全国初中数学竞赛解题指导

王梓坤题

$10abc-\{3a^2b-[4abc-(12ab^2-4a^2b)]\}$

中国国际广播出版社

全国初中数学竞赛解题指导

周士藩　府　钰　颜尔达　编著

中国国际广播出版社

1991.1

全国初中数学竞赛解题指导

周士藩　府钰　颜尔达　编著

中国国际广播出版社出版
（北京复兴门外广播电影电视部内）
中国国际广播出社版发行部发行
张家港市文教印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本787×1092　1/32　印张11.25　253千字
1991年1月第1版　1991年1月第1次印刷
印数 1—15000册
ISBN7-80035-922-0/G·405
定价：3.60元

目　录

I 基础知识篇

II 方法原理篇

III 专 题 篇

Ⅰ 基础知识篇

第一讲　整　数

整数的性质极为丰富，应用也十分广泛，初中数学竞赛试题中常有出现。由于这类题目解法灵活，技巧性强，所以这部分内容对培养学生的解题能力、发展智力大有裨益。下面我们分四方面择要叙述。

一　奇数和偶数

我们知道，一切整数可分为两大类：奇数类和偶数类。凡是能被2整除的整数叫做偶数，记为$2k$（$k\in Z$，读作k属于Z，Z表示整数集）不能被2整除的整数，叫做奇数，记为$2k+1$（$k\in Z$）。

奇、偶数有以下几个简单而又重要的性质：

1. 奇数$\neq$偶数，奇数+偶数$\neq 0$；

2. 奇数±奇数=偶数；偶数±偶数=偶数；奇数±偶数=奇数；

3. 奇数个奇数之和是奇数，偶数个奇数之和是偶数，任意有限个偶数之和是偶数；

4. 奇数个奇数之积是奇数，偶数与任意整数之积是偶数；

5. 设$a\in Z$，则a与$|a|$有相同的奇偶性；

6. 设$a,b\in Z$，则$a+b$与$a-b$有相同的奇偶性。

上述奇偶性质虽然简单，但若能熟练地掌握并灵活地应用这些性质，便可简捷而有效的解决有关整数方面的不少问题，包括一些趣味数学题和有一定难度的竞赛题。下面介绍整数的奇偶性在解题中的各种应用。

例 1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 是自然数1,2,3,…8的任意一种排列，作$b_1 = |a_1 - a_2|$，$b_2 = |a_3 - a_4|$，$b_3 = |a_5 - a_6|$，$b_4 = |a_7 - a_8|$，$c_1 = |b_1 - b_2|$，$c_2 = |b_3 - b_4|$，$d = |c_1 - c_2|$，证明d必是偶数。

证明： 由于本题并不是求d的具体数值，只涉及d的奇偶性，因此可在不改变有关各数奇偶性的前提下，作如下代换：因b_1与$a_1 - a_2$有相同的奇偶性，所以b_1与$a_1 + a_2$有相同的奇偶性（奇偶数性质6）；同理，b_2, b_3, b_4分别与$a_3 + a_4$，$a_5 + a_3, a_7 + a_8$ 有相同的奇偶性，且c_1、c_2分别与$b_1 + b_2$、$b_3 + b_4$有相同的奇偶性，所以c_1、c_2分别与$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$、$a_5 + a_6 + a_7 + a_8$有相同的奇偶性；又因d与$c_1 + c_2$有相同的奇偶性，所以d与$a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 1 + 2 + \cdots + 8 = 36$有相同的奇偶性，由此可见$d$是偶数。

例 2 是否有满足方程$x^2 - y^2 = 1990$的整数解x和y？

解： 原方程化为$(x + y)(x - y) = 1990$，如果存在适合上列方程的整数x及y，则整数x、y的奇偶情况可能是：

①x为奇数，y为偶数；②x为偶数，y为奇数；③x为奇数，y为奇数；④x为偶数，y为偶数。

前两种情况合起来，即x、y为不同奇偶；后两种情况合起来，即x、y为同奇或同偶。

若x、y为不同奇偶，则$(x + y)(x - y)$为奇数，这与1900是偶数矛盾；

若x、y为同奇或同偶，则$(x + y)$及$(x - y)$均为偶数，

故$(x+y)(x-y)$必是4的倍数，但$1990=199\times5\times2$，并不含4的因素。

所以不存在满足原方程的整数解x和y。

例 3 某展览馆共有展室28间(如图1—1—1)图中每一方格代表一间展室，每相邻的两展室间均有门可通。问能否找出一条从图中入口到出口的参观路线，使参观者能不遗漏又不重复地经过每一间展室？

