数理化竞赛辅导丛书

初中数学竞赛辅导

广西教育出版社

·数理化竞赛辅导丛书·

初中数学竞赛辅导

袁绍唐
蒋廷炉 编著

广西教育出版社

（桂）新登字05号

数理化竞赛辅导丛书
初中数学竞赛辅导
袁绍唐　蒋廷炉　编著
☆
广西教育出版社出版
（南宁市民族大道68号）
广西新华店书发行　广西大学印刷厂印刷
*
开本787×1092　1/32　6.875印张　148千字
1990年12月第1版　1992年5月第3次印刷
印　数：37,000—50,000册
ISBN 7-5435-1102-9/G·867　定价：2.20元

出版说明

1990年，我国代表队奋勇拼搏，分别夺得了国际数学、化学竞赛的桂冠和国际物理竞赛的第2名，使世界教育界、科学界为之瞩目，推动了国内数理化竞赛的开展，对我国的国际文化、科学交流，科学人才的选拔，培养，教育改革等方面产生了积极的影响。

为使我区的竞赛能更切实、更深入、更全面地开展，在广西数学学会、广西物理学会、广西化工化学学会的大力协助下，我们约请了一些教授、副教授、竞赛高级教练员和中学高级教师，编成了这套丛书（具体书目见封底），他们都直接或间接地参与过我国或我区的竞赛命题、组织、辅导等工作。丛书融汇了作者的经验体会，编排富有特色，内容较全面、系统，深入浅出，针对性强。

我们希望这套丛书能较好地引导竞赛的开展，推动竞赛的普及，提高竞赛的质量，并期望在竞赛中涌现出一批站在全国乃至国际竞赛领奖台上的健儿。

广西教育出版社

1990年10月

目　录

第一章　奇偶性分析、整除性和数谜问题

§1　奇偶性分析和平方数

同学们当然知道了什么是奇数，什么是偶数，±1，±3，±5，±7，……都是奇数，0，±2，±4，±6，……都是偶数. 任何偶数 a 总可以表示为 $a=2m$（m为整数）的形式，任何奇数 a 总可以表示为 $a=2m+1$ 的形式，偶数与奇数的这两种表示法，对解决整数问题很有用.

下面一些性质非常简单且常常被用到：

（1）每一个整数不是奇数便是偶数；任何奇数不可能与偶数相同；

（2）奇偶性相同的两个整数之和或差必是偶数；奇偶性不同的两个整数之和或差必定是奇数（所谓奇偶性相同，是指同为奇数，或同为偶数）；

（3）奇数与奇数的乘积是奇数；奇数与偶数的乘积以及偶数与偶数的乘积都是偶数；

（4）整数 a 的幂 a^n 与 a 的奇偶性相同.

这些性质虽然简单，但在解决不少问题时，如能灵活应用它们，就可迎刃而解. 这种方法通常叫奇偶性分析法.

例1　证明不存在整数 x、y 满足

$$y^2=x^2+1990.$$

解 如果有整数 x、y 使得 $y^2=x^2+1990$，即 $y^2-x^2=1990$，也即

$$(y+x)(y-x)=1990 \tag{1}$$

若 x、y 奇偶性不同，那么 $y+x$、$y-x$ 皆为奇数，故 $(y+x)(y-x)$ 也是奇数，这与（1）矛盾；若 x、y 奇偶性相同，则 $y+x$、$y-x$ 皆是偶数，即 $y+x$、$y-x$ 都是 2 的倍数，因此 $(y+x)(y-x)$ 是 4 的倍数，这也与（1）式矛盾（1990 不是 4 的倍数）。所以不能有整数 x、y 满足 $y^2=x^2+1990$。

例2 已知整系数方程

$$x^3+bx^2+cx+d=0 \tag{2}$$

的 $(b+c)d$ 为奇数，证明它没有整数根。（1963 年北京市竞赛题）

证明 $\because (b+c)d$ 为奇数，$\therefore b+c$ 与 d 都为奇数。既然 d 为奇数，方程（2）没有偶数根；对于奇数 x，x^3+d 为偶数，而 bx^2 与 b 奇偶性相同，cx 与 c 奇偶性相同，所以 bx^2+cx 与 $b+c$ 一样为奇数，所以 x^3+d+bx^2+cx 为奇数，方程（2）也没有奇数根。因此方程（2）无整数根。

