特级教师

教学优化设计

DAISHU

高一

代数

南京师范大学出版社

目　录

01　集合的概念

【概念与规律】

1. 集合是数学中最原始的概念之一，我们不能用其他更基本的概念来给它下定义，所以也把它叫做不定义的概念或原始概念. 我们只能描述性的说明.

2. 集合中的元素具有三个特性：

(1)确定性. 任何一个对象都能被确切地判断是集合中的元素或不是集合中的元素.

(2)互异性. 同一集合中不应重复出现同一元素.

(3)无序性. 用列举法表示的集合中的元素与顺序无关. 但在表示某些无限集时，书写时应显示其规律并用省略号代表其余的元素.

3. 集合的两种表示法：列举法和描述法.

列举法是把给定集合中的元素不重不漏、不计次序地一一列出，放在集合符号“{　　}”内；描述法表示集合的形式都是$\{x|P\}$，竖线前面的x是此集合的代表元素，竖线后的P指出元素x所具有的公共属性. 两种表示法各有优点，选用哪种方法，要视具体问题而定.

【讲解设计】·重点与难点

例 1　设$A=\{x|x^2+(b+2)x+b+1=0,b\in\mathbf{R}\}$，求$A$中所有元素的和.

解　$\because\Delta=(b+2)^2-4(b+1)=b^2\geqslant0$，方程有实数解，当$b=0$时，方程有二等根$x_1=x_2=-1$，此时方程的解集$A=\{-1\}$，$\therefore S=-1$；当$b\neq0$时，由韦达定理$x_1+x_2=-(b+2)$，此时$A$中所有元素的和$S=-(b+2)$. $\therefore A$中所有元素的和$S=\begin{cases}-(b+2) & b\neq0,\\ -1 & b=0.\end{cases}$

点评　①此题要注意$\Delta=0$时，方程有两个等根$x_1=x_2=-1$，根据集合中合素的“互异性”，此时方程的解集$A=\{-1\}$，$\therefore S=-1$而不是$S=x_1+x_2=-2$.

②在用集合来表示方程的解集时，要注意到集合中元素的互异性，如方程$(x-1)^2(x+2)=0$的解集，不能表达成$\{1,1,-2\}$，而应该写成$\{1_{(2)},-2\}$，其中元素1的右下角括号内的2表明1是方程的一个二重根，但在解集中只算作一个元素.

例 2　下列表述是否正确，说明理由.

(1)$\mathbf{Z}=\{$全体整数$\}$；

(2)$\mathbf{R}=\{$实数集$\}=\{\mathbf{R}\}$；

(3)$\{(x,y)|x=1,y=2\}$；

(4)$\{(1,2)\}=\{1,2\}$.

解　(1)集合符号“{　　}”已包含有“所有的意思”，因而应写成$\mathbf{Z}=\{$整数$\}$.

(2)“{　　}”就是集合的符号，因而大括号内的文字描述，不应再用“全体”、“所有”、“全部”或“集”等词语，本题的正确写法是：$\mathbf{R}=\{$实数$\}$，而$\{\mathbf{R}\}$表示以一个实数集为元素的集合，它与$\mathbf{R}$的关系是$\mathbf{R}\in\{\mathbf{R}\}$，用$\{\mathbf{R}\}$表示实数集显然是不对的.

(3)由于集合的代表元素为有序实数对(x,y)，因而该集合表示直角坐标平面上的点集，这里$x=1$和$y=2$之间用“,”号连接，说明它们之间是并列关系，很易使人误解为该集合表示直线$x=1$或直线$y=2$. 正确的写法是$\{(x,y)|x=1$且$y=2\}$或$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\right\}$.

(4)$\{(1,2)\}$表示直角坐标平面中的一点$(1,2)$，而$\{1,2\}$是数1,2的集合，它们是不可能相等的.

【讲解设计】·思路与方法

例 3　求集合$\{1,x,x^2-x\}$中x所应满足的条件.

提示　利用集合中元素的互异性.

例 4　用列举法表示集合$\{x|(x+1)(x-\frac{2}{3})(x^2-2)(x^2+1)=0,x\in\mathbf{Q}\}$.

提示　在有理数范围内求解方程.

例 5　已知集合$A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$只有一个元素，试求$a$的值，并求出这个元素.

提示　为使方程只有一个根，须$a=0$或$a\neq0$时$\Delta=4-4a=0$.

$-x^2+4x+4$　　$16+16$

【练习设计】·识记与理解

1. 不等式 $3-5x>1$ 的解集是________.

2. 用符号 $\in$，$\notin$ 填空：

$\sin30°$____ $\mathbf{Q}$，$\cos30°$____ $\mathbf{Q}$，

$\sin45°$____ $\mathbf{R}^{+}$，$\mathrm{tg}45°$____ $\mathbf{N}$.

3. 由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合，最多含有（　）.

A. 2 个元素　　B. 3 个元素

C. 4 个元素　　D. 5 个元素

4. 在以下五个命题中：

(1)所有的小正数组成一个集合；

(2)$1,\frac{3}{2},\frac{6}{4},\left|-\frac{1}{2}\right|,0.5$，这些数组成的集合有五个元素；

(3)集合 $\{1,3,5,7\}$ 与集合 $\{1,3,7,5\}$ 表示同一个集合；

(4)集合 $\{y\mid y=x^2-1\}$ 与集合 $\{(x,y)\mid y=x^2-1\}$ 是同一个集合.

其中正确的命题有（　）.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

5. 方程组 $\begin{cases}x-y+1=0,\\2x+y-4=0\end{cases}$ 的解集可表示为 (1)$(1,2)$；(2)$\{(1,2)\}$；(3)$\{x,y\mid x=1,y=2\}$；(4)$\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}(5)\left\{(x,y)\;\middle|\;\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\right\}$，则以上表示正确的个数有（　）.

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

6. 下列集合中，哪些是有限集，哪些是无限集？

$A=\{x\mid x^2-1=0\}$；

$B=\{(x,y)\mid y=x^2-1\}$；

$C=\{y\mid y=x^2-1\}$；

$D=\{x\mid x^2-1<0\}$.

7. 用列举法表示下列集合：

$A=\{x\mid |x|\leqslant1,x\in\mathbf{Z}\}$；

$B=\{(x,y)\mid x+y=4,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

【练习设计】·巩固与掌握

8. 被 3 除余 1 的正整数集合是________，被 3 除余 2 的整数集合是________.

9. 集合 $A=\left\{x\;\middle|\;x=\frac{a^2-2a+1}{a-1},a\in\mathbf{Z},a\neq1\right\}$，若 $x\in A$，则(1)$x\in\mathbf{N}$；(2)$x\in\mathbf{Z}$；(3)$x\in\mathbf{Q}$；(4)$x\in\mathbf{R}$，其中正确的有（　）.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

10. 与命题"若 $a\in M$，则 $b\notin M$"等价的命题是（　）.

A. 若 $a\notin M$，则 $b\in M$

B. $a\in M$ 或 $b\notin M$

C. 若 $b\notin M$，则 $a\in M$

D. 若 $b\in M$，则 $a\notin M$

11. 用描述法表示下列集合：

(1){正偶数}；

(2)$\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots\right\}$.

12. 已知集合 $A=${小于 6 的自然数}，$B=${小于 10 的质数}，$C=${24 和 36 的正公约数}，用列举法表示：

(1)$\{y\mid y\in A$ 且 $y\in C\}$；

(2)$\{y\mid y\in B$ 且 $y\overline{\in}C\}$.

【练习设计】·拓展与迁移

13. 已知 $A=\left\{x\;\middle|\;\frac{6}{3-x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{Z}\right\}$，试用列举法表示集合 A.

