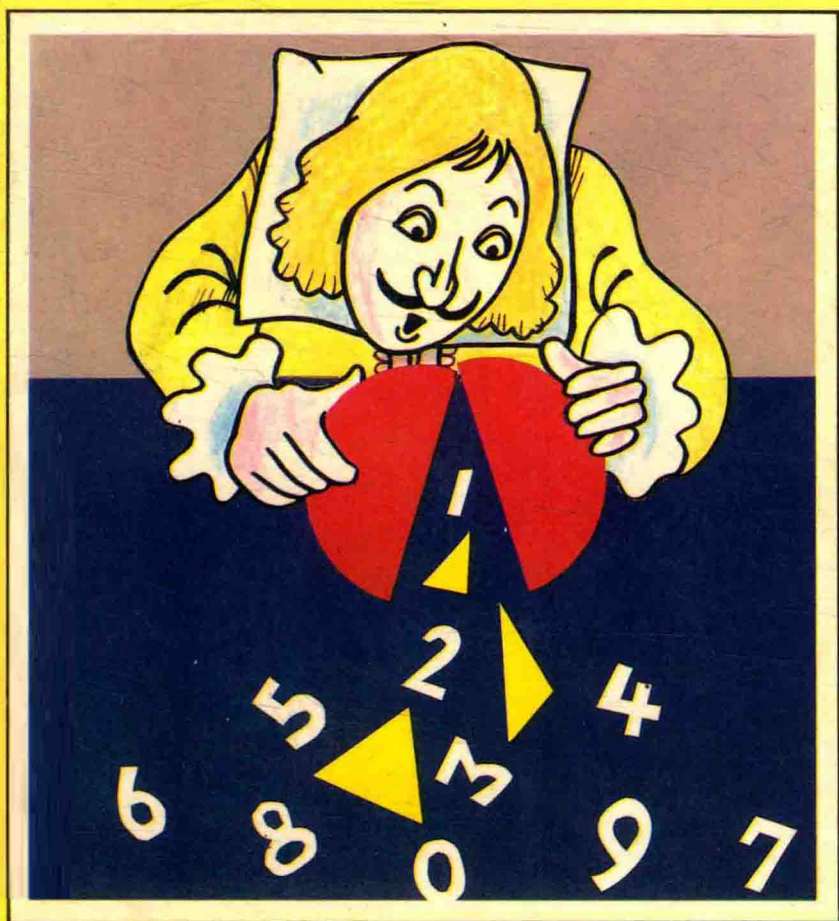


數學傳播季刊選輯④

幾個有名的數學問題

康明昌 著

中央研究院數學研究所 發行



數學傳播季刊選輯④

幾個有名的數學問題

康明昌 著

中央研究院數學研究所 發行



數學傳播季刊選輯④

幾個有名的數學問題

發 行：凡異出版社

郵 撥：0114221-5

電 話：035-712255

門 市：六藝圖書中心

地 址：新竹市光復路2段460號

電 話：035-716753

總經銷：學英文化事業有限公司

中華民國76年 7 月 版

定價：100 元

目 錄

前 言	1
一、Fermat 問題	3
1. 前言	4
2. 什麼是 Fermat 問題？	5
3. 方程式 $x^2 + y^2 = z^2$	10
4. 方程式 $x^4 + y^4 = z^4$	12
5. 方程式 $x^3 + y^3 = z^3$ 的第一種情況	14
6. Kummer 與代數數論	22
7. Fermat 問題的主要結果	30
8. 幾個重要的 Fermat 定理	32
註釋	38
參考資料	42
二、古希臘幾何三大問題	45
1. 前言	46
2. 幾何三大問題簡介	48
3. 爲什麼這些問題無解？	52
4. 超越數簡介	55

5. 幾何三大問題不是幾何學研究的主流·····	60
5.1 非歐幾何·····	62
5.2 射影幾何·····	66
5.3 微分幾何·····	71
5.4 Klein 的 Erlanger 綱領 ·····	75
5.5 幾何學的基礎·····	77
註釋·····	79
參考資料·····	81
 三、方程式求解問題 ·····	83
1. 前言·····	84
2. Lagrange 預解式·····	88
3. 方程式 $x^n - 1 = 0$ 的根式解 ·····	93
4. Galois 預解形與 Galois 群 ·····	96
4.1 體與預解形·····	96
4.2 置換群 (Permutation group) 的定義 ·····	99
4.3 Galois 預解形與 Galois 群 ·····	103
5. Galois 理論 ·····	105
5.1 置換群的簡單性質·····	106
5.2 係數擴張時 Galois 群的變化 ·····	107
5.3 Galois 理論大要 ·····	109
5.4 應用·····	111
6. Galois 的生平 ·····	114
7. Galois 理論的影響 ·····	119

