“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等教育电子信息类专业“十三五”规划教材

电磁场与电磁波(第4版)

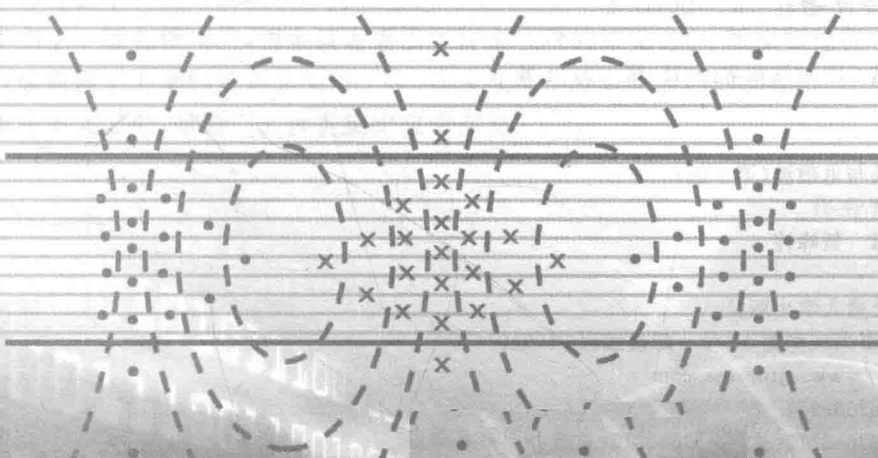
冯恩信 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等教育电子信息类专业"十三五"规划教材

电磁场与电磁波(第4版)

冯恩信 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

电磁场与电磁波是电子、信息类专业的一门技术基础课。本书介绍了宏观电磁场分布和电磁波辐射及传播的规律，以及电磁场与电磁波工程应用的基本分析和计算方法。本书内容包括数学基础，静态场和时变场 3 个部分，共 8 章。

本书是在 2010 年第 3 版的基础上重新修订而成的。这次修订，吸收了国内外同类教材的优点，继续保持了原来的体系结构和简明的风格，根据电子、信息和通信技术发展对本课程的新要求，以及对学生能力培养，加强基础和拓宽专业的要求，对各章节内容进行了适当调整，使内容符合电子与信息类专业的电磁场与电磁波课程的教学大纲要求。本版被教育部列为普通高等教育“十二五”国家级规划教材。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/冯恩信编著. —4 版. —西安：西安交通大学出版社，2015.8
普通高等教育“十二五”国家级规划教材
ISBN 978-7-5605-7649-7

Ⅰ.①电… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教材②电磁波-高等学校-教材 Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 162744 号

书　　名 电磁场与电磁波(第 4 版)
编　　著 冯恩信
责任编辑 屈晓燕　贺峰涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行部)
(029)82668315(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 陕西奇彩印务有限责任公司

开　　本 787mm×1092mm　1/16　**印张** 23　**字数** 557 千字
版次印次 2016 年 3 月第 4 版　2016 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-7649-7/O·509
定　　价 48.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

第 4 版前言

本教材自 1999 年第 1 次出版以来，承蒙广大读者青睐和西安交通大学出版社支持，已进行了 3 次修订。第 3 版被教育部列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材，新版被列为普通高等教育“十二五”国家级规划教材。本教材获得西安交通大学教材建设项目支持，并被列为学校规划教材。

本版修订保持了上一版的体系和主要特色，但将部分章节进行了调整，使内容更充实丰富，更紧凑流畅。如在第 1 章中增加了曲面坐标系中梯度、散度和旋度，使学生便于理解圆柱坐标和圆球坐标系中梯度、散度和旋度公式；修改了磁链概念部分以及磁路部分，使概念更清晰。对第 6.7 节中平面波垂直投射进多层介质中内容做了调整，将各层边界上的前向波和后向波关系用矩阵形式表示。为了使学生深入理解有关概念，增补了一些例题和习题。每 1 章后习题中的计算题在书后给出了答案，供读者在做题时参考，对于部分章节仍加注“*”号，以便于教师根据学时需要简化和取舍。

本书上一版在使用中，很多读者提出了许多宝贵的意见，这一版出版过程中西安交通大学出版社编辑做了大量的策划和编审工作，作者在此一并表示衷心的感谢。

书中不妥之处，敬请广大读者提出宝贵意见。

作者于西安交通大学

2015 年夏

第 3 版前言

本书是在 2005 年第 2 版的基础上重新修订而成的。这次修订，吸收了国内外同类教材的优点，继续保持了原来的体系结构和简明的风格。根据电子、信息和通信技术发展对本课程的新要求，以及对学生能力培养，加强基础和拓宽专业的要求，对各章节内容进行了适当调整，使内容更加符合电子与信息类专业的电磁场与电磁波课程的教学大纲要求。本版被教育部列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

