中学学习方法丛书

乔家瑞 刘增佑 孔令颐 贺信淳 著

初中数学
重点
难点
疑点指要

学出版社

中学学习方法丛书

初中数学重点、难点、疑点指要

乔家瑞　刘增佑
孔令颐　贺信淳　著

科学出版社

1994

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书将初中数学内容分成初中代数和平面几何两篇．按知识结构初中代数分成七个部分，平面几何分成六个部分．每个部分独立成章，每章由“知识结构”，“概念的剖析与对比”，“定理、公式、法则的探究与应用”，“数学思想方法的学习与训练”四部分组成．主要介绍重点知识，解难释疑．每章中的每段内容后面都有小结，帮助学生更好掌握该段内容，启发学生独立思考，培养学生自学能力．

本书可供初中学生和中学教师学习和参考．

中学学习方法丛书
初中数学重点、难点、疑点指要
乔家瑞　刘增佑　孔令颐　贺信淳 著
责任编辑　毕　颖
科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

1994年1月第　一　版　　开本：787×1092　1/32
1994年1月第一次印刷　　印张：19
印数：1—2940　　字数：416 000

ISBN 7-03-003429-5/G·334

定价：13.10元

《中学学习方法丛书》编委会

主　编　陶西平

副主编　谈德颜

编　委（按姓氏笔划排序）

王云方　王昌泰　刘嘉善

乔家瑞　陆晓明　毕　颖

谈德颜　陶西平　裘大彭

改进学习方法
提高学习质量

陶西平

前　言

本套丛书是本社出版的《名师启迪丛书》的姐妹篇，包括初中数学、物理、化学和高中数学、物理、化学共六册．它是由北京具有丰富教学实践经验和教学研究经验的部分特级教师、高级教师及副教授，运用思维训练的基本规律和原理，对多年教学实践经验进行总结、提炼、升华，编写而成的。

编写本套丛书的目的在于帮助中学生在学习过程中，理解重点、突破难点、解释疑点；在学习知识的同时，不断地改进学习方式及学习方法，逐步掌握科学的思维方法。这是一套具有科学性、系统性、先进性和实用性的理想参考读物．

本套丛书在编写过程中突出了概念思维的形成，定理、公式、法则运用过程的优化，以及各学科中的思想方法的训练；在叙述方法上采用了多层次强化、变通性强化、方法性强化、对比性强化等方法，使之出现多个思维起点，多个思维层次，多个思维指向，从而促进学生思维充分展拓．这样，不仅可以使学生在具体方法和技巧上得到启发和训练，同时对产生这些具体方法的理论依据的认识也可以达到新的境界．围绕上述目的的需要，丛书选择了富有代表性、启发性的例题，进行详尽透彻地分析；习题的题型新、容量大、变化多，可供学生在学习新课、期末复习及毕业总复习各个阶段使用．

总之，本套丛书纵有深度，横有跨度，信息新、容量大，可以启迪学生的思维，发展学生的求知欲，并形成灵活的学习方法，逐步提高学习效率。本套丛书是教师的得力助手，学生的理想伙伴。

原北京市教育局局长，现任北京市人大常务委员会副主任陶西平先生为本书题词：

改进学习方法，提高学习质量。

在此一并致谢。

本套丛书的编写是一次新的尝试，恳切希望读者提出宝贵意见和建议，使之不断完善，以便为提高中小学教学质量献出我们的绵薄之力。

作　者

目　　录

第一篇　代数

第二篇　平面几何

第一篇　代数

第一章　实数

一、知识结构

- 实数
  - 定　义
    - 有理数
    - 无理数
  - 有关概念
    - 数　轴
    - 相反数
    - 倒　数
    - 绝对值
  - 比较大小
  - 实数运算
    - 运算法则
    - 运算定律
    - 近似计算
    - 运算顺序

二、概念的剖析与对比

1. 有理数

例1 0，$\frac{311}{199}$，3.14159，$0.2\dot{3}\dot{6}$ 这四个数中哪个是有理数，为什么？

解 这四个数均为有理数，根据有理数的定义，整数（正整数、负整数和零）和分数（正分数和负分数）统称有理数。

0是整数，$\frac{311}{199}$是正分数；

3.14159是有限小数，可以化为分数；

$0.2\dot{3}\dot{6}=\frac{236-2}{990}=\frac{234}{990}=\frac{13}{55}$可化为分数。

所以这四个数均为有理数。

例2 把下列各数填入相应的集合内：$-\frac{1}{5}$，-0.001，0，5.26，$\frac{3}{97}$，-100，51，$0.\dot{3}$，-1，0.347269。

