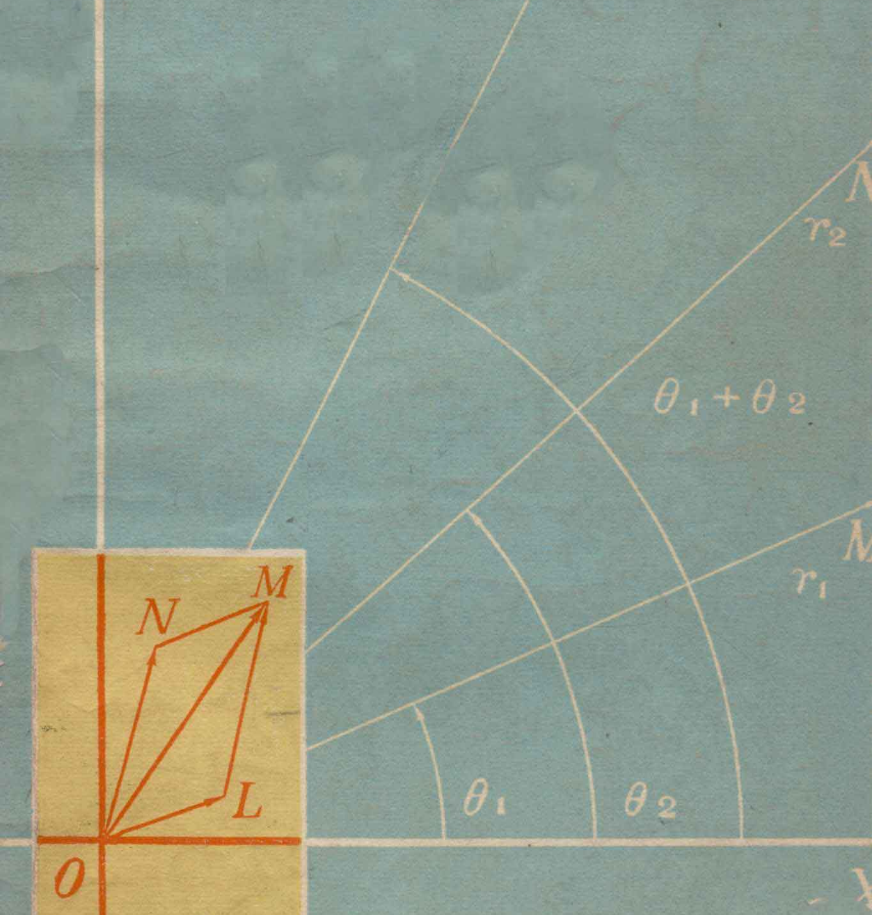
数和数的运算



吉林人民出版社

数 和 数 的 运 算

吉林师大数学系初等数学组编

周 学 海 执笔

吉 林 人 民 出 版 社

数和数的运算

吉林师大数学系初等数学组编

周学海执笔

吉林人民出版社出版

通辽教育印刷厂印刷

吉林省新华书店发行

1975年2月第1版 1975年2月第1次印刷

印数：1—45,000册

书号：7091·812 定价：0.17元

内 容 提 要

本书主要包括下面两方面的内容：一、用辩证唯物主义的观点，阐述数与数的运算的产生和发展；二、讲述数与数的运算的基础知识。本书可作为中学教师的教学参考书，也可作为中学高年级学生的课外读物。

编　者　的　话

这是为初做数学教育工作的教师和中学高年级学生而写的参考读物，它的内容涉及有关数的一些基础知识。为了不与现行中学数学教材内容重复，它只为中学数学中有关数的知识作些补注，而不企图论述数的系统的逻辑结构和它的全部科学内容。由于数与三大革命实践有着密切的关系，同时它又是数学中基本概念之一，因此，我们认为，在中学数学教材中已经讲述过的数的知识以外，为了进一步满足三大革命实践的需要，了解数的更一般的性质（如实数和复数的一些主要性质）还是十分必要的。如果这本读物对于中学数学教学，还能有所助益的话，那是我们所希望的。