14. (1)设 x,y,z 都是非零实数，试用列举法将 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 可能取的值组成的集合表示出来；

(2)用描述法表示不超过 30 的非负偶数的集合；

(3)用描述法写出直角坐标平面内坐标轴上的点的坐标所组成的集合.

02　子集

【概念与规律】

1. 正确理解子集的概念和集合相等的意义. 若任一 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$;若 $A\subseteq B$ 且至少存在一个 $x\in B$ 但 $x\notin A$,则 $A\subset B$;若 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$,则 $A=B$.

2. 空集是一个特殊的集合,它不含任何元素,是任何一个非空集合的真子集,任何非空集合 A 都有两个特殊的子集:$A\subseteq A$,$\varnothing\subseteq A$. 同时要注意,不要把数 0、集合{0}与空集$\varnothing$混淆. 数 0 不是集合,{0}是含有一个元素 0 的集合.

3. 关于有限集的子集个数有如下一般结论:若有限集 A 中有 n 个元素,则 A 的子集共有 2^n 个,非空子集有 2^n-1 个,非空真子集有 2^n-2 个.

【讲解设计】·重点与难点

例 1　判定下列集合之间的包含关系或相等关系:

(1)$A=\{x\mid x=2m-1,n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x\mid x=4n\pm1,n\in\mathbf{Z}\}$;　A=B

(2)$A=\{x\mid x=2m,m\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x\mid x=4n\pm2,n\in\mathbf{Z}\}$;

(3)$A=\{x\mid x=-a^2+4,a\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y\mid y=-b^2+3,b\in\mathbf{R}\}$;

(4)$A=\{x\mid\sqrt{x+1}=x-1\}$,$B=\{x\mid x+1=(x-1)^2\}$;　x=3　x=0, x=3

(5)$A=\{(x,y)\mid x+y>0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,
$B=\{(x,y)\mid x>0,y>0,x,y\in\mathbf{R}\}$.

解　(1)∵$A=\{$奇数$\}$,$4n\pm1(n\in\mathbf{Z})$必是奇数,∴$B\subseteq A$.

又∵当 m 为偶数时,设 $m=2n(n\in\mathbf{Z})$,

则 $2m-1=4n-1$;当 m 为奇数时,设 $m=2n+1(n\in\mathbf{Z})$,则 $2m-1=4n+1$.

由此可见,不论 m 是何整数,$2m-1\in B$.

故 $A\subseteq B$.

综上所述:$A=B$.

(2)易知 $B\subseteq A$,又∵0 [illegible],但 $0\notin B$,∴$B\subset A$.

(3)∵$-a^2+4\leqslant4$,$-b^2+3\leqslant3$,

∴$A=\{x\mid x\leqslant4\}$,$B=\{y\mid y\leqslant3\}$.

∴$A\supset B$.

(4)由$\sqrt{x+1}=x-1$ 得　$x+1=(x-1)^2$,

即 $x^2-3x=0$　解得 $x_1=3$,或 $x_2=0$.

经检验 $x_1=3$ 是$\sqrt{x+1}=x-1$ 的解而 $x_2=0$ 是增根.

∴$A=\{3\}$.

由$(x+1)=(x-1)^2$ 得　$x_1=3$,或 $x_2=0$,

∴$B=\{0,3\}$.

∴$A\subset B$.

(5)∵若 $x>0,y>0$,则必有 $x+y>0$,

∴$B\subseteq A$.

又∵若 $x=-1,y=2$ 时,$x+y>0$,

∴$(-1,2)\in B$.

又∵$x=-1<0$,∴$(-1,2)\notin B$,

∴$B\subset A$.

点评　①如果要证明 $A=B$,只要证明 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 同时成立即可.

②已知 $A\subseteq B$,说明 $A\subset B$,并不需要将属于 A 而不属于 B 的所有元素无一遗漏地全部列出,而只需举一个反例即可,例如:$0\in A$,但 $0\notin B$,可得出结论 $A\subset B$.

③注意集合表示的意义,它与表示集合时所采用字母的名称无关.

例 2　已知集合 $P=\{x\mid x^2+x-6=0\}$,$Q=\{x\mid mx-1=0\}$,若 $Q\subset P$,求实数 m 的取值范围.

解　易知 $P=\{-3,2\}$.

令$\frac{1}{m}=-3$ 和$\frac{1}{m}=2$,得 $m=-\frac{1}{3}$和 $m=\frac{1}{2}$.

点评　上述解法遗漏了一解:$m=0$,∵当 $m=0$ 时,$Q=\varnothing$,此时仍有 $Q\subset P$,故 m 的值应是三个:$-\frac{1}{3}$,$\frac{1}{2}$和 0.

【讲解设计】·思路与方法

例 3　设集合 $A=\{1,3,a\}$,$B=\{1,a^2-a$

$+1\}$，$A\supseteq B$，求 a 的值.

提示 $\because A\supseteq B$，$\therefore a^2-a+1$ 有两种可能取值：$a^2-a+1=3$ 或 $a^2-a+1=a$.

例 4 设两个集合 $S=\{x\,|\,x=12m+8n,m,n\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\,|\,x=20p+16q,p,q\in\mathbf{Z}\}$，试证明 $S=P$.

提示 ①要证明 $S\subseteq P$ 和 $S\supseteq P$.

②若 $x\in S$，则 $x=20(3m+2n)+16(-3m-2n)\in P$，$\therefore S\subseteq P$，同理可得 $P\subseteq S$.

【练习设计】·识记与理解

1. 下列六个关系式：①$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$，②$\{a,b\}=\{b,a\}$，③$\{0\}\supset\varnothing$，④$0\in\{0\}$，⑤$\varnothing\in\{0\}$，⑥$\varnothing=\{0\}$，其中正确的个数是（ ）.

A. 6 B. 5 C. 4 D. 小于 4

2. 下列四个命题：①空集没有子集；②空集是任何集合的真子集；③空集 $\varnothing=\{\varnothing\}$；④任何一个集合必有两个或两个以上的子集，其中正确的有（ ）.

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

3. 用适当的符号（$\in,\overline{\in},=,\subset,\supset$）填空：

(1) 3.14 ______ $\mathbf{Q}$；

(2) $\{3.14\}$ ______ $\mathbf{Q}$；

(3) $\{x\,|\,x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$ ______ $\{x\,|\,x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$；

(4) $\{(x,y)\,|\,x+y=7,x,y\in\mathbf{N}\}$ ______ $\{(x,y)\,|\,x+y=7,x,y\in\mathbf{Z}\}$；

(5) $\{x\,|\,\frac{x-3}{x-2}\leqslant 0\}$ ______ $\{x\,|\,x^2-5x+6\leqslant 0\}$.

4. (1) 满足 $\{a,b\}\subseteq A\subset\{a,b,c,d\}$ 的集合 A 有__________.

(2) 满足 $\{1,2,3\}\subset B\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 B 有______

5. 设 $M=\{$菱形$\}$，$T=\{$平行四边形$\}$，$P=\{$正方形$\}$，指出 M,T,P 之间的关系.

6. 下列各题中不能认为集合的是（D）.

A. $\{ax^2+bx+c=0\,|\,a,b,c\in\mathbf{R},a\neq 0\}$

B. $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

C. $\{a,b,\{a,b\}\}$

D. $\{1,2,\pi,\sqrt{3},\cdots\}$ 确定性

【练习设计】·巩固与掌握

7. 集合 $\{4,5,6\}$ 的子集的个数有（ ）.

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

8. 已知非空集合 P 满足：①$P\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，②若 $a\in P$，则 $6-a\in P$，符合上述要求的集合 P 的个数是（ ）.

