高等院校精品课系列教材

高等院校经济数学系列教材

名品

概率论与数理统计（第三版）

Probability Theory and Mathematical Statistics

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

概率论与数理统计

（第三版）

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/上海财经大学应用数学系编．—3版．—上海：上海财经大学出版社，2012.4

高等院校精品课系列教材

高等院校经济数学系列教材

ISBN 978-7-5642-1284-1/F・1284

Ⅰ.①概… Ⅱ.①上… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①021

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第004901号

□ 责任编辑　刘光本

□ 责编电邮　lgb55@126.com

□ 责编电话　021－65904890

□ 封面设计　钱宇辰

□ 责任校对　王从远

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

（第三版）

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社出版发行

（上海市武东路321号乙　邮编200434）

网　址：http://www.sufep.com

电子邮箱：webmaster @ sufep.com

全国新华书店经销

同济大学印刷厂印刷

宝山葑村书刊装订厂装订

2012年4月第3版　2012年4月第1次印刷

787mm×1092mm　1/16　16.5印张　422千字

（习题集14印张　358千字）

印数：17 201－22 200　　定价：49.00元

（本教材赠习题集，请向售书单位索取）

内容提要

本书系上海财经大学应用数学系编写的经济数学系列教材之一。全书共十章，内容包括事件与概率、条件概率与独立性、随机变量及其分布、随机向量及其分布、数字特征与特征函数、极限定理、统计量与抽样分布、参数估计、假设检验、线性统计推断等。每章均配有不同难易程度的适量习题，书末附有习题答案或提示，供读者参考。

本书可供高等院校财经类专业本科生作为教材使用，也可作为考研学生自学、复习用书。学习本书的预修课程是高等数学和线性代数。

前 言

本书出版以来，被众多兄弟院校选作经济管理类专业数学基础课的教材。在前两版的使用过程中，我们陆续发现一些有待完善之处，本校学生和兄弟院校的同行们也提出了不少宝贵意见，在此一并表示感谢。

本课程于 2007 年被上海财经大学列入校级精品课程建设项目，经过四年的建设，已日臻完善，2011 年被列为上海市重点课程建设项目。为此，我们对《概率论与数理统计》教材进行了修订。由于第二版的总体结构受到了一致的认同，故本次修订对总体结构未加改动。修订工作包括：

1. 对第二版中的印刷错误和疏漏之处，进行了较彻底的改正。

2. 调整了部分例题和习题，使其与前后内容更加连贯和融合，并尽量体现与经济管理的结合。

3. 对第六章“极限定理”做了较大的改动，删除了一些不太直观的结论，增加了对有关定理、结论的阐述和解释。

4. 对配套的《概率论与数理统计习题集》也做了全面的调整和修改，以期更好地满足教师教学和学生学习的需要。

参加本次修订的成员是何其祥（教材第一、二、八、九、十章），杨勇（教材第三、四、五、七章），潘群（教材第六章），张晓梅（习题集第一至五章），何萍（习题集第六至十章），由何其祥总纂定稿。本书出版以来，得到了上海财经大学及应用数学系领导的关心与支持，并得到了上海财经大学出版社的协助，尤其是刘光本博士的认真编辑对保证教材的质量起到了积极的作用，在此表示衷心的感谢。

本书可供高等院校非数学类专业本科生作为教材使用，也可作为考研学生自学、复习的用书。学习本书的预修课程是高等数学和线性代数。

由于编者水平所限，书中错误难免，恳请专家和本书的使用者批评指正。

目　录

第一章

事件与概率

概率论是研究随机现象的数量规律的学科，是统计学的理论基础．事件和概率是概率论中最基本的两个概念．在这一章中，我们将以深入浅出的方式介绍这些概念，并将较完整地研究一类特殊的随机现象——古典概型，之后介绍一类颇有启发性的问题——几何概率，最后给出概率的公理化定义．

