅 主编

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4 \\ x_1-x_2+2x_3=5 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \end{cases}$$

中国农业大学出版社
·北京·

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数学习指导/梁保松,苏金梅主编.—北京:中国农业大学出版社,2010.2
ISBN 978-7-81117-936-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①梁…②苏… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 224504 号

**书　　名**　线性代数学习指导
**作　　者**　梁保松　苏金梅　主编

| | | | |
|---|---|---|---|
| **策划编辑** | 张秀环　董夫才 | **责任编辑** | 周艳华 |
| **封面设计** | 郑　川 | **责任校对** | 陈　莹　王晓凤 |
| **出版发行** | 中国农业大学出版社 | | |
| **社　　址** | 北京市海淀区圆明园西路 2 号 | **邮政编码** | 100193 |
| **电　　话** | 发行部 010-62731190,2620 | 读者服务部 | 010-62732336 |
| | 编辑部 010-62732617,2618 | 出　版　部 | 010-62733440 |
| **网　　址** | http://www.cau.edu.cn/caup | **e-mail** | cbsszs@cau.edu.cn |
| **经　　销** | 新华书店 | | |
| **印　　刷** | 北京时代华都印刷有限公司 | | |
| **版　　次** | 2010 年 9 月第 1 版　　2010 年 9 月第 1 次印刷 | | |
| **规　　格** | 787×1 092　16 开本　　14 印张　　340 千字 | | |
| **定　　价** | 23.00 元 | | |

**图书如有质量问题本社发行部负责调换**

**主　编**　梁保松　苏金梅
**副主编**　毕守东　蔡淑云　王小春
　　　　　吕振环　郑国萍　唐　彦
**编　者**　（以姓氏拼音为序）
毕守东（安徽农业大学）
蔡淑云（北华大学）
陈玉珍（河南科技学院）
吕振环（沈阳农业大学）
郭卫平（河北科技师范学院）
梁保松（河南农业大学）
石仁淑（延边大学）
苏克勤（河南农业大学）
苏金梅（内蒙古农业大学）
唐　彦（东北林业大学）
王国胜（河北科技师范学院）
王　瑞（河南农业大学）
王小春（北京林业大学）
王亚伟（河南农业大学）
陈忠维（沈阳农业大学）
赵营峰（河南科技学院）
郑国萍（河北科技师范学院）

# 教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
# 推荐示范教材编审指导委员会

**主　任**　江树人

**副主任**　杜忠复　程备久

**委　员**（以姓氏笔画为序）

王来生　王国栋　方炎明　李宝华　张文杰　张良云
杨婉身　吴　坚　陈长水　林家栋　周训芳　周志强
高孟宁　戚大伟　梁保松　曹　阳　焦群英　傅承新

# 教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
# 推荐数学类示范教材编审指导委员会

**主　任**　高孟宁

**委　员**（以姓氏笔画为序）

王来生　石　峰　卢恩双　吴　坚　杜忠复　张良云
杜晓林　孟　军　房少梅　梁保松　惠淑荣

# 出版说明

在教育部高教司农林医药处的关怀指导下，由教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会（以下简称“基础课教指委”）推荐的本科农林类专业数学、物理、化学基础课程系列示范性教材现在与广大师生见面了。这是近些年全国高等农林院校为贯彻落实“质量工程”有关精神，广大一线教师深化改革，积极探索加强基础、注重应用、提高能力、培养高素质本科人才的立项研究成果，是具体体现“基础课教指委”组织编制的相关课程教学基本要求的物化成果。其目的在于引导深化高等农林教育教学改革，推动各农林院校紧密联系教学实际和培养人才需求，创建具有特色的数理化精品课程和精品教材，大力提高教学质量。

课程教学基本要求是高等学校制定相应课程教学计划和教学大纲的基本依据，也是规范教学和检查教学质量的依据，同时还是编写课程教材的依据。“基础课教指委”在教育部高教司农林医药处的统一部署下，经过批准立项，于2007年底开始组织农林院校有关数学、物理、化学基础课程专家成立专题研究组，研究编制农林类专业相关基础课程的教学基本要求，经过多次研讨和广泛征求全国农林院校一线教师意见，于2009年4月完成教学基本要求的编制工作，由“基础课教指委”审定并报教育部农林医药处审批。