7.1 群論 (group theory)	120
7.2 Lie 群與 Erlanger 綱領 (Lie groups and Erlangen program)	121
7.3 類體論 (class field theory)	121
7.4 近世抽象代數 (modern abstract algebra) ..	122
7.5 其他	123
8. Sturm 法則	123
8.1 實係數方程式實數根的數目	125
8.2 Sturm 法則	128
9. 多元高次聯立方程式	133
9.1 結式	134
9.2 代數曲線	137
10. 中國數學家的貢獻	138
10.1 聯立一次方程式與大衍求一術	138
10.2 增乘開方術	139
10.3 天元術	140
10.4 四元術	141
10.5 亂世中的數學家	142
註釋	144
參考資料	149
後 記	151

前 言

二十世紀的今天仍然有人在解古希臘幾何三大問題，有人窮畢生之力研究方程式解的公式，也有人在搜集畢氏定理的各種證明，據說多達七、八十種。這些人多半是玩票性質的「數學家」，他們從小對數學很感興趣，並且往往頗有天分，可惜陰錯陽差，未能獲得完整的高等數學訓練，因此對於近世數學的內容與精神不甚清楚。他們可能在中學聽過數學老師講古希臘幾何三大問題、Fermat 問題、Goldbach 問題、四色問題，老師可能還鄭重其事的告訴他們：「如果能夠解決以上任何一個問題，保證你可以一夜成名天下知。」從此他們就對這些問題一往情深的窮追不捨。

可是當他們把心血結晶公諸於世時，真正數學家的反應却是出奇冷淡。什麼原因呢？有人說是同行相忌，有人說是門戶之見，也有人說他們把精力用在一個完全錯誤的地方。

十九世紀以來，數學的進步實在不是「一日千里」四個字所能形容的。如果有人告訴一個「業餘數學家」，他所認識的

2 幾個有名的數學問題

數學基本上不超過十八世紀 Euler (1707 ~ 1783 年) 的範圍，「業餘數學家」一定不願意承認，並且以爲這種講法侮辱了他。有人可能認爲自己唸過「新數學」，應該跟得上時代潮流了吧。呵！我真希望似商品出售的「新數學」能夠經久耐用，不要像泡泡糖一樣，咀嚼幾次就被吐掉了！

本系列文章準備討論幾個有名的數學問題，如 Fermat 問題、古希臘幾何三大問題、方程式求解問題。這些問題都是初等的問題 (elementary problems)，也就是說只要具備高中程度的數學知識，就能夠了解與欣賞這些問題，也能夠自己動手研究這些問題。可是有多少人知道，幾個世紀以來數學家在研究這些問題的過程中已經走了多少路？開闢了多少新世界？發展了多少新工具？並且數學家對於這些問題的基本看法也一直在變動中。例如，在傳統高中代數的課程裏，恆等式的證明（即式子的變換）是一項重要的訓練；但是二十世紀的數學並不強調這種訓練，而把重點放在運算律及其基本性質。因此，如果有人宣稱他求出一種簡便的三次方程式根的公式，對十六世紀的 Francois Viète (1540 ~ 1603 年) 而言，可能是令人感興趣的成果，但是二十世紀的數學家或許只能很禮貌的說：「好極了，了不起的發現，就像有人想出某些口訣來幫助小學生更迅速的背誦九九乘法表。」

有天分的年輕人，如果對數學有興趣，不要把寶貴的時間浪費在沒有意義或已經解決的問題。在邁開腳步之前，能夠抬眼觀察一下，前人走過多少路、走過那些路，大概是不會有害的。