电磁场与电磁波是电子、信息类专业的一门技术基础课。随着电子与信息科学技术的飞速发展，尤其是通信传输速率的迅速提高和带宽的不断增加、电子计算机时钟速率以及电子与电力设备密度的不断增加，要求电子、信息技术领域的科技工作者必须具备坚实的电磁场与电磁波理论基础知识。

本书介绍宏观电磁场分布和电磁波辐射和传播的规律，以及电磁场与电磁波工程应用的基本分析和计算方法。这些知识是从事电子、信息类专业的工程技术人员必备的。

本书包括数学基础，静态场和时变场 3 个部分，共 8 章。

第 1 部分是第 1 章矢量场，这一章内容包括矢量及矢量场、三种常用坐标系中的矢量场、梯度、散度、旋度、唯一性定理、格林定理，是电磁场内容的数学基础。

第 2 部分静态场包括静电场、恒定电流场和恒定磁场 3 章。第 2 章静电场包括电场强度、真空中的静电场方程、电位、静电场中的介质和导体、介质中的静电场方程、静电场的边界条件、电位的边值问题与解的唯一性、分离变量法、镜像法、电容和部分电容、电场能量、电场力。第 3 章恒定电流场内容包括电流密度、恒定电流场方程、恒定电流场边界条件、能量损耗与电动势、恒定电流场与静电场比拟。第 4 章恒定磁场内容包括磁感应强度、真空中的磁场方程、媒质磁化、媒质中的磁场方程、恒定磁场边界条件、磁路、电磁感应定律、电感、磁场能量、磁场力。

第 3 部分时变场包括时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波和电磁辐射与天线 4 章。其中第 5 章时变电磁场内容包括麦克斯韦方程、时变电磁场边界条件、波动方程与位函数、位函数求解、时变电磁场的唯一性定理、时变电磁场的能量和功率、正弦时变电磁场、正弦时变电磁场中的平均能量功率和复功率流密度和从麦克斯韦方程到基尔霍夫电压定律。第 6 章平面电磁波内容包括理想介质中的均匀平面波、导电媒质中的均匀平面波、群速、电磁波的极化、平面波垂直投射到理想导体表面、平面波垂直投射到理想介质界面、平面波垂直投射到多层媒质中、平面波斜投射到理想介质界面、平面波斜投射到理想导体界面和电磁波在等离子体中传播。第 7 章导行电磁波内容包括导波系统中的电磁波、TEM 波传输线、无耗传输线的工作状态、矩形波导、TE_{10} 波、导波系统中的传输功率与损耗和谐振腔。第 8 章电磁辐射与天线内容包括电流元的辐射场、小电流环的辐射场、对偶原理、发射天线的特性、对称线天线的辐射场、口径天线、天线阵、镜像原理、互易定理、接收天线的特性。

在采用本书作教材时，各章内容可根据学时取舍。下面列出建议的各章学时分配。

内　　容	学　　时
导言	1
矢量分析	6
静电场	13
恒定电流场	4
恒定磁场	8
时变电磁场	6
平面电磁波	10
导行电磁波	8
电磁辐射与天线	6
总学时	62

本书的出版得到西安交通大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于编者学识和水平有限，书中的错误和不妥之处在所难免，敬请使用本书的师生和读者批评指正，提出宝贵意见和建议。

编　者

目　录

第 1 章　矢量场

电磁理论中所涉及的一些主要物理量，如电场强度、磁感应强度等都是矢量。每一矢量有其确定的物理意义。电场和磁场分布在空间中形成矢量场。定量地分析矢量场在空间的分布和变化等性质需要借助一些数学工具，如矢量分析和场论等数学知识。为了后面各章学习方便，本章先介绍分析矢量场所需的有关数学基础知识。