A. 4 B. 5 C. 7 D. 31

9. 若集合 $A=\{x\,|\,-3<x<5\}$ 与 $B=\{x\,|\,x<a\}$ 满足 $A\subset B$，则实数 a 的取值范围是________.

10. 设集合 $A=\{0,1\}$，集合 $B=\{x\,|\,x\subseteq A\}$，则 A 与 B 的关系是______.

11. 已知 $A=\{x\,|\,x=n,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\,|\,x=\frac{n}{2},n\in\mathbf{N}\}$，$C=\{x\,|\,x=n+\frac{1}{2},n\in\mathbf{N}\}$，$D=\{x\,|\,x=n\pm\frac{1}{2},n\in\mathbf{Z}\}$，则 A ______ B，B ______ C，B ______ D，C ______ D.

12. 下列各组集合是否相等：

(1) $A=\{0\}$，$B=\{x\,|\,x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$；

(2) $A=\{x\,|\,x=a+1,a$ 为偶数$\}$，$B=\{2y\,|\,y=b+\frac{1}{2},b\in\mathbf{Z}\}$；

(3) $A=\{n$ 条边都相等的多边形$\}$，$B=\{n$ 个内角都相等的多边形$\}$.

n=3时两相等
n≠3时 A≠B

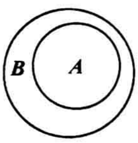
03　交集

【概念与规律】

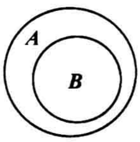
1. 书上除了用文字给出交集的定义外，还给出了交集定义的数学表达式：$A\cap B=\{x\mid x\in A，且\ x\in B\}$，即 $A\cap B$ 是所有 A、B 中的公共元素组成的集合，因此 $A\cap B$ 中的元素既有集合 A 的属性，又有集合 B 的属性.

2. 交集有如下性质：①$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；②$A\cap B=B\cap A$；③$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；④$A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$，反之也成立；⑤若 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$.

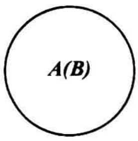
3. 两集合 A、B 的交集用文氏图表示有以下几种情况.



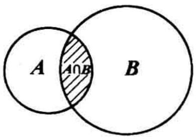
（Ⅰ）若 $A\subset B$，
则 $A\cap B=A$



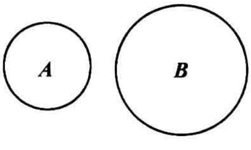
（Ⅱ）若 $B\subset A$，
则 $A\cap B=B$



（Ⅲ）若 $A=B$
则 $A\cap B=A=B$



（Ⅳ）若 A 与 B 相交，
（有公共元素，但互不包含）
则 $\varnothing\subset A\cap B\subset A$，
$\varnothing\subset A\cap B\subset B$.



（Ⅴ）若 A 与 B 分离（无公共元素）
则 $A\cap B=\varnothing$

【讲解设计】·重点与难点

例 1　设 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$，$B=\{9,a-5,1-a\}$，已知 $A\cap B=\{9\}$，求实数 a 的值.

解　$\because A\cap B=\{9\}$，$\therefore 9\in A$.

若 $2a-1=9$，则 $a=5$，此时 $A=\{-4,9,25\}$，$B=\{9,0,-4\}$，$A\cap B=\{9,-4\}$，与已知矛盾，应舍去.

若 $a^2=9$，则 $a=\pm3$.

当 $a=3$ 时，$A=\{-4,5,9\}$，$B=\{-2,-2,9\}$，B 中有两个元素都是 -2，与集合中元素的互异性矛盾，应舍去.

当 $a=-3$ 时，$A=\{-4,-7,9\}$，$B=\{9,-8,4\}$，符合题意.

综上所述 $a=-3$.

点评　当集合的元素用字母或含有字母的式子表示时，对所求得的结论一定要检验，凡与已知条件或元素与集合关系的两个基本特征——确定性、互异性相矛盾的结果应舍去.

例 2　已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，集合 $B=\{x\mid x^2+2x-8>0\}$，集合 $C=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$，若 $C\supseteq A\cap B$，试确定实数 a 的取值范围.

解　易知 $A=\{x\mid -2<x<3\}$，$B=\{x\mid x<-4\ 或\ x>2\}$，$A\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$.

$\because C=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}=\{x\mid (x-a)\cdot(x-3a)<0\}$，

$\therefore$ 当 $a>0$ 时，$C=\{x\mid a<x<3a\}$；

当 $a<0$ 时，$C=\{x\mid 3a<x<a\}$；

当 $a=0$ 时，$C=\varnothing$，此时 $C\supseteq A\cap B$ 是不可能的.

(1)当 $a>0$ 时，如图 03-1.

$$C\supseteq A\cap B\Leftrightarrow\begin{cases}a\leqslant 2,\\ 3a\geqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow 1\leqslant a\leqslant 2.$$

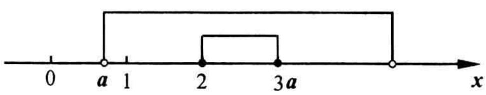


图 03-1

(2)当 $a<0$ 时，C 是负半轴上的一个区间，而 $A\cap B$ 是正半轴上的一个区间，因此 $C\supseteq A\cap B$ 是不可能的.

综上所述：$1\leqslant a\leqslant 2$.

点评　①在求交集时，应首先识别集合的

元素属性及范围，并化简集合. 对于数集可以借助于数轴直观，以形助数得出交集.

②讨论数轴上区间的覆盖时，要处理好端点的取舍. 本题条件 $C\supseteq A\cap B$，若判断为等价于 $\begin{cases}a<2,\\3a>3.\end{cases}$ 就缩小了 a 的取值范围.

【讲解设计】·思路与方法

例 3 记 A、B 分别是二次方程：$2x^2+px+q=0$ 与 $6x^2+(2-p)x+5+q=0$ 的解集，且 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，求集合 A、B.

提示 $\because A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，$\therefore \frac{1}{2}\in A$，$\frac{1}{2}\in B$.

$\therefore \begin{cases}p+2q+1=0,\\2q-p+15=0.\end{cases}$ 解得 $q=-4$，$p=7$.

例 4 已知集合 $A=\{x\mid x^2+tx+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^-=\varnothing$，求实数 t 的取值范围.

提示 $\because A\cap\mathbf{R}^-=\varnothing$，$\therefore$ 有两种情形 $A=\varnothing$ 或 A 中元素是非负实数.

【练习识记】·识记与理解

1. 已知集合 $M=\{x\mid -3<x<2\}$，$p=\{x<-\sqrt{2}$ 或 $x>\sqrt{2}\}$，那么 $M\cap P$ 是(　).

A. $\{x\mid -3<x<-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<x<2\}$

B. $\mathbf{R}$

C. $\{x\mid -3<x<\sqrt{2}\}$

D. $\{x\mid \sqrt{2}<x<2\}$

2. 若集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=0\}$，$P=\{(x,y)\mid x-y=2\}$，则 $M\cap P$ 是(　).

A. $(1,-1)$　B. $\{x=1\}$ 或 $\{y=1\}$

C. $\{1,-1\}$　D. $\{(1,-1)\}$

3. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B\subset A$，且 $1\in A\cap B$，$5\overline{\in} A\cap B$，则满足上述条件的集合 B 的个数是(　).

A. 7　B. 8　C. 15　D. 16

4. 填空：

(1) $\{a,b,\_\_\}\cap\{c,d,\_\_\}=\{b,c\}$；

(2) $\{a,t,\_\_,\_\_\}\cap\{d,c,e,\_\_,\_\_\}=\{a,b,e\}$.

5. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid 2x^2-3x-2=0\}$，则 $A\cap B=$________.

6. 已知集合 $A=\{x\mid -4\leqslant x<2\}$，$B=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$，$C=\{x\mid x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant\frac{5}{2}\}$，则 $A\cap B\cap C=$________.

7. 已知集合 $A=\{$平行四边形$\}$，$B=\{$梯形$\}$，$C=\{$对角线相等的四边形$\}$，则 $B\cap C=$______，$A\cap C=$ {矩形}.

8. 已知 $P=\{x\mid x=2^n,n\in\mathbf{N}\{\}$，$Q=\{x\mid x=8^n,n\in\mathbf{N}\}$，$P\cap Q=$______.

【练习设计】·巩固与掌握

9. 已知 $P=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $P\cap Q$ 等于(　).

A. $\{(0,1),(1,2)\}$　B. $\{0,1\}$

C. $\{1,2\}$　D. $\{y\mid y\geqslant 1\}$

10. (1)已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，且满足 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 a 的取值范围是______.

(2)已知集合 $P=\{x\mid -1<x<3\}$，$M=\{x\mid a<x<2a,a>0\}$，且 $P\cap M=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是______.

11. 已知 $A=\{(x,y)\mid 2x+y=4\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x-2y=-1\}$，则 $A\cap B=$______.

12. 已知 $A=\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y\mid y=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{z\mid |z|\leqslant 100,z\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B\cap C$ 中元素的个数.

【练习设计】·拓展与迁移

13. 已知集合 X 是方程 $x^2+px+q=0(p^2-4q>0)$ 的解集，$A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{1,4,7,10\}$，且 $X\cap A=\varnothing$，$X\cap B=X$，试求 p，q 的值.

14. 已知集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{x^2+2x-3},x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2-3x+10,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.

04　并集

【概念与规律】

1. 集合 A 与 B 的并集的数学表达式是：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，注意其中的关键字"或"字的意义. "$x\in A$ 或 $x\in B$"这一条件，包括下列三种情况：①$x\in A$，但 $x\overline{\in}B$；②$x\in B$，但 $x\overline{\in}A$；③$x\in A$，且 $x\in B$. 因此 $A\cup B$ 中的元素至少具有集合 A 或集合 B 的属性之一.

2. 关于并集有如下性质：①$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$；②$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$；③$A\cap B\subseteq A\cup B$，当且仅当 $A=B$ 时，有 $A\cap B=A\cup B$；④若 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$，反之也成立；⑤若 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$.

3. 区分交集和并集的关键是"且"与"或". 在处理有关交集与并集问题时，常常从这两个字出发去揭示、挖掘题设条件，进而用集合语言表述.

【讲解设计】・重点与难点

例 1　设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 2x^2-ax+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 a 的值组成的集合.

解　化简集合 A 得 $A=\{1,2\}$.

$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$.

$\therefore$ 集合 B 有四种可能：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$.

(1)若 $B=\varnothing$，则 $2x^2-ax+2=0$ 在实数范围内无解，$\therefore\Delta=a^2-16<0$，即 $-4<a<4$；

(2)若 $B=\{1\}$，则 $2x^2-ax+2=0$ 有重根 1，将 $x=1$ 代入得 $a=4$；

(3)若 $B=\{2\}$，将 $x=2$ 代入 $2x^2-ax+2=0$ 得 $a=5$，此时 $B=\{2,\frac{1}{2}\}$，不合题意；

(4)若 $B=\{1,2\}$时，将 $x=2$ 代入 $2x^2-ax+2=0$ 得 $a=5$，此时 $B=\{2,\frac{1}{2}\}$，不合题意；

综上所述，a 的取值范围是$\{a\mid -4<a\leqslant 4\}$.

点评　①本题要注意 $A\cup B=A$ 与 $B\subseteq A$ 的等价性.

②例 1 要注意 $B=\varnothing$ 的可能性，否则会"缩小"解的范围. 对于$\varnothing$的存在，初学者往往容易忽略.

例 2　已知集合 $A=\{x\mid x^2+px-2=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2-x-q=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cup B=\{-2,0,1\}$，求实数 p,q 的值.

解　$\because A\cup B=\{-2,0,1\}$，$\therefore 0\in A$ 或 $0\in B$，又$\because 0\overline{\in}A$(否则有$-2=0$，矛盾)，

$\therefore 0\in B$.

代入 $x^2-x-q=0$ 得 $q=0$，

$\therefore B=\{x\mid x^2-x=0,x\in\mathbf{R}\}=\{0,1\}$.

又$\because A\cup B=\{-2,0,1\}$，

$\therefore x=-2$ 是 $x^2+px-2=0$ 的根，

$\therefore p=1$.

综上所述：$p=1,q=0$.

【讲解设计】・思路与方法

例 3　已知 $A=\{2,5\}$，$B=\{x\mid x^2+px+q=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cup B=A$，$A\cap B=\{5\}$，求实数 p、q 的值.

提示　由 $A\cup B=A$，知 $B\subseteq A$. $\because A\cap B=\{5\}$，$\therefore 5\in B$，且 $2\overline{\in}B$，$\therefore B=\{5\}$.

例 4　已知 $A=\{x\mid x^3+3x^2+2x>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$，且 $A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$，$A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，求实数 a、b 的值.

提示　易知 $A=\{x\mid -2<x<-1$，或 $x>0\}$.

设 $B=\{x\mid x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$，由 $A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$知 $x_2=2$，$-1\leqslant x_1\leqslant 0$. 再由 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$知$-2<x_1\leqslant -1$，$\therefore x_1=-1$，$x_2=2$. 代入方程 $x^2+ax+b=0$ 即得 $a=-1$，$b=-2$.

【练习设计】・识记与理解

1. 设集合 $A=\{x\mid -5\leqslant x<1\}$，$B=\{x\mid x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B$ 等于(　).

A. $\{x\mid -5\leqslant x<1\}$　　B. $\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 2\}$

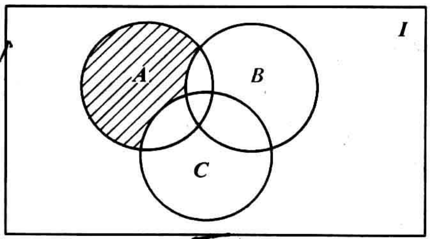
C. $\{x\mid x<1\}$　　D. $\{x\mid x\leqslant 2\}$

2. 下列四个推理：①$a\in A\cup B\Rightarrow a\in A$；②$a\in A\cap B\Rightarrow a\in A\cup B$；③$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B$；④$A$

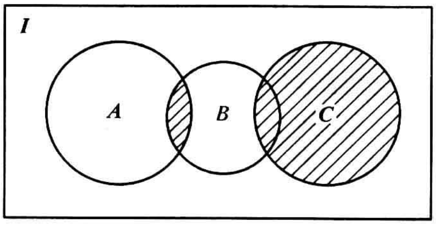
$\cup B=A\Rightarrow A\cap B=B$,其中正确的个数为(　).

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

3. 用集合表示图 04-1 中的阴影部分.



$A\cap(B\cup C)$ ________



____

图 04-1

4. 设集合 $A=\{x|-4\leqslant x<2\}$,$B=\{x|-1<x\leqslant 3\}$,$C=\{x|x\geqslant\frac{5}{2}$ 或 $x\leqslant 2\}$,则 $(A\cup B)\cap C=$________.

5. 设集合 $M=\{x|a_1x^2+b_1x+c_1=0\}$,$N=\{x|a_2x^2+b_2x+c_2=0\}$,则方程 $(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)=0$ 的解集是(　).