为了配合农林类专业数理化基础课程教学基本要求的试行，“基础课教指委”统一规划了名为“教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材”（以下简称“推荐示范教材”）。“推荐示范教材”由“基础课教指委”统一组织编写出版，不仅确保教材的高质量，同时也使其具有比较鲜明的特色。

**一、“推荐示范教材”与教学基本要求并行** 教育部专门立项研究制定农林类专业理科基础课程教学基本要求，旨在总结农林类专业理科基础课程教育教学改革经验，规范农林类专业理科基础课程教学工作，全面提高教育教学质量。此次农林类专业数理化基础课程教学基本要求的研制，是迄今为止参与院校和教师最多、研讨最为深入、时间最长的一次教学研讨过程，使教学基本要求的制定具有扎实的基础，使其具有很强的针对性和指导性。通过“推荐示范教材”的使用推动教学基本要求的试行，既体现了“基础课教指委”对推行教学基本要求的决心，又体现了对“推荐示范教材”的重视。

**二、规范课程教学与突出农林特色兼备** 长期以来各高等农林院校数理化基础课程在教学计划安排和教学内容上存在着较大的趋同性和盲目性，课程定位不准，教学不够规范，必须科学地制定课程教学基本要求。同时由于农林学科的特点和专业培养目标、培养规格的不同，对相关数理化基础课程要求必须突出农林类专业特色。这次编制的相关课程教学基本要求最大限度地体现了各校在此方面的探索成果，"推荐示范教材"比较充分反映了农林类专业教学改革的新成果。

**三、教材内容拓展与考研统一要求接轨** 2008 年教育部实行了农学门类硕士研究生统一入学考试制度。这一制度的实行，促使农林类专业理科基础课程教学要求作必要的调整。"推荐示范教材"充分考虑了这一点，各门相关课程教材在内容上和深度上都密切配合这一考试制度的实行。

**四、多种辅助教材与课程基本教材相配** 为便于导教导学导考，我们以提供整体解决方案的模式，不仅提供课程主教材，还将逐步提供教学辅导书和教学课件等辅助教材，以丰富的教学资源充分满足教师和学生的需求，提高教学效果。

乘着即将编制国家级"十二五"规划教材建设项目之机，"基础课教指委"计划将"推荐示范教材"整体运行，以教材的高质量和新型高效的运行模式，力推本套教材列入"十二五"国家级规划教材项目。

"推荐示范教材"的编写和出版是一种尝试，赢得了许多院校和老师的参与和支持。在此，我们衷心地感谢积极参与的广大教师，同时真诚地希望有更多的读者参与到"推荐示范教材"的进一步建设中，为推进农林类专业理科基础课程教学改革，培养适应经济社会发展需要的基础扎实、能力强、素质高的专门人才做出更大贡献。

**中国农业大学出版社**

2010 年 8 月

# 内 容 提 要

本书是与教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材《线性代数》(梁保松、苏金梅主编)配套使用的学习指导书。其主要内容有:行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型。

本书内容按章编写,每章分四个部分:内容提要、范例解析、自测题、考研题解析。

本书可作为学习指导书供学生使用,还可以作为教师参考书供教师使用,还可以作为考研复习书供考研者使用。

# 前　言

本书是教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材《线性代数》（梁保松、苏金梅主编）的配套使用教材。按照教指委创建精品课程和精品教材的要求，本书对总体框架进行了整合，内容按章编写，每章结构如下：