1.1　矢量及其矢量场

1. 标量与矢量

只有大小、没有方向的量是**标量**，如温度、电位、能量、长度、时间等。

不但有大小，而且有方向的量称为**矢量**，又称**向量**，如力、速度、加速度等，电磁场中的许多物理量，如电场强度、电流密度、磁场强度等都是矢量。

2. 矢量的表示方法

在本书中，为了与其他量的符号相区别，矢量的数学符号用黑斜体字母表示，如 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$。矢量的大小也叫做矢量的模。矢量 $\mathbf{A}$ 的模记作 A 或 $|\mathbf{A}|$。矢量的方向可用单位矢量表示，单位矢量是模为一个单位的矢量，它仅表示矢量的方向。矢量 $\mathbf{A}$ 的单位矢量记作 $\hat{a}$，即一矢量的单位矢量用对应的小写字母上戴一角表示。任一矢量可以用它的模和单位矢量表示，如矢量 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = A\hat{a} \tag{1.1-1}$$

在几何上，矢量可用一有向线段表示，如图 1.1－1 所示。线段的长度代表矢量的大小，线段的方向表示矢量的方向。

为进一步描述矢量在空间的取向，可建立一正交坐标系，使矢量的始端在坐标原点，这样矢量就可以用它在坐标轴上的投影，即坐标分量来表示。

在直角坐标系中，有 3 个互相垂直的坐标轴，分别记为 x、y、z 轴，用 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$ 分别表示对应 3 个坐标轴方向的单位矢量，如图 1.1－2。正交坐标系有右手坐标系和左手坐标系。对于右手

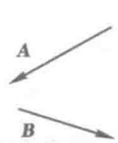
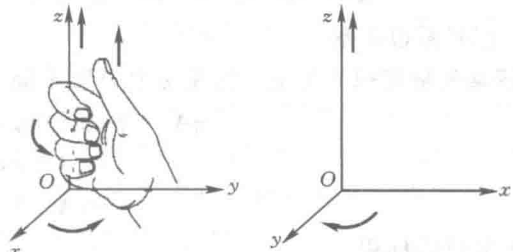


图 1.1－1　矢量的几何表示



(a) 右手坐标系　(b) 左手坐标系

图 1.1－2　正交坐标系

坐标系，用右手四指从 x 轴旋转到 y 轴方向，则拇指指向 z 轴方向，如图 1.1-2(a)所示，而如图 1.1-2(b)所示的坐标系符合左手旋转情况。在电磁理论中，习惯采用右手坐标系，因此在本书中均采用右手坐标系。

将矢量 $\boldsymbol{A}$ 放在直角坐标系中，使矢量 $\boldsymbol{A}$ 的起始端在坐标原点，设矢量 $\boldsymbol{A}$ 与3个正交坐标轴 x、y、z 轴的夹角(矢量的方向角)分别为 α、β、γ，矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x、y、z 3个坐标轴上的投影分别为 A_x、A_y、A_z，如图 1.1-3 所示，则在直角坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \tag{1.1-2}$$

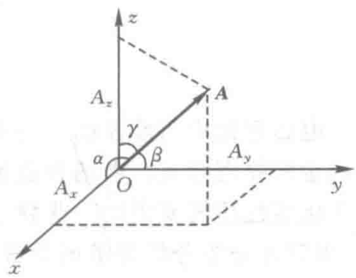


图 1.1-3　矢量 $\boldsymbol{A}$ 分解为直角坐标分量

A_x、A_y、A_z 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的直角坐标分量。显然

$$\begin{aligned} A_x &= A\cos\alpha \\ A_y &= A\cos\beta \\ A_z &= A\cos\gamma \end{aligned} \tag{1.1-3}$$

将(1.1-3)式代入(1.1-2)式并与(1.1-1)式比较，得

$$\hat{a} = \hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\cos\beta + \hat{z}\cos\gamma \tag{1.1-4}$$

上式说明单位矢量可用矢量的方向角余弦表示。

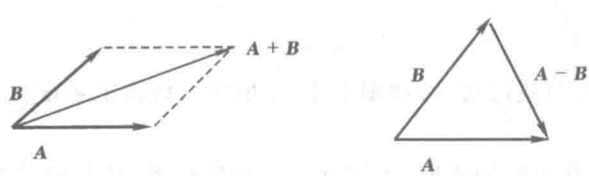
3. 矢量的代数运算

(1) 矢量的加减法

两矢量之和(或差)的直角坐标分量等于两矢量对应坐标分量的和(或差)，即

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = (A_x \pm B_x)\hat{x} + (A_y \pm B_y)\hat{y} + (A_z \pm B_z)\hat{z} \tag{1.1-5}$$