例3 参加象棋小组的同学共有 47 人。已知每个同学至少和另 3 位同学下过象棋，证明：至少有一个同学起码和 4 位同学下过象棋。

证明 因为每对同学下象棋一盘，就有两“人次”下过象棋，所以下象棋的总“人次”数必是偶数。如果每个同学仅仅和 3 位同学下过棋，47 个人共下了奇数次（47×3），不是偶数次，这不可能。所以总有一位同学至少和 4 位同学下过棋。

例4 沿江顺次有 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 六个码头，相邻两码头

的距离相等．清晨有甲、乙两船从 A_1 码头开出，各自在这些码头间来回运货，傍晚甲船停在 A_6 码头，乙船停在 A_1 码头．证明：这一天甲船与乙船各自所走的总里程不相等（要求船未到一码头时不能改变航向）．（福州市1981年竞赛题）

解 设相邻两码头的距离为 d，则甲船从 A_1 到 A_6 的距离为 $5d$，而往来运货的航程只增加偶数倍 d 的路程，所以甲船当天航行了奇数倍 d 的路程．但乙船从 A_1 出发最后回到 A_1，航行了偶数倍 d 的路程．所以甲、乙两船航行了不同的路程．

例5 七个杯子口朝下摆在桌子上，每次翻转四个杯子，经过若干次这样的翻转，问可不可以出现全部杯子口朝上的情形？

解 每次翻转四个杯子不可能出现全部杯子口朝上的情形．

这是因为每翻转一个杯子，口朝下的杯子个数的奇偶性改变了，所以每次翻动四个杯子时口朝下的杯子个数的奇偶性不变．因为开始口朝下的杯子的个数为 7（奇数），任何次的变动（翻转四个）后口朝下的杯子个数仍为奇数，不可能出现个数为 0 情形（口全朝上情形）．

例6 证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数．

证明 假定 $\sqrt{2}$ 是有理数，由于任何有理数都能表示成既约分数的形式，于是可令 $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$，其中 m、n 为两个互质的自然数（因而 m、n 不能同为偶数）．那么

$$2=\frac{m^2}{n^2}，\ \therefore\ 2n^2=m^2.$$

m^2 为偶数，m 也为偶数．设 $m=2k$，k 为整数，于是

$$2n^2=4k^2,\ n^2=2k^2$$

这一来 n^2为偶数，从而n也为偶数。这与 m、n 互质矛盾。所以

$$\sqrt{2}\neq\frac{m}{n}$$

即$\sqrt{2}$不是有理数。

在近年的数学竞赛中出现的奇偶性分析题，还结合了一些(并非很复杂)知识，例如平方数的特点，抽屉原理等等。现在我们来介绍一些平方数的性质。

所谓平方数是指能够表示成某整数平方的那些数，如0，1，4，9，16，…。凡平方数都是非负的。此外还有（读者自证）

性质1 平方数的个位数只能取0、1、4、5、6、9这六种情形。

性质2 偶数的平方必为4的倍数。

性质3 奇数的平方数必是8的倍数加1。

性质4 平方数与平方数之乘积必为平方数。

例7 证明 $\underbrace{11\cdots1}_{n个}$，$\underbrace{22\cdots2}_{n个}$，…，$\underbrace{99\cdots9}_{n个}$ 都不是平方数（$n>1$）。

证明 11 和 111 显然不是平方数，而当 $n>3$ 时$\underbrace{11\cdots1}_{n个}=\underbrace{1\cdots1000}_{n个}+111=8k+7$（$k$ 为某整数），性质3说形如$8k+7$的数不是平方数，∴ $\underbrace{11\cdots1}_{n个}$ 不是平方数。