正整数集合：{ ……}；

负整数集合：{ ……}；

整数集合：{ ……}；

正分数集合：{ ……}；

负分数集合：{ ……}；

非负有理数集合：{ ……}；

有理数集合：{ ……}。

解

正整数集合：$\{51,\ \cdots\cdots\}$；

负整数集合：$\{-100,\ -1,\ \cdots\cdots\}$；

整数集合：$\{-100,\ -1,\ 0,\ 51,\ \cdots\cdots\}$；

正分数集合：$\left\{5.26,\ \frac{3}{97},0.347269,\ 0.\dot{3},\cdots\cdots\right\}$；

负分数集合：$\left\{-\frac{1}{5},\ -0.001,\cdots\cdots\right\}$；

非负有理数集合：$\left\{0,51,5.26,\frac{3}{97},0.347269,0.\dot{3},\cdots\cdots\right\}$；

有理数集合：$\left\{-\frac{1}{5},-0.001,0,5.26,\frac{3}{97},\ -100,51,0.\dot{3},-1,0.347269,\cdots\cdots\right\}$.

小结 由有理数的定义可以知道，任何一个有理数都可以表示成$\frac{p}{q}$的形式（p和q是互质的整数，$q\neq0$）。整数也可以看成分母是1的分数，同时每个有理数都可以表示成有限小数或无限循环小数。

引入负数后，要注意整数应包括正整数、负整数和零，分数应包括正分数和负分数，即

$$\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{array}\right.\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}$$

2. 相反数和倒数

例1　判断正误，并说明理由：

（1）符号不同的两个数就叫做互为相反数；（　　）

（2）互为相反的两个数一定是一个正数，一个负数；（　　）

（3）互为相反的数的商为 -1；（　　）

（4）任何一个负有理数的相反数都大于这个负数；（　　）

（5）任何一个数都有倒数。（　　）

解　（1）×。因为“只有符号不同的两个数叫做互为相反的数”，缺少了“只有”两个字，例如 -4 和 5 虽然符号不同，但是这两个数不是互为相反的数，即 -4 不是 5 的相反数。

（2）×。因为在相反数的概念中，还特别规定了“零的相反数是零”，所以两个数互为相反数不一定是一个正数，一个负数。

（3）×。因为零和它的相反数零的商就不等于 -1。

（4）√。任何一个负有理数的相反数都是一个正数，正数一定大于负数。

（5）×。应注意到零没有倒数。

例2　解答下列各题：

（1）$-\frac{1}{3}$ 的相反数、倒数、负倒数各是多少？

（2）$-(+27)$ 的相反数与 $-(-27)$ 的倒数的积是多少？

（3）若 a，b 互为相反数，那么它们的和等于多少？若

a，b互为倒数，那么它们的积等于多少？

（4）如果一个数的相反数是它本身，这个数是多少？如果一个数的倒数是它本身，这个数又是多少？

解　（1）$-\frac{1}{3}$的相反数是$\frac{1}{3}$；$-\frac{1}{3}$的倒数是-3；$-\frac{1}{3}$的负倒数是3。

（2）$-(+27)=-27$，其相反数为27；$-(-27)=27$，其倒数是$\frac{1}{27}$。

所以$-(+27)$的相反数与$-(-27)$的倒数的积为$27\times\frac{1}{27}=1$。

（3）因为a，b互为相反数，所以$a=-b$，即$a+b=0$；因为a，b互为倒数，所以a，b均不为零且$a=\frac{1}{b}$，所以$ab=1$。

（4）如果一个数的相反数是它本身，那么这个数只能是零；如果一个数的倒数是它本身，这个数是1或-1。

小结　相反数和倒数是关于数的两个重要的基本概念。

对于相反数，定义为“只有符号不同的两个数叫做互为相反的数；规定零的相反数是零”，一般我们常把a的相反数表示成$-a$，即a和$-a$是（两个）互为相反的数，显然互为相反数的两个数的和为零。

对于倒数，定义为“1除以一个数的商叫做这个数的倒数；零没有倒数”。显然如果a和b是非零的有理数，那么$ab=1$；反过来如果$ab=1$，我们就可以说a，b互为倒数，因为零