在几何上，两矢量的和矢量与差矢量分别与以两矢量为邻边的平行四边形的两条对角线重合，如图 1.1-4 所示。矢量相加满足交换律与结合律，即



(a) 两矢量之和　　(b) 两矢量之差

图 1.1-4　两矢量的和与差

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \qquad \text{(交换律)} \tag{1.1-6}$$

$$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} \qquad \text{(结合律)} \tag{1.1-7}$$

(2) 标量乘以矢量

标量乘矢量其积为矢量。标量 η 乘矢量 $\boldsymbol{A}$ 满足以下关系

$$\eta\boldsymbol{A} = \eta A_x\hat{x} + \eta A_y\hat{y} + \eta A_z\hat{z} \tag{1.1-8}$$

$$\eta\boldsymbol{A} = \begin{cases} |\eta\boldsymbol{A}|\,\hat{a}, & \eta \geqslant 0 \\ |\eta\boldsymbol{A}|\,(-\hat{a}), & \eta < 0 \end{cases} \tag{1.1-9}$$

(3) 矢量的标积

两矢量相乘其积有两种情况：一种其积为标量，称为标积；另一种其积仍为矢量，称为矢积。

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标积记为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$,因此,标积也称作点积或点乘。两矢量的标积等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的余弦,即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta \tag{1.1-10}$$

式中 θ 为两矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角。如果作用在某一物体上的力为 $\boldsymbol{A}$,使该物体发生位移,位移矢量为 $\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 表示力 $\boldsymbol{A}$ 使物体位移 $\boldsymbol{B}$ 所做的功。

由(1.1-10)式可以看出,两矢量的标积满足交换律,即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.1-11}$$

容易证明两矢量之和与第三个矢量的标积等于两矢量分别与第三个矢量的标积之和,即

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.1-12}$$

显而易见,标积不但与两矢量的大小有关,还与它们之间的夹角有关。当两矢量垂直时,$\theta=90°$,其标积为 0;当两矢量平行时,$\theta=0°$,标积的绝对值最大,等于两矢量的模之积。直角坐标系中,3 个直角坐标单位矢量 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$ 的标积为

$$\begin{aligned}\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{y}\cdot\hat{z}=\hat{z}\cdot\hat{x}=0\\ \hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1\end{aligned} \tag{1.1-13}$$

在直角坐标系中,两矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标积可用直角坐标分量表示为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{1.1-14}$$

当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时,由(1.1-14)式,矢量的模与直角坐标分量的关系为

$$A=\sqrt{|\boldsymbol{A}|^2}=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \tag{1.1-15}$$

一矢量 $\boldsymbol{A}$ 与单位矢量的标积等于该矢量在单位矢量方向上的分量,即

$$\begin{aligned}\hat{x}\cdot A=|\hat{x}||\boldsymbol{A}|\cos\alpha=A_x\\ \hat{y}\cdot A=|\hat{y}||\boldsymbol{A}|\cos\beta=A_y\\ \hat{z}\cdot A=|\hat{z}||\boldsymbol{A}|\cos\gamma=A_z\end{aligned} \tag{1.1-16}$$

一般地,一矢量 $\boldsymbol{A}$ 和与其夹角为 θ 的单位矢量 $\hat{n}$ 的标积为

$$\hat{n}\cdot A=|\hat{n}||\boldsymbol{A}|\cos\theta=A_n \tag{1.1-17}$$

例 1.1-1　求矢量 $\boldsymbol{A}=4\hat{x}+6\hat{y}-2\hat{z}$,$\boldsymbol{B}=-2\hat{x}+4\hat{y}+8\hat{z}$ 之间的夹角。

解　根据(1.1-10)及(1.1-14)式有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB}=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{AB}=0$$

$$\theta=90°$$

(4) 矢量的矢积

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的矢积记为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$,因此,矢积也称作叉积或叉乘。矢积是矢量,其大小等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的正弦,其方向为两矢量所在面的法向,即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\hat{n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{1.1-18}$$

矢积的方向 $\hat{n}$ 符合右手定则,即右手四指从 $\boldsymbol{A}$ 旋转到 $\boldsymbol{B}$,拇指的方向为矢积的方向,如图 1.1-5 所示。可以看出,$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的大小是以两矢量为邻边的平行四边形的面积。由此可以认为,矢积的几何意义为以两矢量为邻边的平行四边形围成的有向面。如果 $\boldsymbol{B}$ 表示作用在一物体上的力,而 $\boldsymbol{A}$ 表示力臂矢量时,则矢积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 表示作用给物体的力矩。