编写时，我们注意了从量过渡到数，并力图阐述清楚每次数的概念扩展的实际背景。同时我们在注意运用历史唯物主义和辩证唯物主义观点作指导，突出数与数的运算发展的辩证规律方面也作了初步尝试。

为了使我们能了解到数的历史的辩证的发展过程，在每章前面，对每次数的概念发展过程作了简要的叙述，并且在本书最后又对数与数的运算发展的一般规律作了总的概述。对于阅读历史材料有暂时困难的读者，可以先越过每章前面史料的叙述，待读完本章内容之后，再回过来阅读这些内容，一般说来，就不会再发生困难了。

在编写过程中，我们得到了有关方面的支持和帮助，从中吸取了许多有益的意见，尽管这样，由于我们的水平有限，又缺乏必要的实践经验，同时编写这类的参考读物，对我们来说，还仅仅是个初步尝试，错误和缺点在所难免，希望读者批评指正。

编　　者

一九七四年五月

目　录

绪　论

数学是研究客观世界中空间形式与数量关系的科学。数是物质世界中量的科学抽象，它来源于劳动人民长期的生产实践。伟大导师恩格斯指出：**“科学的发生与发展一开始就是由生产决定的。”**（《自然辩证法》）数的产生和发展也不例外，也是由于人们劳动和实际生活上的需要。数是从计数和度量的需要中逐渐形成和发展起来的。毛主席教导我们：**“一切真知都是从直接经验发源的。”**最初原始人类为了生活的需要，必须外出狩猎，人们关心的问题是外出狩猎有收获还是没有收获？因此就逐步产生了数量的观念，外出狩猎归来，有时猎获品多些，有时就少些，人们常常要对某种物体的集合作数量上的估计，例如，所有参加打猎的人和原有贮存的武器是不是够分。当时，人们就把武器逐个地分配给每一个打猎的人，然后从分配的结果作出相应的判断，逐渐从直接比较事物集合元素多少的性质中，发生和发展了数的概念。

在人类对数量认识的发展过程中，劳动的产物——手，曾起过特殊重要的作用，在没有获得抽象数的概念以前，人们采取取出集合的一个物体，就扳一个手指头，就这样用手指头一个个地数出它们。以后用一只手表示五，整个人表示

二十等等，这里“五”不是抽象的数，而是简单地理解为“就是象手上的指头那样多”而“二十”被理解为“就是象一个人身上所有的手指头和脚趾头那样多”。又如，现今广泛采用的十进制与用手指计数，也有着历史渊源。

在相当长的历史时期里，人类虽然有了直接比较物体集合元素多少的原始方法，这时人类的数量观念都是不脱离开具体内容的，在他们脑海里，要么就是一只野兽，要么就是一棵树或者其它一个什么具体东西。随着人类认识的逐步发展，人们又发现了量具有共同的特征，例如，一棵树与一头野兽是完全不同的两个量，可是它们有一个共同的地方，就是它们都是一个东西；一棵树添上一棵树是二棵树，一头野兽添上一头野兽是二头野兽，这就是说，一个东西添上一个同类的东西总是两个同样的东西。这样一来，把一棵树、二头野兽、三件工具等等的具体内容抛开，就变成了一些抽象的数。这些一、二、三等等的数，在不同的场合中，就可以表示各类量的多寡。

人类就是这样，经过千百万次的实践，由感性材料的积累，达到了理性认识的飞跃，从具体事物集合的性质中抽象出数来，并且引进了数字符号。数字符号的引进，给人们对数的认识起了很重要的作用。人们由一个添上一个，再添上一个……，所得到的一串数量，就变成了1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11……等等抽象概念的数的系统，这就叫做自然数，又叫做正整数。