不能作除数，所以一定要注意零没有倒数。

3．绝对值

例1 填空：

（1）-20的绝对值等于____，0的绝对值等于____；

（2）绝对值等于15的数是____；

（3）绝对值小于4的整数有____；

（4）$|-(+9)|-|-6|=$____．

解 （1）-20的绝对值等于$\underline{20}$，0的绝对值等于$\underline{0}$。

（2）绝对值等于15的数是$\underline{\pm 15}$．

（3）绝对值小于4的整数有$\underline{-3，-2，-1，0，1，2，3}$．

（4）$|-(+9)|-|-6|=\underline{3}$．

例2 解答下列各题：

（1）若x是负数，$|3x|=$？

（2）若$|x|=-x$，x代表什么数？

（3）一个数的绝对值是它本身，这个数是怎样的数？

（4）若$|a|=4$，$|b|=6$，那么a，b所代表的数中，最大的是几？最小的是几？

解 （1）$|3x|=-3x$。

（2）若$|x|=-x$，x代表零或负数．

（3）一个数的绝对值是它本身，这个数是零或正数。

（4）$|a|=4$，$a=\pm 4$，$|b|=6$，$b=\pm 6$，它们中最大的是6，最小的是-6。

小结 关于绝对值的概念，我们应该以下面几个方面来理解：

（1）在数轴上表示一个数的点，它离开原点的距离就

是这个数的绝对值，距离是一个非负的量，所以数的绝对值总是非负的（正数或零）。同时注意到-5和5在数轴上离开原点的距离都是5，故-5和5的绝对值都是5，反过来绝对值等于5的数有两个，即± 5。

（2）绝对值的意义，从根本上来理解就是“正数的绝对值就是它本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零”。这个意义当用字母表示数以后，就更为重要：

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

看来在没有指明字母a表示什么样的数时，随便地就写成$|a|=a$或$|a|=-a$是十分错误的，去掉绝对值号首先应看字母表示的数的范围，比如当$m\leqslant 0$时，

$$|m|=-m。$$

当$x\leqslant 1$时$|x-1|=-(x-1)$。

4. 无理数和实数

例1　求下列各数的平方根和算术平方根：

（1）144；（2）$\frac{49}{361}$；（3）0；（4）0.04；（5）15。

解　（1）$\because (\pm 12)^2=144$，

$\therefore$　144的平方根是± 12，即

$\pm\sqrt{144}=\pm 12$。

144的算术平方根是12，即

$\sqrt{144}=12$。

（2）∵ $\left(\pm\frac{7}{19}\right)^2=\frac{49}{361}$，

∴ $\frac{49}{361}$的平方根是$\pm\frac{7}{19}$，即

$$\pm\sqrt{\frac{49}{361}}=\pm\frac{7}{19}.$$

$\frac{49}{361}$的算术平方根是$\frac{7}{19}$，即

$$\sqrt{\frac{49}{361}}=\frac{7}{19}.$$

（3）0的平方根与算术平方根均为0，即

$$\pm\sqrt{0}=0,\sqrt{0}=0.$$

（4）0.04的平方根是±0.2，算术平方根是0.2，即

$$\pm\sqrt{0.04}=\pm0.2,$$
$$\sqrt{0.04}=0.2.$$

（5）15的平方根为$\pm\sqrt{15}$；15的算术平方根为$\sqrt{15}$.

例2 求下列各式的值：

（1）$\sqrt{\frac{289}{10000}}$；（2）$\sqrt[3]{-343}$；

（3）$-\sqrt{(-15)^2}$；（4）$\sqrt[3]{(-27)^3}$；

（5）$\sqrt[3]{(-2)^6}$；（6）$\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}$.

解（1）$\sqrt{\frac{289}{10000}}=\frac{17}{100}$；

（2）$\sqrt[3]{-343}=-7$；

（3）$-\sqrt{(-15)^2}=-15$；

（4）$\sqrt[3]{(-27)^3}=-27$；

（5）$\sqrt[3]{(-2)^6}=\sqrt[3]{64}=4$；

（6）$\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}$
$=13$。

例3 下列各数，哪些是有理数？哪些是无理数？

$\frac{1}{9}$，$\sqrt{5}$，3.14，$0.1\dot{3}$，π，$\frac{11377}{99999}$，$\sqrt[3]{27}$，$\sqrt{(\sqrt{2})^4}$，0.151151115…（两个5之间依次增加一个1），0，$\sqrt[3]{-2}$。

解 有理数有：$\frac{1}{9}$，3.14，$0.1\dot{3}$，$\frac{11377}{99999}$，$\sqrt[3]{27}$，$\sqrt{(\sqrt{2})^4}$，0。

无理数有：$\sqrt{5}$，π，$\sqrt[3]{-2}$，0.151151115…（两个5之间依次增加一个1）。

例4 下列说法对不对，为什么？

（1）$(-4)^2$的平方根是4；

（2）$(1-\sqrt{2})^2$ 的算术平方根是 $1-\sqrt{2}$；

（3）$\sqrt{(\pm 100)^2}=\pm 100$；

（4）若$x^2=196$，则$x=\pm 14$；

（5）两个无理数的和、差、积、商仍是无理数；

（6）无限小数都是无理数；

（7）无理数是无限小数；

（8）任何一个非零实数的平方根都有两个。

解 （1）错。$(-4)^2=16$，它的平方根是± 4。

（2）错。应该是$\sqrt{2}-1$。

（3）错。$\sqrt{(\pm 100)^2}=\sqrt{10000}=100$。

（4）对。