由(1.1-18)式,矢积不但与两矢量的大小有关,也与它们之间的夹角有关。两矢量平行时,$\theta=0°$,矢积为 0;两矢量垂直时,$\theta=90°$,矢积的模最大。3 个直角坐标单位矢量 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$ 的

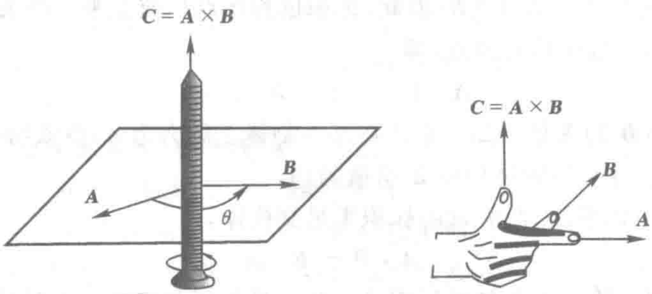


图 1.1-5 矢积的方向

矢积分别为

$$
\begin{aligned}
\hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z} \\
\hat{y} \times \hat{z} &= \hat{x} \qquad (1.1-19) \\
\hat{z} \times \hat{x} &= \hat{y}
\end{aligned}
$$

及

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0 \qquad (1.1-20)$$

在直角坐标系中,两矢量的矢积可用两矢量的直角坐标分量表示为

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z} \qquad (1.1-21)$$

通常,上式写成行列式形式,即

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (1.1-22)$$

由上式可以看出

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \qquad (1.1-23)$$

即矢积不满足交换律。

例 1.1-2 证明平面三角形的正弦定律。

证 对于如图 1.1-6 所示的由 3 个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 组成的对应内角分别为 α、β、γ 的三角形,可以看出 3 个矢量有以下关系

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

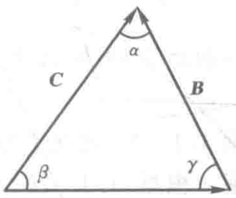


图 1.1-6 边长为 A、B、C,对应内角为 α、β、γ 的三角形

前式等式两边与 $\boldsymbol{B}$ 矢积,后式等式两边与 $\boldsymbol{C}$ 矢积,考虑到矢量与自己的矢积为 0,得

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$$

由(1.1-18)式得,$BC\sin\alpha = AB\sin(\pi - \gamma)$ 和 $CA\sin\beta = BC\sin\alpha$

由此得

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$

(5) 矢量的混合运算

矢量的混合运算次序与标量的混合运算次序相同。下面给出一些常用的矢量混合运算恒等式

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \qquad (1.1-24a)$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} \qquad (1.1-24b)$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.1-24c}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{1.1-24d}$$

4. 标量场与矢量场

在火炉、暖气片等热源周围空间区域存在温度的某种分布，且在该空间区域的每一点上，温度都是确定的，我们说该空间区域存在温度场；在江河等水流区域中，各处水的流速是可确知的，该水流区域中存在水流速的某种分布，我们就说那里存在流速场；在地球周围各点，存在对各种物体的引力，我们说地球周围存在引力场，或者说地面上有重力场；在电荷周围各点，存在对电荷的作用力，我们就说电荷周围有电场……。显然，“场”是指某种物理量在空间的分布。具有标量特征的物理量在空间的分布是标量场，具有矢量特征的物理量在空间的分布是矢量场。例如，温度场是标量场，电场、流速场与重力场都是矢量场。

场是物理量的空间分布，这种物理量还可能随时间变化，因此在数学上，场用表示其特征物理量的空间和时间坐标变量的多元函数来描述，即标量场用空间和时间的标量函数表示，矢量场用空间和时间的矢量函数表示。例如，温度场可表示为 $T(x,y,z,t)$，电位可表示为 $\Phi(x,y,z,t)$，流速场可表示为 $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$，电场表示为 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$，磁场表示为 $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$。在电磁场中，随时间变化的场称为**时变场**；与时间无关，不随时间变化的场称为**静态场**。也就是说，静态场只是空间坐标的函数。例如，静电场可表示为 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$。

为了形象、直观地描述标量场在空间的分布情形或沿空间坐标的变化，可画出其一系列等间隔的等值面。不同等值面的形状及其间隔能较直观地表现标量场的空间分布情况。为了形象、直观地描述矢量场在空间的分布情形或沿空间坐标的变化，常画出其场线(力线)。场线是一簇空间有向曲线，矢量场强处场线稠密，矢量场弱处场线稀疏，场线上某点的切线方向代表该处矢量场方向。在电磁场中，常用等位面形象地表示电位的分布，分别用电力线和磁力线形象地表示电场和磁场的分布。