第一节 随机现象与样本空间

一、随机现象

当我们观察自然界和人类社会中各种事物的变化规律时，会发现两种不同类型的现象．一种我们称之为决定性现象，它在一定的条件下必然会出现某个结果．例如，在没有外力作用下，做匀速直线运动的物体必然继续做匀速直线运动；太阳必然从东方升起；任何一种生物总要经历生长、发育、衰老直至死亡等各个阶段等．这种在一定条件下必然会发生的事情称为必然事件．反之，那种在一定条件下必然不会发生的事情称为不可能事件．例如，"在一个大气压下，没有加热到 100℃的水沸腾"是不可能的．

必然事件和不可能事件虽然表现形式有所不同，但两者的本质是一样的．必然事件的反面就是不可能事件，而不可能事件的反面就是必然事件．必然事件和不可能事件组成决定性现象，它广泛存在于自然现象和社会现象中．概率论以外的数学学科研究的就是决定性现象的数量规律．

除了决定性现象以外，在自然现象和社会现象中还存在着与它有着本质区别的另一类现象．例如，今天无法准确地确定明天的最高或最低气温；金融领域中事先无法断言将来某时刻某证券交易所的指数；同一条生产线上用同样的工艺生产出来的灯泡寿命长短也呈现出偶然性，这是由于在生产过程中乃至对灯泡寿命试验的过程中种种偶然性的条件差异，使得每只灯泡的寿命不能事先确定．概率论中最经典的例子要数向上掷一枚硬币，结果可能是正面也可能是反面，事先无法断定．这些例子的一个共同特点是：在基本条件不变的情况下，一系列的试验或观察会得到各种不同的结果．换言之，就某一次的试验或观察而言，它可能会出现这种结果，也可能会出现那种结果，事先无法确定，呈现出一种偶然性，这种现象称为**随机现象**（random phenomenon）．概率论研究的就是这种随机现象所包含的数量规律．

那么随机现象是否普遍呢？回答是肯定的．世界上的万事万物都是相互依赖、相互影响的，某一次观察或试验的结果如何，往往受到许多偶然因素的影响，表现形式往往是偶然的或"随机的"，因而随机现象是普遍存在的，从而概率论的研究不但具有理论上的意义，而且具有

广泛的应用价值.

二、样本空间

对于随机现象,我们感兴趣的是它的结果,因此必须对它进行观察或试验,这种对随机现象的某一特征的试验或观察,称为**随机试验**,简称**试验**(trail). 具体来说,称一个试验为随机试验,必须满足下述条件:

(1)试验可以在相同的条件下重复进行;

(2)试验之前能确定所有可能的结果;

(3)试验之前不能确定将会出现所有可能结果中的哪一个.

例如,T_1:向上掷一枚硬币,观察正反面出现的情况;

T_2:检查生产流水线上的产品是否合格;

T_3:检查某商店某柜台一天的营业额.

我们把随机试验的每一个可能结果称为**样本点**(sample point),用 ω 表示;样本点全体组成的集合称为**样本空间**(sample space),用 Ω 表示. 随机试验应满足的条件(2),即是指试验之前能确定该试验的样本空间. 因此,要认识一个随机试验,首先必须确定相应的样本空间,这是研究随机现象的第一步. 下面我们来看几个例子.

例 1—1 向上掷一枚骰子,观察朝上一面的点数,所有可能的结果为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,如果将六个面分别涂以红、黄、蓝、绿、白、黑六种颜色,则 $\Omega=\{$红,黄,蓝,绿,白,黑$\}$,这两个样本空间表面上不同,但本质上是一致的,它们可以统一抽象地记为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$.