解：如图，我们可把展室分成两类：13间涂上黑色，(图中阴影方格)，另15间涂上白色。这样，任一参观者的格线必然是由白(入口)→黑→白→黑→…→白→黑→白(出口)，也即经过的展室必是黑白相间的。因此，经过的白展室数＝黑展室数＋1 …(A)

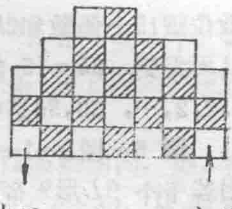

图 1—1—1

现题中白、黑展室数同为奇数，若要不遗漏又不重复地经过所有展室，就将与上面(A)式相矛盾。((A)式表示所经过黑、白展室数为不同的奇偶数，且白展室比黑展室多一间)，因此不可能存在满足要求的参观路线。

例 4 能否把1,1,2,2,…，30,30这60个数排成一行，使得两个1之间夹有一个数，两个2之间夹有两个数，…，两个30之间夹有30个数？并说明理由。

解：设能按题设要求排成一行。为便于讨论，我们可给这60个排好的数顺次编上1—60号，因这60个数中共有30个奇数及30个偶数，且各为15对。设其中15对偶数中的某一对为m、m，按题设要求排成一行后，这两个偶数m之间必夹有m个数。如果其中一个偶数m排好后的编号是奇数，则另一个偶

数m 排在行中的编号必是偶数，反之亦然。这样这15对偶数必分别占了60个位置中15个奇数编号位和15个偶数编号位。

再看15对奇数，设其中某一对是n、n，当按规定排好后，两个n之间夹有n个数，当其中一个n占在奇数编号位时，另一个n也占在奇数编号位，也就是说这30个奇数中必成对地占在排成一行后的奇数位，不妨设共有k对。

因为60个位置中有30个奇数位，根据上面分析，这些奇数位被15个偶数和$2k$个奇数所占据，故有： $30=15+2k$，从而得到 $2k=15$ 的矛盾结果，因此不能按题设要求将1，1,2,2,…，30,30这60个数排成一行。

例 5 图1—1—2是4个1×1的正方形组成的"L形"，用若干个"L形"硬纸片无重迭拼成一个$m\times n$（长为m个单位，宽为n个单位）的矩形。证明mn必是8的倍数。

分析：∵ $m\times n$的矩形是由若干个"L形"纸片无重迭地拼接而成的，它共有mn个单位正方形。因每个"L形"含4个单位正方形，故mn必是4的倍数，现只要能证明$m\times n$矩形中所含的"L形"纸片必为偶数块，那末mn即为8的倍数。

证明：∵ $m\times n$是4的倍数，m、n中必有一个是偶数，不妨设为m。把$m\times n$矩形中的m列相间涂上黑色，如图1—1—3，则不论"L形"在这矩形中放置的位置如何（"L形"的放置，共有图1—1—4中8种可能），"L形"或占有3白1黑个单位正方形，或占有3黑1白个单位正方形。

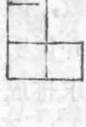

图 1—1—2

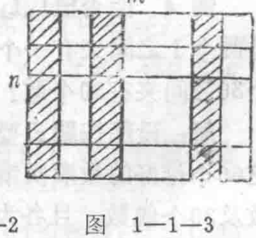

图 1—1—3

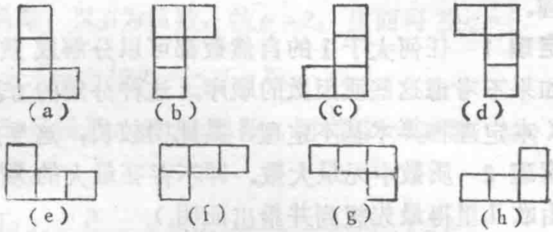

图 1—1—4

设第一种“L形”共p个，第二种“L形”共q个，则$m\times n$矩形中的白格单位正方形数为$3p+q$，而它的黑格单位正方形数为$p+3q$。

$\because m$为偶数，$\therefore m\times n$矩形中，黑、白条数相同，黑、白单位正方形的总数也必相等，故有$3p+q=p+3q$，从而有$p=q$，即“L形”的总数为$2p$个，即“L形”总数为偶数，从而mn必是8的倍数。