由性质1、2知$\underbrace{22\cdots2}_{n个}$，$\underbrace{33\cdots3}_{n个}$，$\underbrace{66\cdots6}_{n个}$，$\underbrace{77\cdots7}_{n个}$也不是平方数。

如果$\underbrace{44\cdots4}_{n个}$是平方数，它必是某偶数$2k$的平方，$\therefore \underbrace{44\cdots4}_{n个}=4k^2$，$\therefore \underbrace{11\cdots1}_{n个}=k^2$，这与上面证明的$\underbrace{11\cdots1}_{n个}$不是平方数矛盾。$\underbrace{44\cdots4}_{n个}$不是平方数。同理可知$\underbrace{99\cdots9}_{n个}$，$\underbrace{88\cdots8}_{n个}$都不是平方数。

最后考虑$\underbrace{55\cdots5}_{n个}$。显然5和55都不是平方数，而当$n\geqslant3$时，$\underbrace{5\cdots5}_{n个}=\underbrace{5\cdots5000}_{n个}+555=8k+3$（$k$为整数），由性质3知道它不是平方数，所以每个$\underbrace{55\cdots5}_{n个}$都不是平方数。

例8　证明$5m^2-6mn+7n^2=1985$无整数解（第26届国际数学奥林匹克题）。

证明　若有整数m、n满足

$$5m^2-6mn+7n^2=1985$$

则
$$25m^2-30mn+35n^2=5\times1985$$

经配方后得

$$(5m-3n)^2+26n^2=8\times1240+5 \tag{3}$$

由于右边是奇数，$26n^2$为偶数，$\therefore (5m-3n)^2$为奇数，由性质3就有

$$(5m-3n)^2=8k+1,\ (k\text{为整数})$$

此时若n为奇数，则 $n^2=8l+1$（l为整数），$26n^2=8t+2$（t为整数），由（3）式得

$$(8k+1)+(8l+2)=8\times1240+5$$

左边是个8倍加3的数，右边是个8倍加5的数，这是不可能的。若n为偶数，则 $n^2=4l$（l为整数），$26n^2=8\times13l$，由（3）式得

$$(8k+1)+8\times13l=8\times1240+5$$

左边是个8倍加1的数，不可能与右边相等。所以，不存在整数 m、n满足 $5m^2-6mn+7n^2=1985$。

这道题本是比较难解的，但用奇偶性去分析，却简单了。可见，奇偶性分析的原理虽然简单，有时用对了，确有“四两拨千斤”的功效。

例9　证明方程

$$x^3-2y^3-4z^3=0 \qquad (4)$$

只有一组整数解 $x=y=z=0$。

证明　设有整数x、y、z满足（4）式，由此有

$$x^3=2y^3+4z^3$$

可见x为偶数。设$x=2x_1$（x_1为整数），代入（4）整理得

$$y^3=4x_1{}^3-2z^3 \qquad (5)$$

可见y为偶数。设$y=2y_1$（y_1为整数），代入（5）整理得

$$z^3=2x_1{}^3-4y_1{}^3 \qquad (6)$$

可见z也为偶数。设 $z=2z_1$，代入（6），得到

$$x_1{}^3-2y_1{}^3-4z_1{}^3=0$$

这说明 $x_1=\frac{x}{2}$，$y_1=\frac{y}{2}$，$z_1=\frac{z}{2}$ 仍满足方程（4）。

根据上述奇偶性分析，x_1，y_1，z_1仍是偶数，且$x_2=\frac{x_1}{2}$，$y_2=\frac{y_1}{2}$，$z_2=\frac{z_1}{2}$仍是满足（4）的整数. 重复论述又知x_2、y_2、z_2都为偶数，且 $x_3=\frac{x_2}{2}$，$y_3=\frac{y_2}{2}$，$z_3=\frac{z_2}{2}$ 仍满足（4）. 注意到 $x_3=\frac{x_2}{2}=\frac{x_1}{4}=\frac{x}{8}$，$y_3=\frac{y_2}{2}=\frac{y_1}{4}=\frac{y}{8}$，$z_3=\frac{z_2}{2}=\frac{z_1}{4}=\frac{z}{8}$，将上述过程重复下去，就知对每个自然数 n，都有 $\frac{x}{2^n}$，$\frac{y}{2^n}$，$\frac{z}{2^n}$ 为偶数，这只有 $x=y=z=0$ 才可能，x、y、z 不全为零时是不可能满足（4）的，所以（4）无非零解.