一般地,像上面只有有限个样本点的样本空间可以表示为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$. 样本空间的这种抽象表示,实质上是抓住了随机现象的本质,使得那些表面上不同而本质上一致的各种随机现象能用统一的模型来表示. 例如,只包含两个样本点的样本空间,既能作为掷硬币出现正面、反面的模型,又能用于人寿保险中"生存"与"死亡"的模型,以及描述天气时"下雨"与"不下雨"的模型,或者某公共汽车站"有人排队"与"无人排队"的模型等.

例 1—2 观察某"110"报警台在$[0,t]$内来到的报警电话数,其结果显然为一非负整数,但很难确定报警数的上界,因此样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$,这一样本空间中包含有无穷多个样本点,但它们可以按某种次序排列出来,这时我们称它有可列个样本点,其一般形式为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

例 1—3 测量某一零件的长度,考察其测量结果与真正长度的误差,样本空间 Ω 可取作 $[-M,M]$,其中 M 为最大正误差. 这里的样本空间 Ω 也含有无穷多个样本点,但它无法像例 1—2中的样本空间那样将样本点一一排出,我们称这样的样本空间所包含的样本点有不可列个.

例 1—4 为评价某学校小学生身体的生长发育状况,需要同时测量小学生的身高、体重和胸围. 在这一随机试验中,任一可能的结果即样本点是一个有序数组(x,y,z),其中 x,y,z 分别表示被测量小学生的身高、体重和胸围,因此样本空间为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0<x\leqslant a,0<y\leqslant b,0<z\leqslant c\}$,这里的 a,b,c 分别表示该校学生身高、体重和胸围的最大值.

从以上这些例子不难发现,随着所讨论随机试验的不同,相应的样本空间可能很简单,也可能很复杂. 在今后的讨论中,我们一般都假定样本空间是预先给定的,这种必要的抽象使我们能更好地抓住随机现象的本质,得到的结果也能得到广泛的应用.

第二节 随机事件与频率稳定性

一、随机事件

有了样本空间的概念，我们就可以定义随机事件了. 例如在例 1－1 中，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，用集合 $A=\{1,3,5\}$ 表示“得到的点数为奇数”，A 是 Ω 的一个子集. 同样，$B=\{1,2,3,4\}$ 表示“得到的点数不大于 4”，它也是 Ω 的子集. 当然也可用 $C_i=\{i\}$ 表示“得到的点数为 i”($i=1,2,\cdots,6$)，它们均是由单个样本点构成的集合. 又如在考察测量误差的例 1－3 中，样本空间 $\Omega=[-M,M]$，则 $D=[-0.5,0.5]$ 表示“测量结果与真正长度的误差绝对值不大于 0.5 个单位”. 这里的 A、B、C_i 和 D 均为随机现象中可能出现的结果，称它们为随机事件. 一般地，设 Ω 是随机试验 T 的样本空间，**随机事件**(简称**事件**)是指由 Ω 中的若干个样本点所组成的集合，或样本空间的某个子集. 称某个**随机事件 A 发生**，当且仅当该事件所包含的某个样本点出现. 习惯上，用 A,B,C 等大写拉丁字母表示随机事件.

由于随机事件是样本空间的子集，所以样本空间 Ω 本身也可以看作一个事件，由于在任何一次试验中总有 Ω 中的某一样本点出现，也就是说 Ω 总发生，所以 Ω 就是必然事件；类似地，不包含有任何样本点的空集 $\varnothing$ 也可以作为一个事件，由于在任何一次试验中总不可能有 $\varnothing$ 中的样本点出现，即 $\varnothing$ 总不发生，因此 $\varnothing$ 就是不可能事件. 当然，必然事件和不可能事件均属决定性现象，但我们宁可把它们作为随机现象的两个极端来处理，这样既是必需的也是方便的.

二、事件之间的关系与运算

给定一个样本空间，显然可以定义不止一个随机事件，分析这些事件之间的相互关系，不仅有助于认识事物的本质，而且可以通过对简单事件规律的研究去推算复杂事件的规律. 因此，下面我们介绍事件之间的相互关系和运算. 在下面的叙述中，如果没有特别声明，均假定样本空间 Ω 已经给定，而 $A,B,A_i(i=1,2,\cdots)$ 等均表示 Ω 的一些事件.