**一、内容提要**　此版块对每一章、节必须掌握的概念、性质和公式进行了归纳，供证明、计算时查阅。

**二、范例解析**　此版块对每章、节题型进行了分类解析，并对每种题型的解题思路、技巧进行了归纳总结，有些题给出了多种解法，对容易出错的地方还作了详尽注解。

**三、自测题**　此版块配置了适量难易程度适中的习题并给出了参考答案，所选题型是编者多年教学实践中积累的成果，供读者自测本章内容掌握的程度。

**四、考研题解析**　此版块涵盖了1987—2010年的考研试题，并作了详尽解答，供有志考研的读者选用。

本书在编写的过程中注意专题讲述与范例解析相结合，注重数学思维与数学方法的论述，以求思想观点、方法上的融会贯通。尤以“注意”的形式对相关专题加以分析和延拓，这是本书的特色。本书还具有概念清晰、内容全面、方法多样、综合性强等特点。

本书是编者在长期教学实践中积累的教学资料与经验之汇编，是在深入研究教学大纲与研究生数学考试大纲之后撰写而成的。我们期望本书不仅是广大学生学习数学的指导书、教师教学的参考书，而且也是报考硕士研究生者的一册广度与深度均较为合适的复习书，更期望能使读者在思维方法与解决问题能力等方面都有相当程度的提高。错漏之处，敬请各位同仁与朋友们斧正，我们不胜感激！

**编　者**

2010年6月

# 目录
# CONTENTS

Chapter 1 第 1 章

# 行列式

Determinant

## 内容提要

### 一、$n$ 阶行列式

1. 排列的逆序与奇偶性

**定义 1** 在一个 $n$ 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，若一个大的数排在一个小数的前面，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序个数的总和，称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

**定义 2** 一个排列中的某两个数 $i,j$ 互换位置，其余的数不动，得到一个新的排列. 对于排列所施行的这样的一个变换称为一次对换，用 $(i,j)$ 表示. 相邻两个数的对换称为邻换.

**定理 1** 一次对换改变排列的奇偶性.

**推论 1** 奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

**推论 2** $n \geqslant 2$ 时，全体 $n$ 级排列中，奇排列和偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

2. $n$ 阶行列式的定义

**定义 1** $n^2$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 $n$ 行 $n$ 列，称记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \tag{1}$$

为 $n$ 阶行列式，简记为 $D=\det(a_{ij})$ 或 $D=|a_{ij}|$. 其中 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对所有 $n$ 级排列求和.

(1)式的右边的每一项乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 中的每一个元素取自 $D$ 中不同行不同列. 当行下标按自然顺序排列时,相应的列下标是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 $n$ 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$,若是偶排列,则该排列对应的项取正号;若是奇排列,则取负号,用 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$ 表示. 行列式 $D$ 中共有 $n!$ 个乘积项.

## 二、行列式的性质

**性质 1** 行列式与它的转置行列式相等.

**性质 2** 交换行列式的两行(或两列),行列式改变符号.

**推论** 如果行列式有两行(列)完全相同,则行列式等于零.

**性质 3** 用一个数 $k$ 乘行列式,等于行列式某一行(列)的所有元素都乘以 $k$. 也可以说,如果行列式某一行(列)的元素有公因子,则可以将公因子提到行列式外面.

**推论 1** 如果行列式有一行(列)元素全为零,则该行列式等于零.

**推论 2** 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则这个行列式等于零.

**性质 4** 如果行列式的某一行(列)元素都可以表示为两项的和,则这个行列式可以表示为两个行列式的和.

**性质 5** 行列式的第 $i$ 行(列)元素的 $k$ 倍加到第 $j$ 行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

## 三、行列式按行(列)展开

**定义 1** 在 $n$ 阶行列式 $D$ 中任意取定 $k$ 行和 $k$ 列,位于这些行列交叉处的元素所构成的 $k$ 阶行列式叫做行列式 $D$ 的一个 $k$ 阶子式.

**定义 2** 在 $n$ 阶行列式 $D$ 中划去元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列的元素,剩余的元素按原次序构成的一个 $n-1$ 阶行列式,称为 $a_{ij}$ 的余子式,记为 $M_{ij}$. 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式,记为 $A_{ij}$. 即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

**定义 3** 在 $n$ 阶行列式 $D$ 中,任取 $k$ 行 $(i_1<i_2<\cdots<i_k)$ 与 $k$ 列 $(j_1<j_2<\cdots<j_k)$,将这些行与列相交处的元素按原来相对位置构成的 $k$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$$

称为该行列式的一个 $k$ 阶子式,记为 $N$. 划去这些行和列后所剩下的元素依次构成的一个 $n-k$ 阶子式,称为 $N$ 的余子式,记为 $M$. 称

$$A=(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}M$$

为 $N$ 的代数余子式.