上面证明的方法叫递降法，只要有解，就有更小（绝对值）的解，无限地递降下去都是解，从而引出矛盾. 下面例题也要用递降法来解.

例10 证明不存在非零整数 x、y、z 满足

$$x^2+y^2+z^2=2^n xyz,\ n\geqslant 1 \tag{7}$$

证明 若有整数x、y、z满足（7）式，则x、y、z只能是两个奇数一个偶数，或者全为偶数.

当 x、y、z 有两个是奇数一个是偶数，则 $x^2+y^2+z^2=4k+2$，但（7）式右边 $2^n xyz$ 是4的倍数（$\because 2|xyz$，$n\geqslant 1$），不能成为 $4k+2$ 形的数，此时（7）不能成立.

当x、y、z全为偶数，则取

$$x'=\frac{x}{2},\ y'=\frac{y}{2},\ z'=\frac{z}{2}$$

此时x'，y'，z'满足

$$x'^2+y'^2+z'^2=2^{n+1}x'y'z' \tag{8}$$

由上面已讨论过的情形知 x'，y'，z' 不能有奇数，于是全为偶数，由此又作

$$x''=\frac{x'}{2},\ y''=\frac{y'}{2},\ z''=\frac{z'}{2}$$

等等．由于 x 不能永远被2除下去都得偶数（除非为0），y、z 也是这样，因此总会出现矛盾．可见不存在非零整数 x、y、z 满足（7）．

上面几个例子是以平方数的特点证明某些整数不是平方数或某些不定方程无非零整数解．对于证明某数是平方数等等问题，多数情况下可用配方法来处理，下面几个例题是美国中学数学竞赛题，解起来很容易且有启发性．

例11　证明下面各数

$$49,\ 4489,\ 444889,\ \cdots,\ \underbrace{44\cdots4}_{n\text{个}}\underbrace{8\cdots8}_{n\text{个}}9$$

都是平方数．

证明　$\underbrace{44\cdots4}_{n\text{个}}\underbrace{8\cdots8}_{n\text{个}}9=\underbrace{44\cdots4}_{2n\text{个}}+\underbrace{4\cdots4}_{n\text{个}}+1$

$$=4\times\underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}}+4\times\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}+1$$

$$=4\left(\frac{10^{2n}-1}{9}\right)+4\left(\frac{10^n-1}{9}\right)+1$$

$$=\frac{4\times10^{2n}+4\times10^n+1}{9}$$

$$=\left(\frac{2\times10^{10}+1}{3}\right)^2,$$

由于 $2\times10^n+1=2\times(\underbrace{99\cdots9}_{n个}+1)+1$

$$=3\times(\underbrace{66\cdots6}_{n个}+1)=3\times\underbrace{6\cdots6}_{n个}7$$

$\therefore\ \underbrace{4\cdots4}_{n个}\underbrace{8\cdots8}_{n个}9=\underbrace{66\cdots6}_{n个}7^2$。

例12 证明 $\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times\underbrace{10\cdots05}_{(n+1)个}+1$ 是平方数。

证明 $\underbrace{1\cdots1}_{n个}\times\underbrace{10\cdots05}_{(n+1)个}+1=\dfrac{10^n-1}{9}\times(10^n+5)+1$

$$=\frac{1}{9}\left(10^{2n}+4\times10^n+4\right)=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{10^n-1+3}{3}\right)^2=\left(\underbrace{3\cdots3}_{n个}+1\right)^2=\underbrace{3\cdots3}_{n个}4^2$$