1. 包含关系

若事件 A 的每一个样本点都属于事件 B，则称 **A 包含于 B**，或称 A 是 B 的**特款**，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，这时事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生.

例如在例 1－2 中，若以 A 表示事件“$[0,t]$内来到的报警电话数不少于 1 500 次”，而 B 表示事件“$[0,t]$内来到的报警电话数不少于1 200次”，那么 $A=\{1\,500,1\,501,\cdots\}$，$B=\{1\,200,1\,201,\cdots\}$，容易看出 A 的每一个样本点都属于事件 B，即 $A\subset B$，此时 A 的发生必然导致事件 B 的发生. 显然，对任一事件 A，总有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 相等事件

对事件 A 与 B，如果同时成立 $A\subset B$ 和 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 是**等价**的或 **A 等于 B**，记为 $A=B$. 实际上，此时 A 与 B 表示同一个事件，它们所包含的样本点完全相同.

3. 交(积)

由同时属于事件 A 与事件 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的**交或积**，记为 $A\cap B$ 或 AB，事件 AB 表示事件 A 与事件 B 同时发生.

两个事件的交运算可以容易地推广到 n 个事件以至于可列个事件的场合. 事件 A_1,A_2，

$\cdots,A_n$ 的交事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，它由同时属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的样本点组成，表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生. 在可列个事件的场合，我们定义 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

4. 不相容事件

对事件 A 与 B，若 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B **互不相容**，或称 A 与 B 为**互斥事件**. 此时 A 与 B 不可能同时发生.

类似地，若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$，则称这 n 个事件互不相容. 更进一步，若可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j, i,j=1,2,\cdots$，则称 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容.

5. 并

由至少属于事件 A 与 B 中的一个的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的**并**，记为 $A\cup B$，事件 $A\cup B$ 表示事件 A 与 B 中至少有一个发生.

如果事件 A 与 B 互不相容，则称它们的并为和，记为 $A+B$.

两个事件的并运算可以容易地推广到 n 个事件以至于可列个事件的场合. 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，它由至少属于 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 中的一个的样本点组成，表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生. 同样，如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则称它们的并为和，记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

对于可列个事件的场合，我们定义 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 进一步，若这可列个事件互不相容，则称它们的并为和，记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

6. 逆

对于事件 A，由所有不属于 A 的样本点组成的集合称为事件 A 的**逆事件**或**对立事件**，记为 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 表示事件 A 不发生. 例如，若 A 表示事件"$[0,t]$内来到的报警电话数为偶数或 0"，则 $\overline{A}$ 表示"$[0,t]$内来到的报警电话数为奇数". 显然，若 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，则 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，即 $\overline{\overline{A}}=A$. 必然事件和不可能事件互为对立事件.

7. 差

由属于事件 A 而不属于 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$，事件 $A-B$ 表示事件 A 发生而事件 B 不发生，显然 $A-B=A\overline{B}$.

在进行事件的运算时，我们作如下顺序的约定：首先进行逆的运算，再进行交的运算，最后才进行并或差的运算.

由于事件是通过集合来定义的，所以上面介绍的事件之间的关系与运算和相应的集合之间关系与运算非常相似. 一方面，我们可以借助集合论的知识和方法来帮助理解事件之间的关系与运算，例如可以用直观的维恩(Venn)图(见图 1－1)来描述上面介绍的这些关系与运算；但另一方面，应学会用概率论的观点来解释这些关系与运算.