**定理 1** 一个 $n$ 阶行列式 $D$,如果其第 $i$ 行(或第 $j$ 列)的元素除 $a_{ij}$ 外都为 0,则行列式 $D$ 等于 $a_{ij}$ 与它的代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

**定理 2** 行列式等于它的任一行(列)的所有元素与它们对应的代数余子式乘积的和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}A_{it} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{tj}A_{tj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

**定理 3** 行列式的某一行(列)的元素与另外一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

**定理 4(拉普拉斯定理)** 在 $n$ 阶行列式 $D$ 中,任取 $k$ 行(列),则由这 $k$ 行(列)元素所有的 $k$ 阶子式与其代数余子式的乘积之和等于行列式 $D$.

### 四、克莱姆法则

**定理 1(克莱姆(Cramer)法则)** 含有 $n$ 个未知量、$n$ 个方程的线性方程组,当其系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,有且仅有一个解

$$x_1 = D_1/|\boldsymbol{A}|, x_2 = D_2/|\boldsymbol{A}|, \cdots, x_n = D_n/|\boldsymbol{A}|.$$

其中,$D_j$ 是把系数行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 $j$ 列换为方程组的常数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所得到的 $n$ 阶行列式($j=1,2,3,\cdots,n$).

**定理 2** $n$ 个方程 $n$ 个未知量的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是方程组的系数行列式等于零.

## 范例解析

**例 1** 在 6 阶行列式 $D_6 = |a_{ij}|_{6\times 6}$ 中,证明 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 是 $D_6$ 的一项,并求这项应带的符号.

**解** 调换项中元素位置,使行下标为自然排列,得 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26} = a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}$. 此时右端列下标排列为 362415. 因为右端是位于 $D_6$ 的不同行不同列的 6 个元素的乘积,故它是 $D_6$ 的一项. 该项所带符号可由右端列下标排列的逆序数的奇偶性确定. 因 $\tau(362415)=8$,故所给项应带正号.

**例 2** 问 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$, $a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$ 是不是下列 4 阶行列式 $D_4$ 中的项. 若是应带什么符号?

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} \\ a_{21} & a_{32} & a_{23} & a_{34} \\ a_{31} & a_{14} & a_{42} & a_{43} \\ a_{12} & a_{41} & a_{13} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

**解** 注意到 $a_{ij}$ 的下标并不表示 $a_{ij}$ 在 $D$ 中的位置,不能形式地根据下标判别所给两项是不是 $D$ 中的项. 应根据这些元素实际在 $D_4$ 中所处位置的行下标,列下标来判定.

由于 $a_{11}$, $a_{22}$ 均位于 $D_4$ 的第一行,即为同行元素,$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 不是 $D_4$ 的项. 而 $a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$ 中 4 元素依次位于 $D_4$ 中的第 4,3,1,2 行,第 3,2,4,1 列. 因而它们是位于 $D_4$ 中不同行不同

列 4 个元素的乘积，故 $a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$ 是 $D_4$ 中一项，因 $\tau(4312)+\tau(3241)=5+4=9$，故这一项在 $D_4$ 中带负号.

**例 3** 一个 $n$ 阶行列式中等于零的元素的个数如果比 $n^2-n$ 多，则此行列式的值等于零，为什么？

**解** 根据行列式定义，行列式的每一项都是 $n$ 个元素的连乘积. 而 $n$ 阶行列式共有 $n^2$ 个元素，若等于零的元素个数大于 $n^2-n$，那么不等于零的元素个数就小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，因而该行列式的每一项至少含一个零元素，所以每项都等于零，故此行列式的值等于零.

