俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

Advanced Algebra Course

高等代数教程

[俄罗斯]库洛什 著　柯召 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

高等代数教程

Advanced Algebra Course

[俄罗斯]库洛什 著

柯召 译

HITP

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是根据苏联技术理论出版社出版的库洛什所著的《高等代数教程》1955 年修订版译出的．原书经苏联高等教育部审定为苏联国立大学及师范学院教科书．本书为代数的引论，其主要内容为线性代数多项式理论．除在第十章介绍了环域等基本概念外，在最后一章述及群论初步．

本书可供高等院校本科生、研究生及数学爱好者使用．

图书在版编目(CIP)数据

高等代数教程/(俄罗斯)库洛什著；柯召译．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.1

ISBN 978-7-5603-5487-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①库…②柯… Ⅲ.①高等代数—教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 288902 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 赵新月
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 23 字数 433 千字
版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5487-3
定 价 58.00 元

第六版序

本书第一版发行于 1946 年，嗣后于 1950，1952，1955 和 1956 年再版. 为了反映出莫斯科大学代数教学方面的经验，在第二版和第四版里，本书有了很大的修改. 在准备现在的第六版时，进行了更加重大的修改，甚至于有足够理由把它算作一本新书，而不是原书的第六版.

这次修改有两个目的. 首先是根据多次提出的要求，将本书加以扩充，使它能包含大学里高等代数的全部必要材料，而不是像原来那样，仅供前两学期用. 为此目的，在书中加进了一些新的章节. 其中一章是研究群论的，而其余的都属于线性代数一线性空间的理论，欧几里得空间的理论，λ一矩阵和矩阵若当法式的理论.

自然，苏联现有的代数著作中，有着一系列的份量、内容和叙述的特点上都各有特色的关于线性代数的好书. 即使像现在这样，在这本书中补充了如此大量的材料之后，也不能奢望以此书来代替那些书中任何一本. 但是无可争辩的是，把全部必要材料组织在一本教科书中并用同一体裁来叙述，这对大学生来说是很有帮助的.

另一方面,以前各版所采用的章节安排,早已不符合莫斯科大学实际讲授的顺序,这种新安排在很大程度上决定于必须在规定期限内教完一定份量的解析几何和数学分析教程的需要.特别是三年前,在莫斯科大学采用了新的高等代数教学大纲.在这几年中,它顺利地通过了考验,因而修改教本,把材料安排得完全适合于新的大纲,看来是合理的.有一本适应这个大纲的教科书,可能使苏联国内其他大学更便于采用新的大纲.

我们指出各学期材料的分配.第一学期:一至五章,第二学期:六至九章,第三学期:十、十一、十三和十四章.应该注意,莫斯科大学力学专业的学生只学习前两学期的内容.

无疑地,本书的这些修改对于在师范学院中的使用,并不增加困难,甚至可能更加容易.

本书的前几次修改没有增加任何篇幅.但这次自然不可能再这样做了.为了在某种程度上缩减篇幅,迫使我们除去了某些材料,特别是略去了关于霍维茨定理、代数的理论、勿劳别涅斯定理的章节.但是,在书中只叙述现行大纲中所规定的那些材料似乎是不合理的,也就是说,不能把这本书变作简单的讲义摘要.保留在书中的那些非最必要的材料——用星号标出的那些节,照便是这种性质的材料:它们过去曾被列入高等代数科学家大纲的范围内,而且迄今仍列入有些大学或师范学院的大纲范围内;或者,要是分配给高等代数课的课时多一些的话,它们终归是要列入大纲范围内的.

修订本书时,还变动了某些细节,但这里不细说了.

A·库洛什

1958年12月于莫斯科

◎ 目录

绪　言

数学系学生的数学教育是从学习三个基础课程开始的.这三个课程就是数学分析、解析几何和高等代数.这三个课程在很多地方是有联系的,而且有彼此重复的地方,它们共同构成了近代数学的基础.

本书所讨论的高等代数比初等代数要提高一步,是中学初等代数课程基本内容的很自然的扩展.中学代数课程的中心内容,无疑是关于解方程的问题.读者记得,研究方程是从只含一个未知量的一个一次方程这种简单情形开始的,然后往两个方向发展.一方面,讨论含两个未知量两个一次方程的方程组,以及含有三个未知量三个一次方程的方程组;另一方面,研究一个只含一个未知量的二次方程和某些很容易化为二次方程的特殊类型的高次方程(例如四次方程).