对于事件之间的运算，满足以下法则：

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3)分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

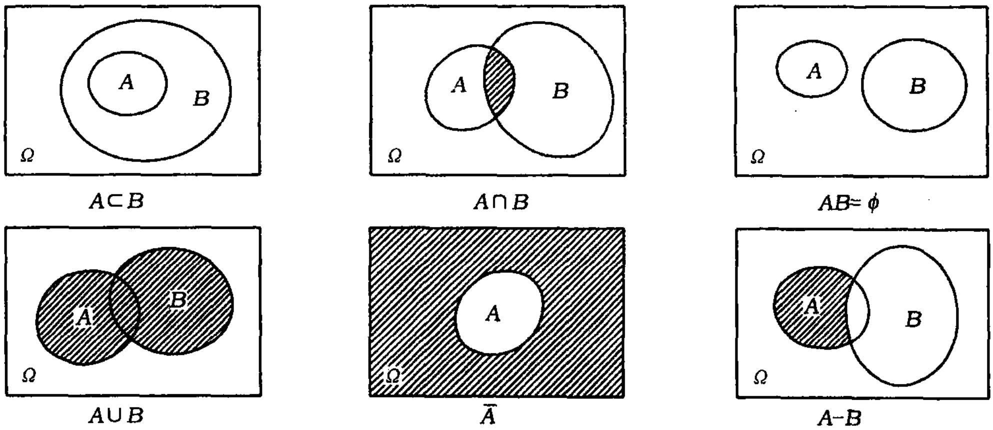

图 1—1　事件之间的关系与运算

(4)德莫根(De Morgan)定理：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述运算法则可以推广到多个事件甚至可列个事件，譬如对于德莫根定理，我们有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

例 1—5　设 A,B,C 为三个事件，利用它们表示下列事件：

(1)A 发生而 B,C 都不发生：$A\overline{B}\,\overline{C}$或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$；

(2)三个事件都不发生：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$或$\overline{A\cup B\cup C}$；

(3)三个事件中至少发生一个：$A\cup B\cup C$ 或 $ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$.

三、频率与概率

某一次试验或观察中出现结果的偶然性并不等于说随机现象是杂乱无章和无规律的，当我们对随机现象进行大量重复的试验或观察时，就会呈现出明显的规律性——频率稳定性.

定义 1—1　对于随机事件 A，若在 N 次试验中出现了 n 次，则称

$$F_N(A)=\frac{n}{N}$$

为随机事件 A 在 N 次试验中出现的**频率**(frequency).

为了说明频率稳定性，让我们先看一些著名的例子.

例 1—6　抛一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面，事先作出确定的判断是不可能的. 但假如硬币是均匀的，那么，我们有理由认为出现正面和反面的可能性应该一样，即在大量重复的试验中出现正面和反面的频率都应接近 50%. 为验证这一点，历史上曾有不少人做过试验，其结果见表 1—1.

表 1－1 掷硬币试验数据表

试 验 者	投掷数	出现正面的次数	出现正面的频率
德莫根(D. Morgan)	2 048	1 061	0.5181
蒲 丰(Buffon)	4 040	2 048	0.5069
皮尔逊(K. Pearson)	12 000	6 019	0.5016
皮尔逊(K. Pearson)	24 000	12 012	0.5005

例 1－7 任意指定一本英文书，翻到任意一页，任意指定该页中的某一行及该行中的任意一个位置，记录所得到的结果. 大量重复这一试验，会发现 26 个字母和其他字符(包括标点符号和空格)的使用频率相当稳定，表 1－2 是经过大量试验后得出的.

表 1－2 字母及其他字符使用频率

字 符	其他	E	T	O	A	N	I	R	S
频 率	0.2	0.105	0.072	0.0654	0.063	0.059	0.055	0.054	0.052
字 符	H	D	L	C	F	U	M	P	Y
频 率	0.047	0.035	0.029	0.0234	0.0225	0.0225	0.021	0.0175	0.012
字 符	W	G	B	V	K	X	J	Q	Z
频 率	0.012	0.011	0.0105	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

这样的例子还可以举出很多，这些例子表明了这样一个共同的事实：虽然在一次试验或观察中某一个随机事件 A 是否发生是偶然的，但当试验次数 N 很大时，事件 A 出现的频率总在某个固定常数附近摆动，而且一般来说，N 越大，摆动的幅度越小，这一规律称为**频率稳定性**(frequency stability).