场是物理量的分布，服从因果律，这里的“因”，称为场源。场都是由源产生的。例如，温度场是由热源产生的，静电场是由电荷产生的。场在空间的分布形式不仅取决于产生它的源，还受周围物质环境的影响。例如，炉膛中的温度分布，不仅取决于火力大小及分布，而且还与炉膛的结构以及材料特性有关。带电体周围的电场分布不仅与带电体的电荷分布与电量有关，也与周围的物质特性有关。场与源和物质的关系可用一组微分方程描述，描述电磁场与其源的关系的方程就是称为麦克斯韦尔方程组的一组矢量微分方程组。

思考题

1. 什么是零矢量？两矢量满足什么条件才相等？
2. 两矢量点乘可以是负数吗？如果两矢量点乘是负数表示什么意义？
3. 一个矢量在另一个矢量上的投影是唯一的吗？
4. 什么是标量场？什么是矢量场？
5. 矢量场与矢量之间有什么关系？

1.2 三种常用坐标系中的矢量场

矢量场是矢量的空间分布,是空间坐标变量的矢量函数,即在矢量场存在的区域中每一点都有一个对应的矢量。为了定量地分析矢量场,需要建立参考坐标系,以表示空间的位置及矢量的方向。正交曲面坐标系有多种类型,本书采用最常用的三种,即直角坐标系、圆柱坐标系和圆球坐标系。

1. 直角坐标系

直角坐标系是最常用的正交坐标系。在直角坐标系中,矢量场中的空间位置用其三个直角坐标表示,一般记作(x,y,z)。

在直角坐标系中,三个相互垂直的坐标轴,即x轴、y轴和z轴的方向是给定的,在本书中表示直角坐标三个坐标轴方向的单位矢量分别用$\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$表示。矢量场在每一空间位置点的对应矢量可以用其直角坐标分量表示。例如,某矢量场在任一空间位置(x,y,z)点的矢量$\mathbf{A}(x,y,z)$可用其直角坐标分量表示为

$$\mathbf{A}(x,y,z)=A_x(x,y,z)\hat{x}+A_y(x,y,z)\hat{y}+A_z(x,y,z)\hat{z} \tag{1.2-1}$$

式中$A_x(x,y,z)$、$A_y(x,y,z)$、$A_z(x,y,z)$表示将坐标系原点平移到空间位置点(x,y,z)形成本地坐标系后,矢量场在该点所对应的矢量$\mathbf{A}(x,y,z)$分别在本地三个坐标轴上的投影,称为坐标分量,如图1.2-1所示。以任一空间位置(x,y,z)点的矢量$\mathbf{A}(x,y,z)$为代表的分布在空间的这种矢量的全体就称为矢量场$\mathbf{A}(x,y,z)$。

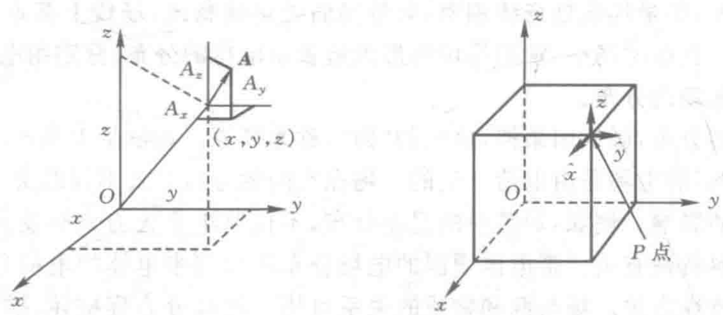


图1.2-1 直角坐标系中的矢量场

从参考坐标原点指向空间位置点(x,y,z)的矢量,称为位置矢量$\mathbf{r}$,即

$$\mathbf{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z} \tag{1.2-2}$$

可以看出,位置矢量$\mathbf{r}$包含了该矢量所指空间位置点的坐标,因此也可以代表空间位置点。在电磁场中,空间位置点的坐标常写成位置矢量的形式,即(1.2-1)式常简写作

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=A_x(\mathbf{r})\hat{x}+A_y(\mathbf{r})\hat{y}+A_z(\mathbf{r})\hat{z} \tag{1.2-3}$$