A. $M\cap N$　B. $M\cup N$　C. N　D. M

6. 已知 M、N 是非空集合,且 $M\cap N\subset M$,$M\cap N\supseteq N$,则(　).

A. $M=N$　B. $M\subset N$　C. $N\subset M$

D. M、N 相交,但不具有包含关系

7. 已知集合 $P=\{x|x=n,n\in\mathbf{Z}\}$,$Q=\{x|x=\frac{n}{3},n\in\mathbf{Z}\}$,$S=\{x|x=n-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\}$,则下列各式中正确的是(　).

A. $S\cup Q=P$　　B. $Q\subseteq P$

C. $P\cup S=Q$　　D. $P\subset Q$

8. 求下列各题中的 $A\cup B$ 与 $A\cap B$:

(1) $A=\{x|-5<x<3\}$,$B=\{x|-1<x<4\}$;

(2) $A=\{x|x<5\}$,$B=\{x|x>2\}$;

(3) $A=\{6$ 的质因数$\}$,$B=\{x|x<3\}$;

(4) $A=\{x|(x+5)(x-3)<0\}$,$B=\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant 2\}$.

【练习设计】·巩固与掌握

9. 已知集合 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant 2\}$,若 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$,则实数 a 的取值范围是______.

10. 非空集合 P、Q、R 满足关系 $P\cup Q=Q$,$Q\cap R=Q$,则 P、R 的关系是(　).

A. $P=R$　　B. $P\subseteq R$

C. $P\supseteq R$　　D. $P\subset R$

11. 若集合 $A=\{1,3,a\}$,$B=\{a^2,1\}$,满足 $A\cup B=\{1,3,a\}$,求实数 a 的值.

12. (1)已知集合 $A=\{x|$二次方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根,$a\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x|$二次方程 $ax^2-x+1=0$ 无实根,$a\in\mathbf{R}\}$,则 $A\cup B=$________.

(2)已知 $A=\{a|$二次方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根,$a\in\mathbf{R}$,$B=\{a|$二次方程 $ax^2-x+1=0$ 无实根,$a\in\mathbf{R}\}$,则 $A\cup B=$________.

13. 已知集合 A,B,C,证明:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

【练习设计】·拓展与迁移

14. 若集合 $A=\{x|-2<x<1$ 或 $x>1\}$,$B=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$,满足 $A\cup B=\{x|x>-2\}$,$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$,求 a,b 的值.

15. 设 $A=\{1,3,a\}$,$B=\{1,a^2\}$,问是否存在这样的实数 a,使得 $A\cup B=\{1,a,a^2\}$与 $A\cap B=\{1,a\}$同时成立?

16. 设 $A=\{x|x^2+3x-4=0\}$,$B=\{x|x^2+(a+1)x-a-2=0\}$,如 $A\cup B=A$,求 a 的值.

05　补集

【概念与规律】

1. 在研究集合之间关系时，这些集合常常是某一给定集合的子集，这个给定的集合，叫做全集，记作 I.

2. 补集的定义：$\overline{A}=\{x\mid x\in I，且\ x\overline{\in}A\}$，即补集是由全集 I 中所有不在集合 A 中的元素组成的. 由此我们很容易想起“差”的概念，事实上，补集 $\overline{A}$ 就是全集 I 与集合 A 的差集。对于同一集合 A，若全集 I 不同，则补集 $\overline{A}$ 也不同.

3. 关于补集有如下性质：①$(\overline{\overline{A}})=A$，$\overline{I}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=I$；②$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=I$；③$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；④若 $A\subseteq B$，则 $A\cap\overline{B}=\varnothing$，反之也成立；⑤若 $x\in\overline{A}$，则 $x\overline{\in}A$.

【讲解设计】· 重点与难点

例 1　设 $I=\{1,2,3,\cdots 9\}$，已知：(1)$\overline{A}\cap B=\{3,7\}$，(2)$\overline{B}\cap A=\{2,8\}$，(3)$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,5,6\}$，求集合 A 和 B.

解　用文氏图表示集合 I,A,B 的关系，如图 05-1 所示的有关区域表示集合 $A\cap B$，$\overline{A}\cap B$，$A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，并填上相应的元素，可得 $A=\{2,4,8,9\}$，$B=\{3,4,7,9\}$.

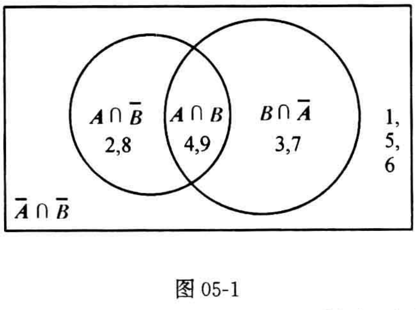


图 05-1

点评　①当集合中元素的个数有限或要判断两集合相互之间的关系时，常可借助于文氏图，以形助数.

②在图 05-1 中，根据集合的意义，能得到 $\overline{M\cup L}=\overline{M}\cap\overline{L}$，$\overline{M\cap L}=\overline{M}\cup\overline{L}$（德·摩根律）.

例 2　已知 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)\mid y=3x-2\}$，$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-4}{x-2}=3\right\}$，求 $A\cap B$ 及 $\overline{A}\cup B$.

解　$\because\dfrac{y-4}{x-2}=3$，

$\therefore y=3x-2(x\neq 2)$，$\therefore B\subset A$.

因此 $A\cap B=B$，且 $\overline{A}\cup B=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}，(x,y)\neq(2,4)\}$.

点评　集合概念与集合运算建立后，不可避免地出现集合语言转化的问题，即如何将集合语言转化为我们已经熟知的语言，此时应注意求解的完备性（不缩小范围）和纯粹性（不扩大范围）.

例 3　设全集 $I=\{不超过 5 的正整数\}$，$A=\{x\mid x^2-5x+q=0\}$，$B=\{x\mid x^2+px+12=0\}$，$\overline{A}\cup B=\{1,3,4,5\}$，求 p,q 的值和集合 A,B.

解$\because\overline{A}\cup B=\{1,3,4,5\}$，$I=\{1,2,3,4,5\}$.

$\therefore 2\overline{\in}\overline{A}$，即 $2\in A$.

将 2 代入 $x^2-5x+q=0$ 得 $q=6$，

于是 $A=\{2,3\}$.

又$\because\overline{A}=\{1,4,5\}$，且 $\overline{A}\cup B=\{1,3,4,5\}$，

$\therefore 3\in B$，代入 $x^2+px+12=0$ 得 $p=-7$，

$\therefore B=\{3,4\}$.

例 4　设 $I=\{1,2,5,a^2-3a\}$，$A=\{2,5\}$，$B=\{a,5\}$，$\overline{A\cup B}=\{a-3\}$，求实数 a 可能取的值?

$C_I(A\cup B)$

解　$\because A=\{2,5\}$，$B=\{a,5\}$，

$\therefore A\cup B=\{2,5,a\}$ 或 $A\cup B=\{2,5\}$.

若 $A\cup B=\{2,5\}$，则 $a=2$，此时 $I=\{1,2,5,-2\}$ 与 $\overline{A\cup B}=\{a-3\}$ 矛盾. 应舍去.

$\therefore A\cup B=\{2,5,a\}$. 又$\because\overline{A\cup B}=\{a-3\}$，

$\therefore I=\{2,5,a,a-3\}$，

$\therefore a=1$ 或 $a=a^2-3a$.

当 $a=1$ 时，满足 $a^2-3a=a-3$，

当 $a=a^2-3a$ 时，$a=0$ 或 4，又$\because$应满足 $1=a-3$，$\therefore a=4$，$a=0$ 应舍去.