一、Fermat問題

1. 前言

本文是本系列文章的第一篇，主題是 Fermat 問題。Fermat 問題是整數論 (Theory of numbers) 的一個問題。

整數論的目的在于研究整數的基本性質，例如：

- 那些整數可以寫成 $x^2 + 3y^2$ 的形式，其中 x 與 y 都是整數？如 $7 = 2^2 + 3 \cdot 1^2$ ； $11 \neq x^2 + 3 \cdot y^2$ 。
- 是不是所有的正整數都可寫成四個整數的平方和（如， $7 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ ）？有幾種不同的寫法？
- 形式如 $4n+3$ 的質數，如 3, 7, 11, 19, ……，是不是有無窮多個？
- 能否用已知的函數（如，多項式或對數函數）來描述質數的分佈情形？

有歷史記載以來第一個研究整數論的，是亞歷山大城的 Diophantus (約 250 ~ 350 年)。他的著作「Arithmetica」總共十三卷，但是希臘文本只有六卷流傳後世，直到最近才發現另有四卷尚存阿拉伯譯本。這本書收集許多問題及其解法，假如，有一種問題是：求一組非零的有理數 x , y ，滿足 $x^2 - 26y^2 = 1$ 。讀者願意做一做這個問題嗎？（註一）

Diophantus 的工作並沒有激發更進一步的研究，直到十七世紀 Pierre de Fermat (1601 ~ 1665 年) 才突破 Diophantus 的局限，建立了近代整數論的基礎。此後由於

Leonhard Euler、Joseph Louis Lagrange (1736 ~ 1813 年)、Carl Friedrich Gauss (1777 ~ 1855 年)、Adrien Marie Legendre (1752 ~ 1833 年) 的苦心經營，整數論終於變成近代數學的一支主流。Gauss 曾經說：「數學是科學的女皇，而整數論是數學的女皇。」

整數論有許多難題，到現在還無法解決。例如：

1. Fermat 問題：若 n 是任意大於 2 的整數，方程式

$$x^n + y^n = z^n$$

沒有全異於零的整數解。

2. Goldbach 問題：任意大於 2 的偶數都可寫成兩個質數的和。

3. Catalan 問題：若 $x, y, m > 1, n > 1$ 都是正整數，則方程式 $x^m - y^n = 1$ 的解只有 $x = 3, y = 2, m = 2, n = 3$ 。

以上三個問題不知耗費多少數學家的心力，却始終得不到證明（註二）。正因為這三個問題太淺顯易懂，有些「業餘數學家」不免見獵心喜，慨然以解決這些問題為終身職志。如果他們知道專業數學家，曾經使用多少精妙艱深的方法，試圖解決這些問題的話，大概會嚇一大跳。看來毫不起眼的問題，背後却隱藏那麼多機關！

2. 什麼是 Fermat 問題？

法國數學家 Pierre de Fermat (1601 ~ 1665 年) 是一個有多方面才能的法官，他研究過希臘語言，也寫過詩，但是他在數學上的成就最大。Fermat 和 René Descartes (笛卡爾，1596 ~ 1650 年) 分別創建了解析幾何，他在微積分的創建與光學的研究上，也有極卓越的貢獻。此外，他還是近世整數論的開山祖師。

Fermat 問題是研究方程式 $x^n + y^n = z^n$ 的整數解。請注意幾個例子：

$$0^3 + 2^3 = 2^3 \quad ; \quad 0^4 + 3^4 = (-3)^4 \quad ;$$

$$5^7 + (-5)^7 = 0 \quad .$$

因此，在討論 Fermat 方程式 $x^n + y^n = z^n$ 時，我們真正有興趣的是全異於零的整數解。先考慮 $n=2$ 的情形，

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad ; \quad 5^2 + 12^2 = 13^2 \quad .$$

因此，Fermat 方程式的確可能有全異於零的整數解。所謂 Fermat 問題，就是想證明：

若 n 是任意大於 2 的整數，則方程式 $x^n + y^n = z^n$ 沒有全異於零的整數解。

在 Fermat 的時代，除了 Fermat 之外，幾乎沒有人對整數論感到興趣。譬如 Blaise Pascal (1623 ~ 1662 年) 是一個絕頂聰明的人，可惜他對整數論的問題興趣不高，更妙的是 Pascal 最後竟發現神學與數學還有趣。因此 Fermat 雖然發現了很多整數論的定理，却只能孤芳自賞。這種情形或許可以說明，Fermat 為什麼不愛把這些定理的證明寫下來（註三）。其實，Fermat 留下證明的整數論定理只有兩個，一個是：方