频率稳定性是由被观察对象的固有属性决定的. 抛掷一枚硬币，可能出现正面或反面，假如硬币是均匀的，这一属性决定了当你多次抛掷硬币时，出现正面的次数总是接近总抛次数的 $\frac{1}{2}$；至于英文字母被使用的频率，虽然各个作家的写作风格各不相同，书籍出版社也各有自己的排版方式，但字母被使用的情况总是受着文字结构、语法结构这些固有规律的支配，正是这些规律决定了英文字母使用频率的稳定性. 因此，随机事件的频率稳定性表明了一个随机事件发生的可能性大小，是随机事件本身固有的客观属性，因此可以对它进行度量. 对于随机事件 A，我们用 $P(A)$ 来刻画随机事件 A 发生的可能性大小，称 $P(A)$ 为事件 A 发生的**概率**(probability). 习惯上，称这一定义为概率的统计定义. 显然，$P(A)$ 即为频率稳定性中的稳定值.

对于随机现象，仅讨论它可能出现什么结果，价值不大，而在讨论可能出现各种结果的同时，指出各种结果出现的可能性的大小才有意义. 概率概念的引进，使得我们可以对随机现象作出定量的研究.

从上述可见，频率和概率既非同一概念，又有十分密切的联系. 譬如，当试验次数 N 无限增大时，频率和概率之间应有某种极限关系，这正是概率论中的一大课题——极限理论的雏形，它的严格讨论将放在第六章中给出.

第三节 古典概型与几何概率

一、古典概型

概率论的一个基本任务,就是要计算各种随机事件发生的概率. 在第二节中,我们将概率描述性地定义成事件发生的可能性大小,或者说频率的稳定值. 但在许多实际问题中,为了求得某一事件的概率而进行大量重复的试验,有的是不经济的,有的是不可能的,所以我们无法根据这样的定义来计算各种事件发生的概率.

在这一节中,我们先讨论一类简单的随机试验,这类随机试验具有以下两个特征:

(1)试验的全部可能结果只有有限个,或者说只有有限个样本点,譬如 n 个,即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\},$$

(2)每个样本点 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 出现的可能性即发生的概率相同:

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})=\frac{1}{n},$$

具有这两个特征的随机现象的数学模型称为**古典概率**(classical probability model).

这类随机现象是概率论发展初期人们主要的研究对象,许多早期概率论的概念和结果也都是对它作出的,甚至到了现在,古典概型在概率论中仍有一定的地位. 这一方面是因为它简单而且直观,对它的讨论有助于理解概率论中的许多基本概念;另一方面,许多实际问题都可以概括为这一模型,古典概型有着较广泛的应用.

对于古典概型,设它的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,每个样本点出现的概率均为 $\frac{1}{n}$,若 A 为任一事件,由于它的每一个样本点的出现都可导致 A 的发生,而且每次试验不可能有两个样本点同时出现,因此它的概率 $P(A)$ 可看作 A 中各个样本点的概率之和. 例如,若 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$,则

$$P(A)=P(\{\omega_{i_1}\})+P(\{\omega_{i_2}\})+\cdots+P(\{\omega_{i_m}\})==\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m}=\frac{m}{n}.$$

所以在古典概型中,事件 A 的概率是一个分数,分母为样本点总数 n,而分子是 A 所包含的样本点个数 m. 由于 $\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}$ 的出现必然导致 A 的发生,或者说它们的出现对 A 的发生有利,因此通常称 $\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}$ 为 A 的"有利场合",这样

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}=\frac{A\text{ 的有利场合数}}{\text{样本点总数}}.$$

法国数学家拉普拉斯(Laplace)在 1812 年把上式作为概率的一般定义,但因为这一定义只适合于古典概型,因此我们称它为**概率的古典定义**.