综上所述：$a=1,4$.

【讲解设计】· 思路与方法

例 5　设全集 $I=\{2,4,1-a\}$，$A\{2,a^2-a+2\}$，若 $\overline{A}=\{-1\}$，求 a 的值.

提示 由 $\overline{A}=\{-1\}$，知 $-1=1-a$ 及 $a^2-a+2\neq-1$.

例 6 设全集 $I=\{x\mid 1\leqslant x<9, x\in\mathbf{N}\}$，写出满足 $\{1,3,5,7,8\}\cap\overline{B}=\{1,3,5,7\}$ 的所有集合 B.

提示 由条件知 $8\overline{\in}\,\overline{B}$，$\therefore 8\in B$，故集合 B 可以为：$\{8\}$，$\{8,2\}$，$\{8,6\}$，$\{8,2,4\}$，$\{8,2,6\}$，$\{8,4,6\}$，$\{8,2,4,6\}$ 共 8 个.

【练习设计】·识记与理解

1. 设 M、P 是全集 I 的子集，且 $M\subseteq P$，则下列各式中一定成立的是（ ）.

A. $\overline{M}\subseteq\overline{P}$　　B. $\overline{M}\cup\overline{P}=I$

C. $M\cap\overline{P}=\varnothing$　　D. $\overline{M}\cap P=\varnothing$

2. 设 $I=\mathbf{R}$，$P=\{x\mid x\geqslant1\}$，$Q=\{x\mid 0<x<5\}$，则 $\overline{P}\cap\overline{Q}$ 是（ ）.

A. $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant5\}$　　B. $\{x\mid x\geqslant5\}$

C. $\{x\mid x\leqslant0\}$　　D. $\{x\mid x\leqslant0$ 或 $x\geqslant5\}$

3. 设全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,5\}$，则下面结论正确的是（ ）.

A. $3\notin A$ 且 $3\notin B$　　B. $3\notin B$ 且 $3\in A$

C. $3\notin A$ 且 $3\in B$　　D. $3\in A$ 且 $3\in B$

4. 设 $A=\{$整数$\}$，$\overline{A}=\{$分数$\}$，则全集 $I=$________.

5. 已知 M、P 都是全集 I 的子集，则图 05-2 中阴影部分可以表示为（ ）.

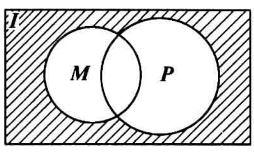


图 05-2

A. $M\cup P$　　B. $\overline{M\cap P}$

C. $\overline{M}\cup\overline{P}$　　D. $\overline{P}\cap\overline{M}$

6. 若 $I=\{x\mid x=\frac{1}{2^n}, n\in\mathbf{N}\}$，$A=\{x\mid x=\frac{1}{2^{2n}}, n\in\mathbf{N}\}$，则 $\overline{A}=$________.

7. 若 $A=\{x\mid x<12, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x>6, x\in\mathbf{R}\}$，$I=\mathbf{R}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A\cap B}$，$\overline{A\cup B}$.

8. 全集 $I=\mathbf{N}$，$A=\{$正奇数$\}$，$B=\{5$ 的倍数$\}$，则 $B\cap\overline{A}=$________.

【练习设计】·巩固与掌握

9. 设全集 I 为自然数集 $\mathbf{N}$，记 $E=\{x\mid x=2n, n\in\mathbf{N}\}$，$F=\{x\mid x=4n, n\in\mathbf{N}\}$，那么 $\mathbf{N}$ 可以表示成（ ）.

A. $E\cap F$　　B. $\overline{E}\cap\overline{F}$

C. $\overline{E}\cup F$　　D. $E\cup\overline{F}$

10. 若 I，$\varnothing$ 分别表示全集与空集，且 $(\overline{P}\cup Q)\subset P$，则集合 P、Q 必须满足（ ）.

A. $\varnothing\subset P\subset Q$　　B. $Q\subset P\subset I$

C. $Q=\varnothing$　　D. $P=I$ 且 $Q\neq P$

11. 设 $I=\mathbf{Z}$，$A=\{x\mid x=3k, k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=4k, k\in\mathbf{Z}\}$，则 $\overline{A}=$____，$A\cap B=$____.

12. 已知集合 A，B 都是全集 $I=\{1,2,3,4\}$ 的子集，若 $\overline{A}\cap B=\{1\}$，$A\cap B=\{3\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2\}$，则 $A=$______，$B=$______.

13. 已知 $A=\{x\mid x^2+px+12=0, x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+q=0, x\in\mathbf{N}\}$，全集 $I=\mathbf{N}$，$\overline{A}\cap B=\{2\}$，$A\cap\overline{B}=\{4\}$，则 $p+q=$______.

【练习设计】·拓展与迁移

14. 已知全集 $I=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{-3,a^2,a+1\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，其中 $a\in\mathbf{R}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 $\overline{A\cup B}$.

15. 记全集 $I=\{$小于 10 的自然数$\}$，其子集 A，B 满足 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，求集合 A 和 B.

16. 设集合 I，A，B，C 的关系如图 05-3，用阴影表示下列集合：

(1) $\overline{A}\cap\overline{C}$　　(2) $(\overline{A\cap B})\cap C$

(3) $\overline{B}\cap C$　　(4) $\overline{\overline{B}\cup\overline{A}}$

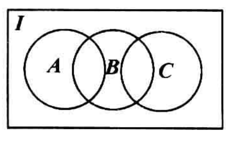


图 05-3

06　集合习题课

【概念与规律】

1. 本单元介绍了集合、子集、真子集、交集、并集与补集等基本概念的涵义，以及相互间的区别和联系. 重点包括两方面的内容：一是集合自身的知识；二是集合语言与集合思想的应用.

2. 学习集合时要紧紧抓住元素这个关键，遇到集合问题，首先要弄清集合里的元素是什么，注意区分 a(元素)与 $\{a\}$(单元素集)；$\{a,b\}$(双元素集)与 $\{(a,b)\}$(单元素集). 能熟练进行集合的交、并、补运算.

【讲解设计】· 重点与难点

例 1　某班 50 名学生报名参加羽毛球和乒乓球两项体育活动小组，报名参加羽毛球小组的人数是全体学生数的五分之三，报名参加乒乓球小组的人数比报名参加羽毛球小组的人数多 3 个，两组都没报名的人数是同时报名参加两组人数的三分之一多一人，求同时报名参加羽毛球小组和乒乓球小组的人数和两组都没报名的人数.

解　设同时报名参加两组的人数为 x，则两组都没报名的人数为 $\frac{1}{3}x+1$，根据文氏图可得(如图 06-1)：

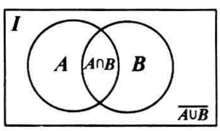


图 06-1

$(30-x)+(33-x)+x+(\frac{1}{3}x+1)50$,

解得　$x=21$.

$\therefore \frac{1}{3}x+1=8$.

所以同时报名参加的羽毛球小组和乒乓球小组的人数为 21，两组都没报名的有 8 人.

点评　①借助于文氏图得出的结论 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$ 是具有一般性的(证明略)，但要注意不能写成 $A=30, B=25, A\cap B=15$ 等，否则与集合的符号是相悖的.

②本题的结论还可推广到三个集合的情况：

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

例 2　由实数构成的集合 A 满足条件：若 $a\in A, a\neq 1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$. 求证：

(1)若 $2\in A$，则集中 A 中必还有另外两个元素；

(2)集合 A 不可能是单元素集合；

(3)集合 A 中至少有三个不同的元素.

证明　(1)若 $2\in A$，则由题意 $\frac{1}{1-2}\in A$，

即 $-1\in A$.