程式 $x^4 + y^4 = z^4$ 沒有全異於零的整數解；另一個是：聯立方程式 $x = 2y^2 - 1$, $x^2 = 2z^2 - 1$ 只有當 $x = 1$ 或 7 時有整數解。

Fermat 在研究 Diophantus 的著作「Arithmetica」時，曾在該書的空白處留下一段話。他說：

「任何立方數（即，可以表示成 x^3 的數，其中 x 是整數）絕不能拆成兩個立方數的和。四方數亦然。更一般的， n 方數都如此，只要 $n \geq 3$ 。我發現一個精妙絕倫的證明。可惜在這兒寫不下。」

這就是 Fermat 問題的來源。

Fermat 這本藏書現在早已失落了。Fermat 死後，他的兒子把他所有的數學文稿整理出版，數學家才知道，Fermat 已經開闢了一個新世界——整數論。

Fermat 自稱能夠證明的整數論定理，除了兩個例外，後代的數學家都能提出證明。這兩個例外，一個是錯的（見本文第 8 節），另一個就是 Fermat 問題，沒有人能夠證明或提出反例。正因為 Fermat 問題是 Fermat 留下的定理中最後一個還沒有解決的，所以有人把它叫做 Fermat 最後定理（Fermat last theorem）；把它叫做定理，是有一點冒險，因為到目前為止並沒有人能夠證明它。

1816 年與 1850 年巴黎科學院兩度提供 3,000 法郎獎金，徵求 Fermat 問題的答案，但是毫無結果。自 Euler 算起，曾經和 Fermat 問題打過交道的有名數學家不勝其數：例如，Gauss, Dirichlet, Legendre, Lamé, Kummer 分別做出幾

個特殊情形；Euler, Germain, Abel 做出某些特殊情形的部分結果；而 Cauchy 却不幸從一開始就走錯了路。

這麼多的一流數學家竟然會比不上一個 Fermat 嗎？因此，有人開始懷疑是不是 Fermat 自己的證明也不完全？這個定理會不會根本就是錯的呢？有趣的是，到目前為止，我們知道至少在 $3 \leq n \leq 125,000$ 時，方程式 $x^n + y^n = z^n$ 的確沒有全異於零的整數解（見本文第 7 節）。

從另一個角度來看，Fermat 問題究竟有什麼重要性呢？

Gauss 在給朋友的一封信說道：「Fermat 問題是一個孤立的問題，對我沒有特別的吸引力。我很容易列舉一大堆這類的問題，你既不能證明也提不出反例。」整數論的確有許多這種問題，例如，奇完全數的存在問題，Mersenne 數問題（註四）。研究這些問題的人，有時過度渲染它們，結果常把初學者引入牛角尖去，並且極易造成非數學家對數學價值的疑問。

但是偉大的 Gauss 這一次完全看走了眼。Fermat 問題並不是孤立的問題。Fermat 問題的探討很自然的引起代數整數（algebraic integers）的研究，因而創立了理想數（ideal numbers）的概念與代數數論（algebraic number theory）的基礎。從另一方面來看，Gauss 在同一封信說：「如果能夠進行二次、三次、四次互逆定律（reciprocity law）的推廣，則 Fermat 問題只不過是這種高次互逆定律所能推演出來的結果之一而已。」歷史證明 Gauss 只看到事物發展的一個方向，沒有看到另一個方向：Fermat 問題與高次互逆定律的研究

其實是相互影響的。德國數學家 David Hilbert (1862~1943 年) 在 1900 年的巴黎國際數學會，提出 23 個尚未解決的數學問題，他預測這些問題的研究將構成二十世紀數學的主流。Hilbert 的第九個問題就是高次互逆定律的研究。

Fermat 問題的敘述是這樣的淺顯，不免使某些人想憑從高中數學學來的粗淺數學性質解決 Fermat 問題。我不能說這種戰術一定不能解決 Fermat 問題，我只想指出一點，嘗試解決 Fermat 問題過程中，所耗費的智力與精力遠非一般人所能想像。1982 年在美國西雅圖開了一次有關 Fermat 問題的會議，會議記錄「Number theory related to Fermat's last theorem」由 Birkhäuser 公司出版（參考資料 6）。只要翻一翻這本書的目錄，馬上能夠感覺出來 Fermat 問題對數論的影響是多麼深廣。