二 质数和合数

一个大于1的正整数a，如果除了1和本身以外不能再被其他正数整除时，这个正整数叫做质数（或称素数）；一个正整数除了1和本身外，还能被另外的正整数整除时，这个正整数叫做合数。于是全体正整数可分为：数1（因数只有一个），质数（因数有两个）和合数（因数多于两个）三类。这实际上是按一个数的因数个数来划分全体正整数的方法，由于这种划分涉及到一个数的因数问题，出现和值得研究的问题就较复杂，早在几千年前，人们就研究质数的性质等问题了。

关于质数，除了要掌握它的定义外，我们还必须记住下

述定理.

定理 1 任何大于1的自然数都可以分解成质数的乘积，如果不考虑这些质因数的顺序，这种分解的方法是唯一的.（本定理称算术基本定理，其证明较长，这里从略.）

定理 2 质数中无最大数. 即不存在最大的质数.（本命题由欧几里得最先想到并给出证明）

例 6 试证定理2，

证： 设最大的质数是p，考察从2到p的所有质数的乘积加1的和式：

$$n=2\times3\times5\times7\times\cdots\times p+1,$$

∵质数$2,3,5,7,\cdots,p$中没有一个是n的因素，因此①当n是合数时，它分解成质因数的乘积中的质因数一定是比p大的质数，这就表明存在比p大的质数；②当n是质数时，说明n本身就是一个大于p的质数. 故定理得证.

例 7 对于任何大于1的自然数n，试证n^4+4是合数.

证明： 为证$n^4+4(n>1)$是合数，应将n^4+4分解因式后再考虑.

$$\because n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2$$
$$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$

$\because n>1$，$n-1>0$，$\therefore n^2-2n+2=(n-1)^2+1>1$，

同理$n^2+2n+2>1$，　　∴题得证.

注意： 本题证明中对$n^2-2n+2>1$及$n^2+2n+2>1$的证明是必不可少的，否则n^4+4是合数的理由不充分.

例 8 如果质数p,q满足关系式$3p+5q=31$，那末$log_2\dfrac{p}{3q+1}$的值是多少？

解： 由条件知，$3p$和$5q$必是一奇一偶，设$3p$是偶数，

则p是偶数，又p为质数，故$p=2$，从而可得$q=5$，

$\therefore log_2\frac{p}{3q+1}=log_2\frac{1}{8}=-3$；

若$5q$是偶数，则q为偶数。同样因q为质数，故$q=2$，从而$p=7$。

$$\therefore log_2\frac{p}{3q+1}=log_2\frac{7}{3\times2+1}=log_2 1=0$$

$\therefore log_2\frac{p}{3g+1}$的值是$-3$或0。

例 9 两个质数p，q是整系数方程$x^2-99x+m=0$的两根，求$\frac{q}{p}+\frac{p}{q}$的值。

解：由韦达定理得$p+q=99$，$pq=m$。

$\because$ p,q为质数，且和为99，其中必有一为偶数2，不妨设$p=2$，则$q=97$，从而$m=194$。

$\therefore\frac{q}{p}+\frac{p}{q}=\frac{p^2+q^2}{pq}=\frac{9413}{194}$。

例10 设p，q为质数，方程$x^2+p^2x+q^3=0$在p,q为何值时有整数根。

解：$\because$方程$x^2+p^2x+q^3=0$有整数根，而p,q为质数，所以方程的根只可能是如下数组中之一：①（$q^3,1$）；②（q^2,q）；③（$-q,-q^2$）；④（$-1,-q^3$）。

若$x\geqslant0$，必有$x^2+p^2x+q^3>0$，故原方程只能有负数根，故数组①、②排除。

若数组③是原方程的根，则不论$x=-q$，或$x=-q^2$代入原方程均有$p^2=q+q^2=q(1+q)$，则p为合数，这与题设矛盾。故方程若有整数根必为数组④，这时将$x=-1$或$x=-q^3$代入原方程，有$p^2=1+q^3$。