§2 数的整除性和个位数定理

1. 几个基本概念

如果对整数a、b、c（其中$b\neq0$），$a=bc$成立，我们就说b整除a，或说a被b整除，也说b是a的因数，a是b的倍数。

b整除a用符号$b|a$表示，b不整除a用$b\nmid a$表示。显然有下面的简单性质（各字母皆表示整数）：

（1）若$c|b$，$b|a$，则$c|a$；

（2）若$c|a$，$c|b$，则$c|a\pm b$，更一般还有$c|(ka+lb)$；

（3）若$c|a$，$d|b$，则$cd|ab$；

（4）若 $mb|ma$，则 $b|a$；

（5）若 $a>0$，$b>0$，$b|a$，则 $b\leqslant a$。

a、b 的公因数中最大者，称为 a、b 的最大公因数，记为 (a,b)；a、b 的正公倍数中最小的那个称为 a、b 的最小公倍数，记为 $[a,b]$。

当 $(a,b)=1$，就说 a 与 b 互质。

设整数 $a>1$，如果它只有 1 和 a 这两个正因数，就称它为素数（也称质数）。从小到大排列的素数为

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,\cdots$$

素数有无穷多个，因此这样的一串数是没有穷尽的。

素数有一个很基本的性质：若素数 $p\nmid a$，则 p 与 a 互质。这是因为当 $p\nmid a$，必有 $(p,a)\neq p$，而 (p,a) 是 p 的正因素，所以必有 $(p,a)=1$。

2．整除的两个基本性质和整除的基本公式

关于整除性，除了上面几个简单性质，下面两个基本性质特别重要，虽然它们的证明在这里不能介绍，但在任何竞赛中是完全可以应用的，因为它们是普遍知晓的基本知识，课堂外完全可应用。

基本性质1　如果 $c|ab$，c 与 a 互质，则 $c|b$。

特别地，若素数 $p|ab$，则必有 $p|a$ 或者 $p|b$，二者必居其一。这是因为若 $p\nmid a$，则 $(p,a)=1$，由 $p|ab$ 就有 $p|b$。

例如当知道 $3|7a$，由于 $(3,7)=1$，所以 $3|a$。

基本性质2　如果 $b|a$，$c|a$，而且 $(b,c)=1$，那么乘积 $bc|a$。

例如要证明 $10|N$，只要证明 $2|N$ 且 $5|N$ 就行了，下面例 14和例 18 等就用了这个性质。同学们要特别注意 (b,c)

$=1$这条件，如果b与c不互质，那么bc不一定整除a，例如$4|12$，$6|12$，但$4\times6\nmid12$。

基本公式 对任一正整数n以及整数a、b总成立

$$a-b|a^n-b^n.\ (a\neq b)$$

例如$\because a^2-b^2=(a-b)(a+b)$，$\therefore a-b|a^2-b^2$；又$\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，$\therefore a-b|a^3-b^3$。一般地，由乘法可得

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}=a^n-b^n,$$

$\therefore a-b|a^n-b^n$（$a\neq b$，n为正整数）。

推论1 当n为正奇数时有$a+b|a^n+b^n$。

这是因为$a-(-b)|a^n-(-b)^n$，而n为奇数，$\therefore (-b)^n=-b^n$，即$a+b|a^n+b^n$。

论推2 对任给的整数a、b及正整数n，必有某整数k使得$(a+b)^n=a^n+kb$。

这是因为$(a+b)-a|(a+b)^n-a^n$，所以有k使$(a+b)^n-a^n=k[(a+b)-a]=kb$，$\therefore (a+b)^n=a^n+kb$。

3. 几个简单的整除性例题

例13 已知$n|10a-b$，$n|10c-d$，证明$n|ad-bc$。

证明 $\because n|10a-b$，$n|(10c-d)$

$\therefore n|(10a-b)c-(10c-d)a$

$\therefore n|ad-bc$

例14 证明恒有$6|a^3-a$，这里a为任一整数。

证明 $\because a^3$与a的奇偶性必相同，$\therefore 2|a^3-a$；又$\because a^3-a=(a-1)a(a+1)$为三个连续整数之乘积，其中必有一个因数是3的倍数，$\therefore 3|a^3-a$。由于$(2,3)=1$，$\therefore 6|a^3-a$。