在高等代数课程中,这两个方向都得到进一步的发展,分成高等代数的两大部门.其中一个叫做线性代数基础,它是从研究任意一次方程组(或称线性方程组)这个问题开始的.为解方程个数等于未知量个数的那类线性方程组,就做出了行列式理论这个工具.对于从初等代数的观点看来很不习惯的,但在应用上却很重要的,就是对方程个数不等于未知量个数的线性方程组的研究,而研究这种方程组,行列式这个工具就不够用了,

因此就特别需要做出矩阵的理论来. 矩阵是排列成含一些行和列的正方或长方表的一组数. 矩阵论很深奥，且其应用范围远不只限于线性方程组理论. 另一方面，研究线性方程组时，还要引进多维空间(也叫做向量空间或线性空间)，并对它进行研究. 不懂数学的人，对多维(首先是四维)空间有神秘的而且往往是错误的看法；其实这是一个纯粹数学的概念，甚至于基本上是一个代数概念，只不过它在很多数学研究中，以及在物理学和力学中，是一种重要的工具而已.

高等代数课程的另一半叫做多项式代数，它是研究只含一个未知量但有任意次数的单独一个方程的. 考虑到二次方程有求解公式这个事实，自然就想找出解高次方程的对应公式. 从历史上讲，这部分代数就是这样发展起来的，而且已经在 16 世纪找到了三次和四次方程的求解公式. 以后又开始找五次和更高次方程的求解公式，要借助于根式，可能是多层根式，用方程的系数表示出它的根. 但这是一个失败的尝试. 这种尝试一直继续到 19 世纪初期，最后，证明了这种公式是不可能找到的，而且对于次数等于或高于五次的方程，都有这样的整数系数的具体例子存在，它的根不可能用根式写出来.

找不到高次方程的求解公式并不是很可悲的事情——即使对于三次和四次方程来说，这种公式虽是存在的，但已是非常麻烦而且几乎没有什么实际用途. 另一方面，在解决物理或工程问题时，所提出的方程的系数，常常是由测量而得的数值，只是一些近似值，因而我们也只需要知道根的具有一定准确度的近似值. 这就需要研究求方程近似解的各种方法，在高等代数教程中，我们只说到其中一些简单的方法.

但是多项式代数的中心问题不是具体的找出方程的根，而是研究根的存在问题. 连实系数二次方程都不一定存在实根. 把数扩大到全部复数，任何实系数二次方程就都有根了，而且从三次和四次方程的解的公式来看，这对于它们来说也是正确的. 但是否存在这样的五次或更高次方程，它并没有一个复数根，或是为了求出这种方程的根，必须把复数扩大到更广的一类数呢？我们给出了一个重要的定理来回答这个问题. 这个定理断定了，每一个有任意数值系数的方程，不管它的系数是实数还是复数，都有复数(有特殊情形可能是实数)根，而且一般的说，根的个数和方程的次数是相同的.

我们这样简略地描绘了高等代数教程的内容. 还要指出，高等代数是内容很丰富，分支很多的，经常在发展着代数学的初步知识. 现对高等代数教程范围以外的这些代数分支，试做一个非常简略的描述.

本教程中所讲的线性代数，只是它的初等部分，线性代数基本上是讨论矩阵理论以及和矩阵有关的向量空间线性变换理论的一个大的学科. 和它有关系的还有型论、不变量论和张量代数(对微分几何有重要的作用). 向量空间理论在代数以外的泛函分析(无限维空间)中得到进一步的发展. 由于线性代数在数

学、力学、物理学和技术科学中有多种重要应用，到现在它还在各种代数分支中占首要地位.

有数十年之久，多项式代数发展为研究一个只含一个未知量的任意次方程的学科，现在已经基本上完成了. 它一方面在复变函数论的某些部门中，获得了进一步的发展，基本上成长为域论. 关于域论，我们在下面还要提到. 至于较深奥的，关于有许多未知量不是线性而是任意次方程组的问题，合并了高等代数教程中所研究的两个方向，则在本教程中几乎没有接触到. 这是代数的另一分支——代数几何——所讨论的问题.

方程要适合什么条件才可用根式解出，这个问题已经为法国数学家迦罗瓦(1811—1832)所彻底解决. 他的工作指出了代数发展的新方向，这已经在 20 世纪，由于德国女代数学家艾米·诺特(1882—1935)的工作形成了对于代数学的任务的新的观点. 现在已经是无可置辩的方程的研究不再是代数学的中心任务. 代数学所研究的正确对象，是和数的加法或乘法相类似的，但是任意的，可能不是施行于数的代数运算.