这里需要说明,$\mathbf{A}(\mathbf{r})$中的$\mathbf{r}$只是表示$\mathbf{A}$是$\mathbf{r}$所指的空间点坐标的函数,并不意味着$\mathbf{A}$的变量是矢量。在本书中,为书写方便,在不会引起混淆的情况下,有时将矢量场在空间位置(x,y,z)点的矢量$\mathbf{A}(x,y,z)$或$\mathbf{A}(\mathbf{r})$进一步简写作$\mathbf{A}$,将(1.2-1)式简写为

$$\mathbf{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$$

在空间每一点上的矢量都相同的矢量场称为常矢量场,简称常矢量。直角坐标系中的三

个单位矢量均为常矢量。在直角坐标系中，常矢量的三个直角坐标分量都是常量。例如，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=3\hat{x}$ 是常矢量场，在空间每一点上，不但其矢量场的大小都相同，而且矢量场的方向也相同。$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=(x^2+y^2)\hat{y}$ 就不是常矢量场，因为在空间每一点上，尽管矢量场的方向都是相同的，但矢量场的大小不相同。

2. 圆柱坐标系

在圆柱坐标系中，表示空间位置点的三个坐标变量记为(ρ, φ, z)，其中 ρ 表示该点到 z 轴的垂直距离；φ 表示过该点和 z 轴的平面与 xOz 平面的夹角；z 仍然表示该点在 z 轴上的投影值，如图 1.2-2 所示。容易证明，同一空间位置点的圆柱坐标与直角坐标的关系为

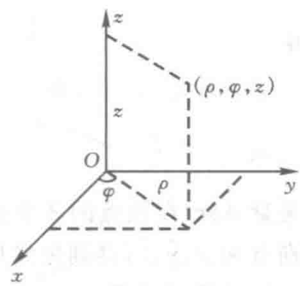


图 1.2-2　圆柱坐标

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \tag{1.2-4}$$

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\arctan\dfrac{y}{x} \\ z=z \end{cases} \tag{1.2-5}$$

在圆柱坐标系中，三个相互垂直的坐标轴单位矢量记为 $\hat{\rho}$、$\hat{\varphi}$、$\hat{z}$。对空间任一位置点(ρ, φ, z)，坐标轴的取向与过该点以 z 轴为轴线的圆柱面的法向和切向一致，如图 1.2-3 所示，其中：

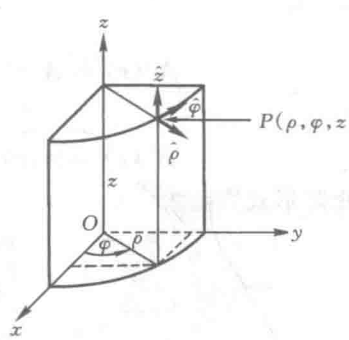


图 1.2-3　圆柱坐标系中的单位矢量

$\hat{\rho}$ 为圆柱面在(ρ, φ, z)点的法线方向；

$\hat{\varphi}$ 为在(ρ, φ, z)点平行于 xy 面且指向 φ 增加一侧的圆柱面切线方向，也是过 z 轴和 xz 面夹角为 φ 的平面在(ρ, φ, z)点的法线方向；

$\hat{z}$ 为圆柱面在(ρ, φ, z)点平行于 z 轴的切线方向，也是过(ρ, φ, z)点平行于 xy 面平面的法线方向。

可见，圆柱坐标系中的坐标轴单位矢量 $\hat{\rho}$、$\hat{\varphi}$ 的方向随空间位置而变，不是常矢量。在空间一点(ρ, φ, z)上直角坐标系坐标轴单位矢量和圆柱坐标系坐标轴单位矢量的关系图 1.2-4 所示，$\hat{x}$ 与 $\hat{\rho}$ 夹角为 φ，$\hat{y}$ 与 $\hat{\varphi}$ 夹角也为 φ。因此有

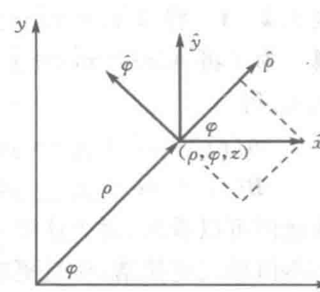


图 1.2-4　直角坐标系坐标轴单位矢量和圆柱坐标系坐标轴单位矢量

$$\begin{cases} \hat{\rho}\cdot\hat{x}=\cos\varphi \\ \hat{\rho}\cdot\hat{y}=\sin\varphi \\ \hat{\varphi}\cdot\hat{x}=-\sin\varphi \\ \hat{\varphi}\cdot\hat{y}=\cos\varphi \end{cases} \tag{1.2-6}$$