当q为奇质数时，p^2必为偶数，则p也必是偶质数。
$\therefore p=2$，从而$q^3=3$，这也与题设矛盾，由此推知q必为偶质数，即$q=2$。但$p^2=1+2^3=9$，$\therefore p=3$。故方程为$x^2+9x+8=0$，它的整数根是$x_1=-1$，$x_2=-8$。

$\therefore$原方程p、q为质数时当，且仅当$p=3$，$q=2$时才有整数解。

例11 求这样的质数，当它加上10和14时仍为质数。

分析： 由于质数的分布不规则，我们只能从最小的质数试验起，希望由此找到所要求的质数，然后再设法加以证明。

解： $\because 2+10=12$，$2+14+16$，$\therefore$质数2不适合；

$3+10=13$，$3+14=17$，$\therefore$质数3合要求；

$5+10=15$；$5+14=19$，$\therefore$质数5不适合；

$7+10=17$，$7+14=21$，$\therefore$质数7不适合；

$11+10=21$，$11+14=25$，$\therefore$质数11不适合；

… … …

从上面观察，3符合题设要求。但符合题设要求的质数是否只有3呢？

设b为符合条件的质数，b被3除有三类情况：
① $b=3k+1$，② $b=3k-1$，③ $b=3k$。

当$b=3k+1$时，$b+14=3k+15=3(k+5)$是合数；

当$b=3k-1$时，$b+10=3k-1+10=3(k+3)$是合数，所以b只能是$3k$的形式。但由题意又是质数，故k只能为1，即所求质数是3且只能是3。

三 数的整除性

如果两个整数相除，它们的商仍是整数，我们称这两个整数能整除。一般地说，对于整数a与$b(b\neq0)$，若存在q，使$a=bq$，称b整除a或a能被b整数，记作$b|a$，b称a的约数，

a是 b的倍数。若不存在这样的整数 q，那么我们称 b 不能整除 a。

整除的概念虽然也得简单，但很重要。下面是关于整数整除性中必须掌握的几个定理。

定理1：如$a|b$，$a|c$，则$a|(b+c)$。

推论：若$a|b_1$，$a|b_2$，…，$a|b_n$，则$a|(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

定理2：如$a|b$，$a|c$，则$a|(b-c)$

定理3：如$a|b$，则$a|nb$（n为整数）

定理4：如$a|b$，$b|c$，则$a|c$。

定理5：n个连续自然数之积必能被数$1\times2\times3\times\cdots\times n$所整除。

以上定理除定理5的证明要运用到高中的数学知识外，证明均较简单，留给续者自己练习。

另外，在整除性问题中还常用到整数M能被2、3、5、7、9、11等整数整除的一些法则，现罗列如下。

（1）整数M个位数是偶数，则 $2|M$。

（2）整数M各位数字之和能被3（或9）整除，则$3|M$（或$9|M$）。

（3）整数M的末位数字是0或5，则$5|M$。

（4）整数M个位数字以前的数字组成的数与个位数字的二倍的差能被7整除，则$7|M$。

（5）整数M的奇位数字之和与偶位数字之和的差能被11整除，则$11|M$。

例12 已知 $n|10a-b$，$n|10c-d$，求证 $n|ad-bc$。

证明：$\because$ $n|10a-b$，$\therefore$ $n|(10a-b)c$。

同理，有 $n|(10c-d)a$，因此 $n|(10a-b)c-(10c-d)a$，

即 $n|ad-bc$。

例13 若a,b,c,是正整数，且$6|a+b+c$。

求证： $6|a^3+b^3+c^3$。

证明： $\because n^3-n=n(n-1)(n+1)$，由定理5知，它能被6整除，即$6|n^3-n$。而$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)=(a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)$，由$6|a^3-a$，$6|b^3-b$，$6|c^3-c$，$\therefore 6|a^3+b^3+c^3-(a+b+c)$，又由已知$6|a+b+c$，故有$6|a^3+b^3+c^3$。

例14 设n是整数，证明数$M=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}$为整数，且它是3的倍数。