例 1—8 从 0,1,…,9 这十个数字中任取一个,求取得奇数数字的概率.

解 将从 0,1,…,9 这十个数字中任取一个的所有可能结果作为样本空间,样本点总数 $n=10$,以 A 记取得奇数数字的事件,A 的有利场合数 $m=5$,所以

$$P(A)=\frac{5}{10}=0.5.$$

例 1—9 从 $1,2,\cdots,n$ 中任取两个,求所得两数之和为偶数的概率.

解 记 A 为"所得两数之和为偶数"的事件. 样本点总数为组合数 C_n^2. 若 n 为偶数,此时偶数和奇数的个数均为 $\frac{n}{2}$,且由于偶数与偶数之和以及奇数与奇数之和为偶数,此时 A 的有利场合数 $m_A=2\cdot C_{\frac{n}{2}}^2$;若 n 为奇数,此时偶数的个数为 $\frac{n-1}{2}$,奇数的个数为 $\frac{n-1}{2}+1$,A 的有利场合数 $m_A=C_{\frac{n-1}{2}}^2+C_{\frac{n-1}{2}+1}^2$. 因此

$$P(A)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot C_{\frac{n}{2}}^2}{C_n^2}=\dfrac{n-2}{2(n-1)}, n\text{ 为偶数}\\[2ex] \dfrac{C_{\frac{n-1}{2}}^2+C_{\frac{n-1}{2}+1}^2}{C_n^2}=\dfrac{n-1}{2n}, n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

例 1—10 某批产品共 N 件,其中有 M 件为次品($M<N$),从中每次任意抽取 1 件产品检查,共取 n 次,求恰好有 k 件次品的概率,如果:(1)每次检查后的产品不放回;(2)每次检查后的产品放回.

解 (1)将从 N 件产品中任抽 n 件产品的所有可能结果取作样本空间,总的抽法有 C_N^n 种. 以 A 记抽取的 n 件产品中恰好有 k 件次品的事件,A 的有利场合数的计算,先要从 M 件次品中抽取 k 件,可能的抽法有 C_M^k 种,又要从 $N-M$ 件正品中抽取 $n-k$ 件,同理有 C_{N-M}^{n-k} 种取法,从而随机地抽取 n 件,恰好有 k 件次品的取法共有 $C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}$ 种,因此所求概率为

$$P(A)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=0,1,\cdots,\min(M,n).$$

(2)仍将从 N 件产品中任抽 n 件的所有可能结果取作样本空间,由于检查采用有放回的方式,此时总的抽法有 $N\cdot N\cdots N=N^n$ 种. 记 B 为抽取的 n 件产品中恰有 k 件次品的事件,则 B 的有利场合数为 $C_n^kM^k(N-M)^{n-k}$,这是因为每次从 M 件次品中抽取 1 件,取 k 次,共有 M^k 种取法,每次从 $N-M$ 件正品中抽取 1 件,取 $n-k$ 次,共有 $(N-M)^{n-k}$ 种取法,又 k 件次品出现在 n 件样品中的方式共有 C_n^k 种,从而

$$P(B)=\frac{C_n^kM^k(N-M)^{n-k}}{N^n}=C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

例 1—11 设有 n 个各不相同的球,每个球都以相同的概率 $\frac{1}{N}$ 落到 $N(N\geqslant n)$ 个格子的每一格中,求:

(1)某指定的 n 个格子中各有一球的概率;

(2)恰有 n 个格子中各有一球的概率;

(3)某指定的格子中恰好有 $k(k\leqslant n)$ 个球的概率.