中学生在物理学课程中，已经遇到过力的加法运算. 在大学和师范学院基础课程中所研究的数学分支，已经给出很多代数运算的例子——如矩阵、函数的加法和乘法，对空间变换和对向量的运算等. 这些运算和平常对于数的运算相类似并有同样的名称. 但是为数的运算所常有的某些性质，有时会不再存在. 例如，常常遇到的而且很重要的一些运算是不可易的(乘积和因子的次序有关)，而且有时还是不可群的(三个因子的乘积和括号的安排有关).

只有少数几种很重要的代数体系经过很系统的研究. 我们所说的代数体系是指具有某些性质的元素所构成的集合，而且对于这些元素确定了一些代数运算. 例如域就是这样的一种代数体系. 它和实数系或复数系相类似，在它里面，确定了加法和乘法运算，这些运算都是可易和可群的，适合把它们结合起来的分配律(就是平常的去括号的规则能够成立)，而且都有逆运算——减法和除法——存在. 域论很自然地提供了方程理论进步发展的领域，它的主要分支——代数数域论和代数函数域论又分别使它同数论和复变函数论结合起来. 高等代数教程中包含了域论的初步导引，而教程的某些章节——多未知量的多项式、矩阵的法式——是直接对于任意基域来叙述的.

比域的概念更广泛些的是环的概念. 它和域的不同之处是，在环里不要求可施行除法，且乘法也可能是不可易的，甚至于是不可群的. 全部整数(包括负整数)，只含一个未知量的全部多项式和全部有实变数的实函数都可作为环的简单例子. 环论包含了如超复数系论和理想数论这些古老的代数分支，它和许多数学学科，特别是和泛函分析有关联，而且在物理学中已经得到一些应用. 高等代数教程中实际上只包含了环的概念的定义.

还有应用范围很广的分支叫群论. 群是指这样的代数体系,它只有一个基本运算,这个运算虽然不是一定可易的,但必须是可群的,而且对于这个运算有逆运算存在——如果把基本运算叫做乘法,那么它的逆运算就叫做除法. 例如全部整数的集合对于加法运算来说,全部正实数的集合对于乘法运算来说都构成群. 群在迦罗华理论中,在关于方程的根式可解性问题上已经起了很大的作用,近来它们在域论中,在几何的很多分支中,在拓扑学中,还在数学以外的结晶学中,在理论物理学中,都是重要的工具. 总之,由于群论的广大应用范围,它在所有的代数分支中所占的地位仅次于线性代数. 这本教程中,有一章是研究群论基础的.

就在近一二十年中提出并且发展了一个新的代数领域叫做结构论(另一中文译名叫格论). 结构是指这样的代数体系,它有两个运算——加法和乘法. 这些运算必须是可易和可群的,而且还要适合下面的条件:一个元素同它自己的和与积仍旧等于它自己;如果两个元素的和等于其中的一个,那么它们的积就等于另一个,反过来也是对的. 对于全部自然数,其对应运算为取最小公倍数和取最大公约数,就是结构的一个例子. 结构论和群论、环论以及集合论有很多有趣味的联系;一个古老的几何分支——投影几何,基本上是结构论的一部分;还要提到的是结构论在电路网络理论中有它的用途.

在群论、环论和结构论的某些部门之间,存在着显著的类似点,这就提出了代数体系的一般理论(或泛代数论). 到现在为止,对这些理论只是做了些初步工作,但是已经描绘出它的轮廓,而且发现它和数理逻辑有关系,大有发展前途.

上面所做的概述中,当然不能包含代数学所有的各式各样的内容. 特别是在其他数学领域的边缘上,有代数的若干部门存在. 如拓扑代数,它研究这样的代数体系,在这个体系(例如实数系)中,对其元素所定的某些收敛过程来说,运算是连续的. 和拓扑代数邻近的有连续群(或者叫做李群)论,它在几何的若干不同问题中,在理论物理中,在水力学中都有很多的应用. 此外,李群论又交织着代数方法、拓扑方法、几何方法与泛函方法,具有独出的特点,可以把它看作数学中独特的分支. 还有有序代数体系理论,是结合几何基础的研究而产生的,它在泛函分析中找到了应用. 最后,微分代数学已经开始发展,建立了代数学和微分方程论之间的新的关系.

无可否认的,代数学的辉煌发展达到今天的成就,绝不是偶然的现象——它是数学总的发展的一部分,在很大程度上是为了满足其他数学科学对代数学的要求而引起的. 另一方面,由于代数学自身的发展对于其他邻近分支的发展,已经显示出而且还在显示出很大的影响,还由于其应用范围的广大(这是近世代数的特征),所以有时我们甚至说今日数学中所谓"代数化"的趋势格外加强了.

上面对代数学的描述，不但很简略，而且还没有给出关于这个学科的发展简史. 所以我们将以对代数学史的简短描述来结束我们的绪言.