证明： 把M化成$M=\frac{1}{2}n(2n^2+3n+1)$后可知，只要能证$M$能被2整除且含因数3即可。

但$M=\frac{1}{2}n(2n^2+3n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$。

$\because n(n+1)$是两个连续自然数之积必为偶数，$\therefore$ $\frac{1}{2}n(n+1)$为整数，故M为整数。

再把M改写为$M=\frac{1}{8}\cdot 2n\cdot(2n+1)(2n+2)$，$\because 2n$，$2n+1$，$2n+2$是三个连续自然数，其中必有一个是3的倍数，从而$M$必是3的倍数。

又证： $\because n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$

$$=\frac{1}{2}[n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n-1)]$$

$\because 6|n(n+1)(n+2)$，$6|n(n+1)(n-1)$，

$\therefore n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$是整数，且$3|(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n)$。

例15 设a,b,c,为两不相等的三个正整数。证明在a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3这三个数中至少有一个能被10整除。

证明：首先,我们可用奇偶性分析法证明$ab(a^2-b^2)$，$bc(b^2-c^2)$，$ca(c^2-a^2)$这三数都是偶数（从略）。现在证明这三个数中至少有一个被5整除。

为此，我们利用整数被5除所得不同余数的分类，当a,b,c三类中有一个是5的倍数时，上述三个数中必有某一个数是5的倍数，题目结论即成立；若a、b、c三数中没有5的倍数，则它们一定是下列形式之一：$5k+1$，$5k-1$,$5k+2$，$5k-2$。但$(5k\pm1)^2=5l+1$，$(5k\pm2)^2=5m-1$。(k,l,m都是整数)$\therefore a^2$、b^2、c^2三数之中必有两数同属于$5l+1$型或$5m-1$型。例如当a^2与b^2同属$5l+1$型时，它们的差必是5的倍数，从而a^2-b^2,b^2-c^2,c^2-a^2中至少有一个是5的倍数，因此题设三数中至少有一个是5的倍数，因而该数即能被10整除。

例16 证明对任意自然数n，分数：$\dfrac{21n+4}{14n+3}$不可约。

分析：分数$\dfrac{21n+4}{14n+3}$不可约，即$21n+4$与$14n+3$无公因数$d(d>1)$，对这类问题往往可试用反证法。

证明：设分数$\dfrac{21n+4}{14n+3}$可约，即$21n+4$和$14n+3$两数有公因数$d(>1)$,即$d|21n+4$，及$d|14n+3$。

$\because$ $21n+4=(14n+3)+(7n+1)$，由$d|21n+4$可知$d|7n+1$；

而$14n+3=2(7n+1)+1$，由$d|14n+3$及$d|7n+1$，可知$d|1$，这与$d>1$矛盾。

$\therefore\ \dfrac{21n+4}{14n+3}$不可约。

例17 已知$n=\overline{13xy45z}$能被792整除，试确定x,y,z的值。

解：$\because\ 792=8\times9\times11$，$\therefore\ 8|n,\ 9|n,\ 11|n$

$\because\ 8|n$，而$n=\overline{13xy400}+\overline{5z}$，

显然有$8|\overline{13xy400}$，$\therefore\ 8|\overline{5z}$，故可推得$z=6$，

由$9|n$可知$9|(1+3+x+y+4+5+6)$，即$9|(19+x+y)$

$\therefore$ 有$9|(1+x+y)$，此时$x+y=8$或$x+y=17$（$0\leqslant x\leqslant9$，$0\leqslant y\leqslant9$）

由$11|n$，可推得$11|(1+x+4+6)-(3+y+5)$，

即有$11|(3+x-y)$，故有$x-y=8$或$x-y=-3$。

解：$\begin{cases}x+y=8\\x-y=8,\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=8\\x-y=-3,\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=17\\x-y=8,\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=17\\x-y=-3,\end{cases}$

仅当$x=8$，$y=0$时符合要求，$\therefore\ x=8$，$y=0$，$z=6$为所求之解。

例18 由数码0,1,2,3,4,5能否组成各位数码不同又能被11除尽的六位数？

解：本题我们可通过求解的方法来判断。

设组成的六位数是$\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$，若它被11整除，则

$a_6-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1=11\times c$（其中$c$是整数） …（1）

由已知0,1,2,3,4,5在a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6中各只出现一次，于是