自从有了自然数以后，就能满足人们一定范围内的生产和实际生活上的计数需要。人们继认识了自然数之后，又产生了分数的概念。分数的最初概念是在度量（如量长度等）的过程中产生的。当被度量的量不是测量单位的整数倍时，为

了更精确的表示量，就需要将测量单位细分，以便用这种较小的单位去测量被测物体，于是就逐渐地产生了分数。当没有什么东西可以计算时，就逐渐形成了数“零”的概念*。自然数、分数（或小数）和零，通常都是放在算术中去学它，我们把它们叫做算术数。

“数是我们所知道的最纯粹的量的规定。”（恩格斯：《自然辩证法》）随着历史的发展，人类对客观世界存在的量的认识，也就逐渐经历着由简单到复杂，由低级到高级发展的过程。

---

*不过，值得我们注意的是，从数的发展史来看，数“零”被引入到数系中来那是比较晚的事情了。

第一章　有理数

在中学数学中，继算术中分数和零被引入数系之后，数的概念的又一次扩展，是引进了负数。使数的范围从算术数扩大到有理数。我们把正整数和分数、负整数和分数以及数0叫作有理数。

关于有理数的知识，大家都知道一些，但是，如果要进一步问一问，为什么要引进负数？在正、负数的运算法则中为什么规定减负就等于加正呢？又为什么规定用一个负数来乘或除另外一个负数所得的结果反而是正数呢？等等。象这样一些问题往往使初学者感到疑惑不解。现在我们就来谈谈这样一些问题。

一、负数的产生

人们计算量的时候，总是希望用数来表示它。但是，在研究客观世界的量的时候，常常碰到一些具有相反意义的量，如温度的上升或下降，行程的向东或向西，财产的收入或支出，某时刻的以前和以后等等。对于这类具有相反意义的量，

仅用算术数表达是不可能的。例如温度的零上5°和零下5°，仅用5表示很难说明它是零上或零下，这样就必须用+5°表示零上5°，-5°表示零下5°。于是就引进了负数的概念。

从历史上来看，负数概念的引入，最先被记载在我国较早的一部数学专门著作《九章算术》中，如在该书“方程”章的牲畜交易问题中，以卖数为正（因收入），买数为负(因付出）；余钱为正，不足钱为负。但是人们对负数的认识还有过曲折的过程，事实上，如果只是为了区别同一种量的相反意义，只要有算术数，再加上“收入”、“上升”、“增加”、“盈余”和“支出”、“下降”、“减少”、“亏损”等等术语也就够了，从而感觉不到引入正、负数概念究竟会有多大的意义。后来，当客观实际促使人们需要用方程的知识来解决错综复杂的正负量之间的关系时，正负数概念及其运算法则，就立即成为必需的了。例如，红星公社治水工程一工地有劳动力250人，二工地有劳动力350人。因工作需要，要使二工地劳动力是一工地劳动力的3倍，应从一工地调多少人到二工地。这个问题列成方程是$3(250-x)=350+x$。解这样的方程，如果没有正负数概念及其运算法则，解起来就要受到种种不必要的限制。数的发展历史告诉我们，负数概念的发展，是和解“方程”的需要有着直接关系的。事实上，《九章算术》“方程”章中的一次方程组，其系数多是可正可负的。在解这些方程时不仅应用了正负数的概念，而且还应用了正负数的运算法则。

值得我们注意的是，我国古代数学家刘徽为《九章算术》作的注文中，反映出我国古代对负数有着极为深刻的认识，注文中说“两算得失相反，要令正负以名之”。用“得失相反”来定义正负数具有高度的概括性，它充分揭露了正负数

概念之间相互依赖的辩证关系。正如恩格斯所指出的：**“代数学上的负数，只是对正数而言，只是在和正数的关系中才是实在的；在这种关系之外，就其本身来说，它们纯粹是虚构的。”**（《自然辩证法》）