有些代数问题，特别是解最简单的方程，已经为巴比伦人，而后为古代希腊数学家所知道. 这个时期代数研究的高峰是希腊（亚力山大的）数学家丢番图（公元 3 世纪）的工作. 而后这些研究为印度数学家阿里阿勃赫塔（6 世纪），勃勒马哥泼塔（7 世纪）、勃赫斯卡勒（7 世纪）所发展. 在中国张苍（公元前 2 世纪）和耿寿昌（公元前 1 世纪）很早就从事于代数问题的研究①. 秦九韶（13 世纪）是很伟大的中国代数学家②.

中世纪时东方的数学家对于代数学的发展有很大的贡献. 在这些用阿拉伯文字写的著作中，特别是中亚细亚学者乌兹别克人穆罕默德 · 阿尔 · 花剌子模（9 世纪）和塔吉克数学家兼诗人奥马 · 卡扬（1040—1123）. 特别是“алгебра”（代数学）这个字就是起源于阿尔 · 花剌子模所写的书的名字“Аль-Джебр аль-мукабала”.

上面提到的巴比伦、印度、希腊、中国和中亚细亚代数学家所研究的，都是现在初等代数课程教学大纲里面的代数问题，只是偶尔接触到三次方程. 西欧中世纪代数学家和 15 世纪文艺复兴时代的代数学家的工作，主要也还停留在这些问题的范围内；我们提出意大利数学家比萨的利奥拿陀（费旁拿吉）（12 世纪）和近世代数学符号的创造者法国数学家韦达（1540—1603）. 还有，已经在前面说到过，16 世纪数学家曾经求出解三次和四次方程的方法；这里要提出他们名字的，就是意大利的费罗（1465—1526）、塔塔利阿（1500—1557）、卡丹（1501—1576）和费拉黎（1522—1565）.

在 17 世纪和 18 世纪中，着重对方程的一般理论（即多项式代数）进行了很多工作，有很多数学家参加了这一工作，其中有法国的笛卡儿（1596—1650），英国的牛顿（1643—1727），法国的达朗贝尔（1717—1783）和拉格朗日（1736—1813）. 18 世纪，瑞士数学家克莱姆（1704—1752），法国数学家拉普拉斯（1749—1827）又开始构成了行列式的理论. 在 18 世纪和 19 世纪交替的时候，德国数学家高斯（1777—1855）证明了前面提到过的关于数值系数方程有根存在的基本定理.

在 19 世纪的最初 30 年，代数学史的标志是解决了用根式解方程的可能性问题. 对于五次和五次以上的方程，意大利数学家鲁菲尼（1765—1822）证明了不可能有求解公式，而更严密的证明则为挪威科学家阿贝尔（1802—1829）所得

① 张苍，耿寿昌都是汉初人，曾删补九章. ——译者注

② 秦九韶，字道古，宋人，著数学书十八卷. ——译者注

出.前面已提到,对于有根式解存在的方程应适合的条件是由迦罗瓦所彻底解决的.

在19世纪中叶和后半世纪,迦罗瓦理论推动了代数学的发展,使代数学走向新的方向.出现了代数数域和代数函数域的理论以及和它相关的理想数论.在这里我们要提出德国数学家库默尔(1810—1893),克朗内格(1823—1891)和戴狄金(1831—1916),俄国数学家Е·Й·若洛大列夫(1847—1878)和Г·φ·伏罗诺伊(1868—1908).比拉格朗日和迦罗瓦的工作更进一步的有限群论,得到很大的发展;在这方面工作的有法国数学家柯西(1789—1857)和若尔当(1838—1922),挪威数学家锡洛(1832—1918),德国代数学家弗劳别涅斯(1849—1918)和霍德尔(1859—1937).连续群论是从挪威数学家S·李(1842—1899)的工作开始的.

英国学者哈密登(1805—1865)和德国数学家格拉斯曼(1809—1877)的工作开始了超复数系的理论,或现所谓代数理论.俄国数学家φ·Э·莫林(1861—1941)在19世纪末期的工作对于代数学的这个分支的进一步发展起了很大的作用.

线性代数在19世纪获得了光辉的成就,这首先要归功于英国数学家薛尔凡斯透(1814—1897)和凯莱(1821—1895)的工作.多项式代数的研究也在继续;我们只提出俄国几何学家Н·И·罗巴切夫斯基(1792—1856)所发现的求方程近似解的方法,和德国数学家霍维茨(1859—1919)的工作.在后半世纪开始创立代数几何学,特别要提出的是德国数学家M·诺透(1844—1922)的工作.