**例 4** 求多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

中 $x^4$ 和 $x^3$ 项的系数.

**解** $f(x)$ 中含 $x$ 为因子的元素有 $a_{11}=5x, a_{21}=x, a_{22}=x, a_{33}=x, a_{41}=x, a_{44}=2x$. 因而，含有 $x$ 为因子的元素 $a_{ij}$ 的列下标只能取 $j_1=1, j_2=1,2, j_3=3, j_4=1,4$.

于是含 $x^4$ 的项中元素 $a_{ij}$ 的列下标只能取 $j_1=1, j_2=2, j_3=3, j_4=4$，相应的 4 元排列只有一个自然顺序排列 1234，故含 $x^4$ 的项为

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(-1)^0 5x\cdot x\cdot x\cdot 2x=10x^4.$$

含 $x^3$ 项中元素 $a_{ij}$ 的列下标只能取 $j_2=1, j_3=3, j_4=4$ 与 $j_2=2, j_3=3, j_4=1$. 相应的 4 元排列只有 2134，4231，含 $x^3$ 的相应项为

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{41}=-2x^3,\ (-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3x^3,$$

故 $f(x)$ 中 $x^3$ 的系数为 $-2-3=-5$，$x^4$ 的系数为 10.

**例 5** 计算下列行列式：

$$(1)D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix};(2)D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & 2 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & a & a & \cdots & a & 1 \end{vmatrix}.$$

**解** (1)$D_n$ 中第 1 行的元素相同，将其他各行改写成两分行之和，去掉与第 1 行成比例的分行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1+0 & 1+1 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+2 & \cdots & 1+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+(n-1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$=1\cdot 1\cdot 2\cdots(n-1)=(n-1)!.$

(2)$D_n$ 虽有第 1 列元素相同，但将其他各列写成两分列之和，使其一分列与第 1 列成比例，去掉成比例的分列后，并不能将行列式化简，因此自第 $n$ 列起，后列减去前列，再去掉与第 1 列成比例的分列，即得三角形行列式

$$D_n \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{c_{i+1}-c_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1-a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 0 & 1-a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a-1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a-2 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a-2 & -1 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a-2 & -1 & -1 & \cdots & -a & 0 \\ 1 & n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -a \end{vmatrix} = (-1)(-a)^{n-2} = (-1)^{n-1}a^{n-2}.$$

**例 6** 证明

$$D_4 = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

**证** 将 $D_4$ 的第 2、3、4 列展开，去掉与第 1 列成比例的分列，得

$$D_4 = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{去掉与第 2 列成比例的分列}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 4a+8 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 4b+8 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 4c+8 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 4d+8 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{去掉与第 3 列成比例的分列}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a & 2 & 4a \\ b^2 & 2b & 2 & 4b \\ c^2 & 2c & 2 & 4c \\ d^2 & 2d & 2 & 4d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{2、4 两列成比例}} 0.$$

**例 7** 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

**解** $D_n$ 的行、列的和都等于 $a+n-1$，先将各列加到第 1 列，再化成三角形行列式. 有

$$D_n=\begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a+n-1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}=(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

**例 8** 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$，求 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$. 其中 $A_{i2}$ 为 $D$ 中元素 $a_{i2}$（$i=1,2,3,4$）的代数余子式.

**解法一** 因 $A_{i2}$ 为 $D$ 中元素 $a_{i2}$ 的代数余子式（$i=1,2,3,4$），故将 $D$ 中第 2 列元素依次换为 3,7,4,8 即得

$$3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0.$$

**解法二** 因 3,7,4,8 恰为 $D$ 中第 3 列元素，而 $A_{12},A_{22},A_{32},A_{42}$ 为 $D$ 中第 2 列元素的代数余子式，故 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$ 表示 $D$ 中第 3 列元素与第 2 列的对应元素的代数余子式乘积的和，故 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=0$.