二、有理数的运算

在有理数的四则运算中，我们一般都是先规定加法和乘法运算，然后去定义加法的逆运算——减法，乘法的逆运算——除法。尽管有理数（以后涉及的数也同样）的运算法则只是人们所作的一系列规定，这种规定一般用形式逻辑的办法是证明不了的*，但是，我们应当认识到，这种规定是客观事物的规律性的反映，是可以从客观实际当中得到说明的，因而，它们又是可以辩证地得到证明的。正如恩格斯指出的：**“甚至数学上各种数量的明显的相互导出，也并不证明它们的先验的来源，而只是证明它们的合理的相互关系。”**（《反杜林论》）

下面我们谈谈正负数减法、乘法法则是客观事物规律性的反映，是合理的。

1. 减负为什么等于加正？

我们来看下面的例子。

*值得我们注意的是，对于有理数的运算法则，本来是些符合客观实际的规定，而往往有人错误地认为，还要重新推导这些法则（包括符号法则在内），应当认识到，这样做是没有必要的。

某天长春的最低气温为零下5°C，最高气温为零上13°C，问长春这天最高气温与最低气温相差多少度？

我们知道，零下5°C可以表示为-5°C；零上13°C可以表示为+13°C。

从图1.1中可以看出，长春这天只有从-5°C开始上升，总共需要上升18°C，才能达到这天的最高气温13°C。这样，符合实际的规定，长春这天气温差应当是

$$13-(-5)=18 \cdots\cdots (1)$$

另外根据加法运算，我们知道，

$$13+(+5)=18 \cdots\cdots (2)$$

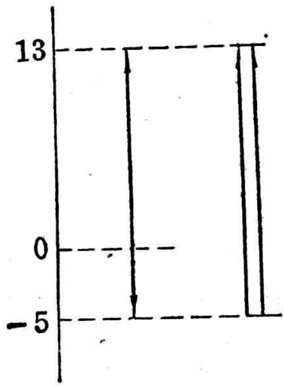


图 1.1

比较(1)、(2)两式，得

$$13+(+5)=13-(-5) \cdots\cdots (3)$$

就是说，减去-5，等于加上-5的相反数+5。同样，下面等式也成立

$$6+(+4)=6-(-4) \cdots\cdots (4)$$

由(3)和(4)式，启发我们可以得到下面规律：

减去一个负数等于加上这个数的相反数（正数）。简言之，减负等于加正。

这个符号法则的合理性还可以用客观实际中大量的事例来说明。例如，某工厂生产某种产品，过去平均每天生产100个成品，其中有2个次品，因此，生产的正品数就只有100-2=98。后来进行了技术革新消灭了废品，这样一来，每天生产的正品数就是98-(-2)=100了。这个事实告诉我们，减少次品就等于增加正品。同样道理，减少支出就等于增加收

入，抽象一点说，就是减负等于加正。

2. 负乘负为什么得正？

也先看看下面的例子。

朝阳人民公社水库管理人员，有一天测得水库水位平均每小时下降 3 毫米，试问上午10点时，水库的水位在什么地方？

如果我们以正午（也就是12点钟）的水位为标准，假设这时的水位为 0，并规定，水位上升为正，下降为负；时间正午以后为正，正午以前为负；比正午水位高为正，比正午水位低为负。于是，从图 1.2 可以看出，水库水位每小时下降 3 毫米，因为相对正午时的水位来说，午前的水位比正午时的水位高，所以正午以前 1 小时比正午时的水位高 3 毫米，2 小时就得高 6 毫米，用正负数来表示，就是