圆柱坐标系中的单位矢量与直角坐标系中的单位矢量的关系为

$$\begin{cases}\hat{\rho}=\hat{x}\cos\varphi+\hat{y}\sin\varphi\\ \hat{\varphi}=-\hat{x}\sin\varphi+\hat{y}\cos\varphi\end{cases}\tag{1.2-7a}$$

$$\begin{cases}\hat{x}=\hat{\rho}\cos\varphi-\hat{\varphi}\sin\varphi\\ \hat{y}=\hat{\rho}\sin\varphi+\hat{\varphi}\cos\varphi\end{cases}\tag{1.2-7b}$$

矢量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$在任一空间位置点$(\rho,\varphi,z)$的矢量$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$可用其圆柱坐标分量表示为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=A_\rho(\boldsymbol{r})\hat{\rho}+A_\varphi(\boldsymbol{r})\hat{\varphi}+A_z(\boldsymbol{r})\hat{z}\tag{1.2-8}$$

式中

$$A_\rho(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\rho}\tag{1.2-9a}$$

$$A_\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\varphi}\tag{1.2-9b}$$

$$A_z(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{z}\tag{1.2-9c}$$

是矢量$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$在该点的3个垂直坐标轴$\hat{\rho}$、$\hat{\varphi}$、$\hat{z}$上的投影,称为圆柱坐标分量。(1.2-8)式两边分别点乘$\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$,得到矢量场在同一空间位置点上直角坐标系中的坐标分量与圆柱坐标系中的坐标分量的关系为

$$\begin{aligned}A_x(\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{x}=A_\rho(\boldsymbol{r})\hat{\rho}\cdot\hat{x}+A_\varphi(\boldsymbol{r})\hat{\varphi}\cdot\hat{x}+A_z(\boldsymbol{r})\hat{z}\cdot\hat{x}\\&=A_\rho(\boldsymbol{r})\cos\varphi-A_\varphi(\boldsymbol{r})\sin\varphi\\A_y(\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{y}=A_\rho(\boldsymbol{r})\hat{\rho}\cdot\hat{y}+A_\varphi(\boldsymbol{r})\hat{\varphi}\cdot\hat{y}+A_z(\boldsymbol{r})\hat{z}\cdot\hat{y}\\&=A_\rho(\boldsymbol{r})\sin\varphi+A_\varphi(\boldsymbol{r})\cos\varphi\\A_z(\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{z}=A_z(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix}A_\rho\\A_\varphi\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}\tag{1.2-10}$$

$$\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_\rho\\A_\varphi\\A_z\end{bmatrix}\tag{1.2-11}$$

例 1.2-1 将$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=x\hat{x}+y\hat{y}$和$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=x\hat{y}-y\hat{x}$用圆柱坐标分量表示。

解 为了将$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=x\hat{x}+y\hat{y}$和$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=x\hat{y}-y\hat{x}$用圆柱坐标分量表示,将(1.2-4)及(1.2-7)式代入,得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=x\hat{x}+y\hat{y}=\rho\cos\varphi(\hat{\rho}\cos\varphi-\hat{\varphi}\sin\varphi)+\rho\sin\varphi(\hat{\rho}\sin\varphi+\hat{\varphi}\cos\varphi)=\rho\hat{\rho}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=x\hat{y}-y\hat{x}=\rho\cos\varphi(\hat{\rho}\sin\varphi+\hat{\varphi}\cos\varphi)-\rho\sin\varphi(\hat{\rho}\cos\varphi-\hat{\varphi}\sin\varphi)=\rho\hat{\varphi}$$

从此例可以看出,对于这里$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$和$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$这样的矢量场,用圆柱坐标系表示比用直角坐标系表示不但形式更简洁,而且更容易理解和想象其空间分布的情况。再看一个真空中无限长载流导线产生磁场的例子:从物理学我们知道,真空中无限长载流导线产生磁场的磁力线是一个个围绕载流导线的同心圆,方向符合右手定则,磁场的大小与到载流导线的距离成反比,与电流强度I成正比。对于这个磁场,在圆柱坐标系,取无限长载流导线为z轴,其磁感应强度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$的表达式很简单,为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\rho}\hat{\varphi}$$

如果在直角坐标系,$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$的表达式(请读者自己推导)就比较复杂,方向和大小的分布和变化