1908 年 Fermat 問題的研究再度掀起高潮。一個德國人 Paul Wolfskehl 捐了 100,000 馬克，懸賞 Fermat 問題的完整解答，他委託 Göttingen 大學負責評審工作。應徵的論文必須刊登在數學期刊或自行印成專門著作的形式，然後向 Göttingen 大學提出申請。

這份獎金反而造成某些數學家的災難。1907 到 1908 一年之中，有 621 件應徵信件，不過全部是錯誤的。負責在這些滿紙荒唐的言論文中找出錯誤的數學家，一定是前世沒有積夠功德，今生才受此業報。

第一次世界大戰之後，馬克大幅貶值，這份獎金幾乎變成毫無價值。可是由於第二次世界大戰後西德的經濟復興，這份

獎金在 1958 年還值 7,600 馬克，到 1974 年已積累至 10,000 馬克左右（1 馬克匯率約為 14.7 元新台幣）。

近年來 Fermat 問題每年的應徵函件，堆積起來仍有三呎高。評審的人員極感困擾。他們只好把應徵函件分成兩類，一類是完全胡說八道的，立即退回；另一類看來還有幾分像數學的，交給 Göttingen 大學數學系研究生找出錯誤。

一位在評審小組工作的人說：「目前每個月大約總要收到三、四封信。

有些應徵者這麼說：『我現在只寄來答案的前半部，如果評審人員先寄 1,000 馬克過來，我才會把後半部寄出去。』也有人告訴我們，只要我們支持他的解答，他願意分給我們十分之一的獎金；否則，他寧可把解答投寄給蘇聯的期刊，讓德國數學界分享不到這份榮譽，而大丟其臉。

這些所謂的解答，只不過動用了非常初等的數學知識，然而還是要花費極大的心神才看得懂在說什麼，才找得出錯誤何在。應徵者有不少受過專科教育，因為在自己工作崗位上不受重視，希望藉解決 Fermat 問題成名。我拿過幾封應徵信給醫生看，醫生認為寫信的人有嚴重的精神分裂症。」（註五）

3. 方程式 $x^2 + y^2 = z^2$

我們先討論 $x^n + y^n = z^n$ 的整數解的基本性質。

性質 1： 如果 x, y, z 是滿足 $x^n + y^n = z^n$ 的整數，且 x, y, z 三數的最大公約是 1，則 x, y, z 兩兩互質。理由：若 e 是 x 與 y 的最大公約數，且 $e > 1$ ，則 e 整除 $x^n + y^n = z^n$ ，故 e 與 z 不會互質。矛盾。

性質 2： 若 x, y, z 是滿足 $x^n + y^n = z^n$ 的整數，則必可找到另一組整數 u, v, w ，使得 $u^n + v^n = w^n$ ，且 u, v, w 兩兩互質。理由：令 d 是 x, y, z 的最大公約數，

$$u = \frac{x}{d}, v = \frac{y}{d}, w = \frac{z}{d}。$$

性質 3： 若 p 與 m 是正整數，且 $x^p + y^p = z^p$ 沒有全異於零的整數解，則 $x^{pm} + y^{pm} = z^{pm}$ 也沒有全異於零的整數解。

性質 4： 要解決 Fermat 問題只需證明： $x^n + y^n = z^n$ 沒有全異於零的整數解，其中 $n=4$ 或奇質數（不為 2 的質數）。理由：任何一個大於 2 的整數必有一個因數是 4 或奇質數。

現在我們要找出 $x^2 + y^2 = z^2$ 的所有整數解。

定理 1： $x^2 + y^2 = z^2$ 的互質整數解為 $x = 2uv, y = u^2 - v^2, z = \pm(u^2 + v^2)$ ，其中 u, v 是任意互質整數，且 u, v 不同時為奇數。

證明 1： 令 x, y, z 是互質正整數，且 $x^2 + y^2 = z^2$ 。

若 x 與 y 都是奇數，則 z 是偶數。故 $x^2 + y^2$ 是 $4l+2$ 的型式， z^2 是 $4l'$ 的型式（ l 與 l' 是整數）。矛盾。

因此，不妨假定 x 是偶數， y 與 z 是奇數。

$$\text{由 } x^2 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y),$$

令 $x = 2r, z - y = 2s, z + y = 2t$ 得 $r^2 = st$ 。