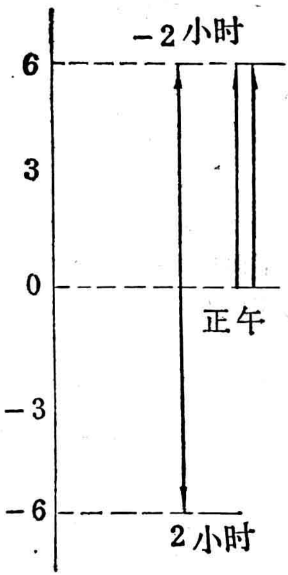


图 1.2

$$(-3)\times(-2)=6$$

上述事实告诉我们，一个负数乘另外一个负数所得的结果反倒是正数了。这就是通常所说的，负乘负得正。

这个符号法则还可以通过客观实例来说明。例如，某火车站是一条东西向的铁路，如果一列火车以每小时 60 公里的速度由东往西开来，问 3 小时以前，火车行驶到距

离该站多远的地方？

我们规定，火车向东行驶时的速度为正，向西时速度为负；由火车站起始向东的距离为正，向西的距离为负；相对火车到站的时间来说，以前为负，以后为正。于是，一列由东往西开来的火车，3 小时以前还在距离该站以东 180 公里的地方，因为火车相对到站以前 3 小时，还在站的东边，这时离火车站的距离是正的。用正负数来表示，就是

$$(-60)\times(-3)=180$$

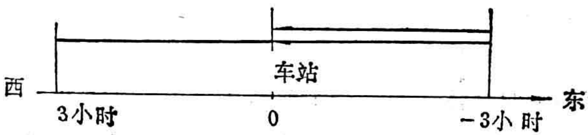


图 1.3

这个实例也说明了负乘负的结果是正的。

三、有理数的稠密性

对于有理数的性质，我们不准备逐一地加以研究，但是，有理数的稠密性，到是有必要来说一说，有理数的稠密性是说，任何两个不相同的有理数之间存在着无穷多个有理数。

有理数的稠密性可以用数轴来直观说明。事实上，设 a、b($a<b$) 为不相等的两个有理数，对应数轴上的点为 A、B（我们把数轴上这样的点称为有理点）。如图1.4，取 A、B 两点的中点 C_1，显然 C_1 点代表的有理数是 $\frac{a+b}{2}$。这就是

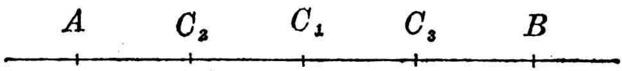


图 1.4

说，在 A、B 两个有理点之间至少存在一个有理点 C_1；同样，在A、C_1与C_1、B之间，还可以找出它们的中点C_2、C_3，分别介于A、C_1 和 C_1、B之间，也就是，在 A、B 之间至少存在三个有理点介于 A、B 之间。这种寻求中间点的手续可以无穷地继续下去，换句话说，在 a、b 之间有无穷多个有理数存在。

有理数集的稠密性是区别自然数集和整数集（即正整数、负整数和零的全体）的一个主要性质，因为任意不相同的两个自然数（或整数）之间，只能有有限个自然数（或整数）介于它们之间。如果我们还要问，任何两个不同的有理数之间是否还存在有理数以外的别的什么数，这个问题在下一章回答。

思 考 题

1. 负数的产生与客观实际有着什么关系？

2. 举例说明什么是具有相反意义的量？

3. 举出实例说明“减负等于加正”的符号法则的合理性。

4. 举出实例说明“负乘负得正”的符号法则的合理性。

5. 如何说明有理数具有稠密性。

第二章　实　　数

在数的系统中，继负数引入数系之后，数的概念的又一次扩展，是引入了无理数，使数的系统从有理数扩大到实数。

一、无理数的产生和发展

在物质世界中，诸如：几个人，几台机床，几件工具等，这样的一些量，由量的一个值过渡到另外一个值，如从一台机床直接就数到两台机床，中间不再有其它的值，象这样的量叫做离散的量；但是，还有另外一种量，如时间、长度、重量、电流强度等等。这样的一些量要从量的任何一个值过渡到另外一个值，必须连续不断地经过中间所有的值才能取得，象这样的量叫做连续变化着的量。人类就是在实践中和理论上，不断寻求度量连续变化着的量的过程中，逐渐地产生和发展了无理数的概念，在不断地解决离散的量与连续的量、近似数与精确数、有限数与无限数的对立面的斗争中，逐步地建立起来了无理数的理论。