解 (1)以 A 表示"某指定的 n 个格子中各有一球"的事件,由于每个球可以落入 N 个格子的任一格中,所以 n 个球在 N 个格子中的分配法共有 N^n 种,而 A 的有利场合数显然为 $n!$,所以

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2)以 B 表示"恰有 n 个格子中各有一球"的事件,由于 n 个格子可以任选,故共有 C_N^n 种选法,对于每一种选定的 n 个格子,有利场合数正如第一小题为 $n!$,所以

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

(3)以 C 表示“某指定的格子中恰有 k 个球”的事件，样本点总数依然为 N^n. C 的有利场合数的计算，可先从 n 个球中选取 k 个放入指定的格子中，共有 C_n^k 种取法，然后将余下的 $n-k$ 个球任意放入其余的 $N-1$ 个格子，共有 $(N-1)^{n-k}$ 种放法，因此 C 的有利场合数为 $C_n^k\cdot(N-1)^{n-k}$，从而事件 C 的概率为

$$P(C)=\frac{C_n^k\cdot(N-1)^{n-k}}{N^n}.$$

这一例子是古典概率中的典型问题，不少实际问题都可以归结为这一模型. 如概率论历史上的生日问题：求有 n 个人参加的集会上没有两人生日相同的概率 p_n. 不妨假定一年为 365 天，并且 $n\leqslant 365$. 若把 n 个人看作上面例子中的 n 个球，365 天看作 $N=365$ 个格子，则所求概率为

$$p_n=\frac{C_{365}^n}{365^n}.$$

下表给出了若干 n 及 p_n 的值：

n	5	10	20	23	30	40	60
p_n	0.973	0.883	0.589	0.493	0.294	0.11	0.006

例 1—12　袋中有 a 个白球和 b 个黑球，每次从袋中任取一球，取出的球不再放回去，求第 k 次取到白球的概率.

解　以 A_k 表示“第 k 次取到白球”这一事件，为了求 A_k 发生的概率，我们设想球与球之间都是有区别的，譬如白球分别标有编号 $1,2,\cdots,a$，黑球的编号为 $a+1,a+2,\cdots,a+b$，将它们全部取出排成一行，每一种可能的排列作为样本点，所有可能的排列结果为样本空间，样本点总数为 $(a+b)!$，而 A_k 的有利场合数可以这样来计算：第 k 个位置只放白球，而其他 $a+b-1$ 个位置可以任意放置，因此有利场合数为 $a(a+b-1)!$，于是有

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b},k=1,2,\cdots,a+b.$$

注意到这一概率与 k 无关，即取到白球的概率与取球的先后次序无关，如将这一模型用于抽签，则表示“抽签是公平的”.

如果认为同颜色的球之间是无区别的，仍将全部球取出后排成一行. 此时，若将 a 个白球的位置固定，则全部球的排列就完全确定，每一种这样的排列作为一个样本点，样本点总数为 C_{a+b}^a，而 A_k 的有利场合数为 C_{a+b-1}^{a-1}，这是由于第 k 个位置必须放白球，只有一种放法，而剩下的 $a+b-1$ 个位置上有 $a-1$ 个位置放置白球，共有 C_{a+b-1}^{a-1} 种放法，因此

$$P(A_k)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^a}=\frac{a}{a+b},k=1,2,\cdots,a+b.$$

考虑以上两种不同的解法，其主要差别在于选取的样本空间不同，第二种解法中的每一个样本点是由第一种解法中 $a!\cdot b!$ 个样本点合并而成的.

从以上这些例子可以看出，古典概型中事件的概率的计算有时比较容易，有时有一定的技巧性. 计算的要点：一是要计算样本点的总数，二是要求出有关事件的有利场合数. 而在这些计算中，经常需要借助排列与组合公式. 另外，在讨论古典概型的问题时，我们常常会用一些直观的、形象化的模型来描述，譬如摸球模型，这样处理的好处是使得许多具体的问题都能用同一模型来表达，从而抓住了随机现象的本质，不至于被个别具体情况所蒙蔽.