又 $\frac{1}{1-(-1)}\in A$，即 $\frac{1}{2}\in A$.

$\therefore A$ 中必有另外两个元素 -1 和 $\frac{1}{2}$.

(2)若任一 $a\in A(a\neq 1)$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$，且 $\frac{1}{1-a}\neq a$(否则，若 $\frac{1}{1-a}=a$，即 $a^2-a+1=0$，此方程无实数解).

$\therefore A$ 不可能是单元素集.

(3)若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$，

又 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}\in A$，即 $1-\frac{1}{a}\in A$.

由(2)知 $a\neq\frac{1}{1-a}$.

若 $a=1-\frac{1}{a}$ 及 $\frac{1}{1-a}=1-\frac{1}{a}$，则均有 $a^2-a+1=0$，此方程无实数解.

$\therefore a, \frac{1}{1-a}, 1-\frac{1}{a}$ 是互不相同的.

所以集合 A 中至少有三个不同的元素.

【讲解设计】· 思路与方法

例 3　已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-bx+2=0\}$，若 $B\subset A$，$C\subseteq A$，求实数 a,b 的值.

提示　由 $B\subset A$，知 B 有三种可能：$\varnothing$，

$\{1\},\{2\}$. 由 $C\subseteq A$，知 C 有四种可能：$\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}$.

例 4 已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\supset\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求实数 a 与集合 A.

提示 易知 $B=\{2,3\}$，$C=\{-4,+2\}$. 再由 $A\cap B\supset\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，可得 $3\in A$.

【练习设计】·识记与理解

1. 设 I 是全集，P、Q 是非空集合，且 $P\subset Q\subset I$，则下列结论中不正确的是（ ）.

A. $\overline{P}\cup Q=I$　　B. $\overline{P}\cap Q=Q$

C. $P\cup Q=Q$　　D. $P\cap\overline{Q}=\varnothing$

2. 设 $A\cap B=\varnothing$，$M=\{x\mid x\subseteq A\}$，$N=\{x\mid x\subseteq B\}$，则一定成立的是（ ）.

A. $M\cap N=\varnothing$　　B. $M\cap N=\{\varnothing\}$

C. $M\cap N=A\cap B$　　D. $M\cap N\subset A\cap B$

3. 设全集 $I=\mathbf{R}$，$C=\{x\mid x=a+b\sqrt{7},a,b\in\mathbf{Q}$，且 $b\neq 0\}$，则下面结论中正确的是（ ）.

A. $C\subseteq\overline{Q}$　　B. $\overline{Q}\subseteq C$

C. $Q\subseteq C$　　D. $C\subseteq Q$

4. 设 $A=\{(x,y)\mid \frac{y}{1-x^2}=1\}$，$B=\{(x,y)\mid y=1-x^2\}$，$C=\{(x,y)\mid(x,y)\in B$，但 $(x,y)\notin A\}$，则 $B\cap C$ 为（ ）.

A. $\varnothing$　　B. $\{1,-1\}$

C. $\{(1,0)\}$　　D. $\{(1,0),(-1,0)\}$

5. 集合 $A=\{$等腰三角形$\mid$边长为 4，一内角为 50°$\}$的元素个数是（ ）.

A. 2　B. 3　C. 4　D. 无数

6. 已知集合 A 和集合 B 各有 8 个元素，$A\cap B$ 有 4 个元素，则 $A\cup B$ 有______个元素.

7. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{b,2\}$，$\overline{A}=\{5\}$，则实数 $a=$______，$b=$______.

【练习设计】·巩固与掌握

8. 设 $M=\{x\mid x=n,n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\frac{n}{2},n\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\mid x=n+\frac{1}{2},n\in\mathbf{Z}\}$，则下列各式正确的是（ ）.

A. $N\subset M$　　B. $N\subset P$

C. $N=M\cup P$　　D. $N=M\cap P$

9. 数集 $M=\{x\mid x=k+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\frac{k}{2}-\frac{1}{4},k\in\mathbf{N}\}$，它们之间的关系是（ ）.

A. $M=N$　　B. $M\supset N$

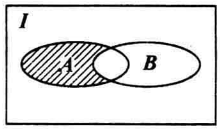
C. $M\subset N$　　D. $M\subseteq N$

10. 设全集 I 为实数集，$A=\{x\mid x=-t^2,t\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=|t|+5,t\in\mathbf{R}\}$，则 $\overline{A\cup B}=$________.

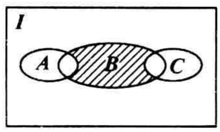
11. 设 $A=\{120$ 的正的约数$\}$，$B=\{90$ 的正的约数$\}$，则 $A\cap B=$______.

12. 已知 $A\cap\{-1,0,1\}=\{0,1\}$，且 $A\cup\{-2,0,2\}=\{-2,0,1,2\}$，则满足上述条件的集合 A 共有________个.

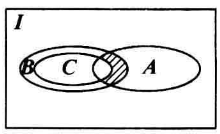
13. 用集合的交、并、补集表示下列图形中的阴影部分：



____



____



____

【练习设计】·拓展与迁移

14. 已知 $P=\{x\mid x=m^2+1,m\in\mathbf{N}\}$，$Q=\{y\mid y=n^2-4n+5,n\in\mathbf{N}\}$，试证明 $P\subset Q$.

15. 集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+a-1=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，已知 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求实数 a,m 的值.

07　$|ax+b|<c$，$|ax+b|>c(c>0)$型不等式

【概念与规律】

1. 绝对值的定义：$|a|=\begin{cases}a,a>0,\\0,a=0,\\-a,a<0.\end{cases}$ $|a|$的几何意义是数轴上表示数 a 的点离开原点的距离.

2. 不等式$|ax+b|<c(c>0)$的解集是$\{x|-c<ax+b<c\}$，据此再求出原不等式的解集；不等式$|ax+b|>c(c>0)$的解集是$\{x|ax+b>c$ 或 $ax+b<-c\}$，据此再求出原不等式的解集.

3. 零点分段法化去绝对值记号是解决有关绝对值问题的基本方法，数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 分别使含有$|x-a_2|$，$|x-a_3|$，…，$|x-a_n|$的代数式中相应的一个绝对值为零，称 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为相应绝对值的零点，零点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 将数轴分成 $n+1$ 段，在每一段上，$(x-a_1)$，$(x-a_2)$，…，$(x-a_n)$都有确定的正负号，利用绝对值定义可以化去绝对值记号，得到代数式在各段上的简化式.

【讲解设计】·重点与难点

例 1　解不等式　$3\leqslant|x-2|<9$.

解　原不等式等价于不等式组

$$\begin{cases}|x-2|\geqslant3, & ①\\|x-2|<9. & ②\end{cases}$$

由①得 $x-2\geqslant3$，或 $x-2\leqslant-3$，

解得　$x\geqslant5$，或 $x\leqslant-1$.

由②得$-9<x-2<9$，

解得$-7<x<11$.

所以，原不等式的解集是$\{x|-7<x\leqslant-1$或$-5\leqslant x<11\}$.

点评　①解 $m<|ax+b|<n(m,n>0)$类型不等式，仍然要紧紧抓住由绝对值的意义向一元一次不等式转化的这一“关键”.

②本题若把$|x-2|$看成是数轴上一点到 2 的距离，则 $3\leqslant|x-2|<9$ 的几何意义是求数轴上到 2 的距离小于 9 且不小于 3 的点的集合. 所以，原不等式等价于：$3\leqslant x-2<9$，或$-9<x-2\leqslant-3$. 一般情况下，不等式 $m<|ax+b|<n(m,n>0)$等价于：$m<ax+b<n$，或$-n<ax+b<-m$.