到20世纪,代数学的研究获得了广阔的天地,正如我们已经知道的,代数学在数学中占有很光荣的地位.在这一时期,代数学发展了很多新的分支,包括域的一般理论(10年代),环论和群的一般理论(20年代),拓扑代数和结构论(30年代),在40年代和50年代,出现了半群论和拟群论、泛代数论、同调代数学、范畴论.在所有这些代数部门中,有很多科学家在进行工作,做出了巨大贡献,在许多国家中,特别是在苏联,形成了很多代数学派.

革命前俄国的代数学家中,除了上面提到的外,还应提到C·O·萨都诺夫斯基(1859—1929)和Д·A·格拉伟(1863—1939).但是苏联代数学的研究只在伟大的十月革命以后才有现在的光辉成就.几乎在所有代数学的领域内,都在进行工作,而且在许多方面,苏联代数学家的工作已经起了领先作用.我们只提出两个名字来——Н·Г·切巴大略夫(1894—1947)(在域论和李群方面工作)和O·Ю·施密特(1891—1956)(知名的极地探险家和代数学家,创立了苏联抽象群学派).

在结束我们对于代数学的近代情况和发展过程的简略描述时,我们再一次指出,这里所说的问题基本上超越了高等代数教程的范围. 这个简略的描述只是帮助读者对于高等代数教程在整个代数学以及数学大厦中所占的地位获得正确的了解.

线性方程组,行列式

第一章

§1 依次消去未知量的方法

我们先来研究含有几个未知量的一次方程组,即通常所谓的线性方程组①.

线性方程组的理论是代数学的一个重要大分支 —— 线性代数的起点,本书的大部分章节,特别是前三章,就是讨论这个分支的.在这三章中所考虑的方程的系数、未知量的值以及一般所遇到的数,都是指实数.但是这几章的内容对任意复数的情形也都完全适用.对于复数,读者早在中学课程中知道了.

和初等代数不同,我们所讨论的方程组有任意多个方程和未知量,而且有时在方程组里面的方程个数也不一定要等于未知量的个数.假设给出有 s 个方程 n 个未知量的线性方程组,

① 因为解析几何中两个未知量的一次方程确定平面上的一条直线,所以才有这个名称.

约定用下面的符号:我们用 x 附加下标来表示未知量:$x_1,x_2,\cdots,x_n$;把方程按照次序来编号 —— 叫做第一,第二,…,第 s 个方程;把第 i 个方程中未知量 x_j 的系数记为 a_{ij}①;最后,用 b_i 来记第 i 个方程的常数项.

现在可以把我们的线性方程组写成下面的普遍形式

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\quad\vdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s\end{cases}\tag{1}$$

未知量的系数构成一个矩形数阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}\tag{2}$$

叫做 s 行 n 列矩阵;数 a_{ij} 叫做矩阵的元素②. 如果 $s=n$(即行数等于列数),那么把它叫做 n 阶方阵. 这个矩阵里面从左上方到右下方的(也就是由元素 a_{11}, $a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所组成的)对角线,叫做主对角线. 如果在 n 阶方阵的主对角线上的元素都等于 1,主对角线外的元素都等于零,那么这个方阵叫做 n 阶幺矩阵.

线性方程组(1)的解是指这样的一组(n个)数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$③,在以数 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 分别代换未知量 x_i 后,方程组(1)中每一个方程就都化作恒等式.

线性方程组可能一个解都没有,这时我们把它叫做矛盾的方程组. 例如,下面就是这样的方程组

$$\begin{cases}x_1+5x_2=1\\x_1+5x_2=7\end{cases}$$

这些方程的左边是完全相同的,但它们的右边不同,因此没有一组未知量的值可以使两个方程同时适合.

如果线性方程组有解,那么我们说它是相容的. 如果相容线性方程组只存在一个唯一的解,我们说它是有定的 —— 在初等代数里面,只讨论这样的方程组. 如果相容方程组的解多于一个,我们说它是不定的;我们在后面就会知道,这时它的解将有无穷多个. 例如方程组

---

① 我们利用两个下标,前一个下标是指方程的序数,而后一个下标是指未知量的序数. 为简便,并不用分点来把它们分开,所以 a_{11} 不读为"a 拾一"而读为"a 一一",a_{34} 不读为"a 三十四"而读为"a 三四",依次类推.

② 这样一来,如果不从方程组(1)的关系来讨论矩阵(2),那么元素 a_{ij} 的第一个下标表示行数,第二个下标表示列数,这一个元素位于它们相交的地方.

③ 注意,数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 构成方程组的一个解而不是 n 个解.