例 2　解不等式$|2x+1|+|x-2|>4$.

解　当 $x\geqslant2$ 时，由 $2x+1+x-2>4$，得 $x>\frac{5}{3}$.

当$-\frac{1}{2}<x<2$ 时，由 $2x+1-x+2>4$，得 $x>1$.

当 $x\leqslant-\frac{1}{2}$时，由$-2x-1-x+2>4$，得 $x<-1$.

综上所述，得原不等式的解集为

$\{x|x>1$，或 $x<-1\}$.

点评　①本题各段的解集要求并集.

②解绝对值不等式的基本思路是化去绝对值符号，其主要途径有：

1°根据实数绝对值的涵义(如例 1)；

2°划分区域讨论法(如例 2)；

3°平方法.

【讲解设计】·思路与方法

例 3　解不等式$|x-|2x+1||>1$.

提示　原不等式可化为：

(Ⅰ)$x-|2x-1|>1$ 或(Ⅱ)$x-|2x+1|<-1$.

由(Ⅰ)得$\{2x+1\geqslant0,2x+1<x-1$，或$\{2x+1<0,-(2x+1)<x-1$.

由(Ⅱ)得$\begin{cases}2x+1\geqslant0,\\2x+1>x+1,\end{cases}$

或$\begin{cases}2x+1<0,\\-(2x+1)>x+1.\end{cases}$

例 4　画出函数 $y=|x+1|+|x-2|+|x-5|$的图像.

提示　利用划分区域讨论法化去绝对值符号. 零点为 $x_1=-1$，$x_2=2$ 和 $x_3=5$，它们把数轴分成四段.

【练习设计】·识记与理解

1. 不等式$|x-2|>1$的解集是(　).

A. $\{x|1<x<3\}$　B. $\{x|x>3$ 或 $x<-3\}$

C. $\{x|-3<x<3\}$ D. $\{x|x>3$ 或 $x<1\}$

2. 不等式$|1-\frac{1}{2}x|<1$的解集是________.

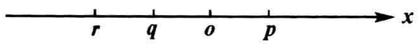
3. 设$2<x<3$,化简$|3-2x|-|3x-10|=$________.

4. 不等式$|3x-2|>0$的解集是(　).

A. $\varnothing$　　B. $\mathbf{R}$

C. $\left\{x|x\in\mathbf{R},且\ x\neq\frac{2}{3}\right\}$　　D. $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

5. 根据数轴上表示p,q,r三数的点的位置,化简$|p+q|+|p+r|-|q-r|$得______.



6. $|x-1|\leqslant1$的解为________;$|x-1|>0$的解为________;$|x-1|\geqslant2$的解为________.

7. 不等式$\left|\frac{1}{x}\right|\geqslant2$的解为________.

【练习设计】·巩固与掌握

8. 不等式$(1-|x|)(1+x)>0$的解集是(　).

A. $(-1,1)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(0,1)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(-1,1)$

9. 已知集合$M=\{x||x+1|\leqslant2|\}$,$P=\{x|x\leqslant1$,或$x\geqslant3\}$,则M、P之间的关系是(　).

A. $M\supseteq P$　　B. $M\supset P$

C. $M\subseteq P$　　D. $M\subset P$

10. 绝对值大于2且不大于5的最小整数是(　).

A. 3　B. -2　C. 2　D. -5

11. 解下列不等式:

(1)$1<|2-x|\leqslant7$;

(2)$|3x-4|>1+2x$;

(3)$|x-5|-|2x+3|<1$.

12. 如果$\frac{1}{x}<2$和$|x|>\frac{1}{3}$同时成立,那么x的取值范围是(　).

A. $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$　B. $x>\frac{1}{2}$或$x<-\frac{1}{3}$

C. $x>\frac{1}{2}$　　D. $x<-\frac{1}{3}$或$x>\frac{1}{3}$

13. $\left|\frac{x}{x+2}\right|>\frac{x}{x+2}$的解集是(　).

A. $(-2,0)$　　B. $(-2,0]$

C. $\mathbf{R}$　　D. $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

14. 已知$I=\mathbf{R}$,$A=\{x||x+1|<4\}$,$B=\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant2\}$,求$A\cup B$,$\overline{A}$,$\overline{B}$.

15. 已知$A=\{x||x-1|<c,c>0\}$,$B=\{x||x-3|>4\}$,且$A\cap B=\varnothing$,求c的范围.

【练习设计】·拓展与迁移

16. 解下列不等式:

(1)$|x+2|>3x+4$;

(2)$|x-|2x+1||>1$.

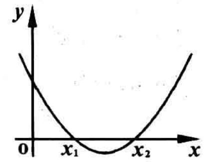
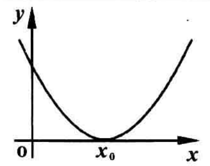
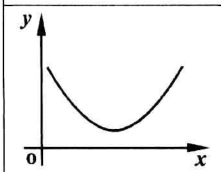
17. 若不等式$|x+2|+|x-3|<a$的解集不是空集,求实数a的取值范围.

18. 设$a\in\mathbf{N}$,集合$M=\{x||x-a|<a+\frac{1}{2},x\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x||x|<2a,x\in\mathbf{Z}\}$,则属于$M\cap N$的所有整数之和是________.

08　一元二次不等式

【概念与规律】

在二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 中,令 $y=0$,得到一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$.若将等号"="改为不等号">"或"<",便得到一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$(或 <0).因此可以通过 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像与 x 轴的交点来求得一元二次不等式的解,具体如下表:

	二次函数		一元二次方程	一元二次不等式	
一般式	$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$	$\Delta=b^2-4ac$	$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$	$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$
图像与解		$\Delta>0$	$x=x_1,x=x_2$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$ $(x\in\mathbf{R})$	$x_1<x<x_2$ $(x\in\mathbf{R})$
		$\Delta=0$	$x=x_0=-\frac{b}{2a}$	$x\neq x_0$ $(x\in\mathbf{R})$	无解
		$\Delta<0$	无解	$\mathbf{R}$	无解

注:表中 $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

【讲解设计】·重点与难点

例 1　解下列各不等式:

(1)$6x^2-5x-1>0$;(2)$4x^2+4x-15\leqslant 0$;

(3)$5x^2-2x+3>0$;(4)$9x^2+6x+1>0$;

(5)$3x^2-4x+5<0$.

解　(1)原不等式即 $(6x+1)(x-1)>0$,

∴解集为 $\{x\mid x<-\frac{1}{6}$ 或 $x>1\}$.

(2)原不等式即 $(2x+5)(2x-3)\leqslant 0$,

∴解集为 $\{x\mid -\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\}$.

(3)∵$\Delta=b^2-4ac=4-4\times5\times3=-56<0$,

∴原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

(4)∵$\Delta=b^2-4ac=36-36=0$,

∴原不等式即为 $(3x+1)^2>0$,

∴原不等式的解集为 $\{x\mid x<-\frac{1}{3}$ 或 $x>-\frac{1}{3}\}$.

(5)∵$\Delta=16-4\times5\times3=-44<0$,

∴原不等式的解集为 $\varnothing$.

例 2　已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x\mid x<-2$,或 $x>-\frac{1}{2}\}$,求 $ax^2-bx+c>0$ 的解集.

解　∵$\{x\mid x<-2$ 或 $x>-\frac{1}{2}\}=\{x\mid (x+2)(x-\frac{1}{2})>0\}=\{x\mid 2x^2+5x+2>0\}=\{x\mid -2x^2-5x-2<0\}$.

由此可得 $a:b:c=(-2):(-5):(-$