全国高等农林院校“十二五”规划教材

线性代数学习指导

胡桂华　罗桂生◎主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十二五”规划教材

线性代数学习指导

胡桂华　罗桂生　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导 / 胡桂华，罗桂生主编．—北京：中国农业出版社，2014.12（2016.1 重印）
全国高等农林院校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-109-19982-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①胡… ②罗… Ⅲ.①线性代数-高等学校-数学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 308731 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区麦子店街 18 号楼）
（邮政编码 100125）
策划编辑　魏明龙
文字编辑　魏明龙

北京中兴印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行
2014 年 12 月第 1 版　　2016 年 1 月北京第 2 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：16.75
字数：305 千字
定价：29.00 元

内容简介

编写《线性代数学习指导》的目的是：为学习线性代数课程的学生提供一些课外学习辅导，帮助学生加深对线性代数中基本概念、基本定理的理解，引导学生掌握线性代数的解题方法和技巧，启发、培养学生学习线性代数的兴趣。

本书是与罗桂生、胡桂华主编的普通高等教育农业部“十二五”规划教材，普通高等教育“十二五”应用型本科系列教材《线性代数教程》配套使用的学习指导书，内容包括矩阵、行列式、n 维向量、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性方程组的数值解法及线性空间与线性变换等内容。每一章都按照基本要求、内容提要、主要方法、典型题解、教材习题选解、自测题等六部分编写，旨在起到画龙点睛、解难释疑的效果，构建课内与课外并举的学习氛围。

本指导书适合作为各类专业学生学习线性代数课程的学习参考书和教师教学的教学参考资料，也可以作为考研学生考研复习的强化训练指导书。

编写人员名单

主　编　胡桂华　罗桂生

副主编　尤添革　杨曼丽

参　编　谢明芳　刘　静　魏艳辉

　　　　　帅昌浩　黄加增

QIANYAN 前言

本指导书是与罗桂生、胡桂华主编的普通高等教育农业部“十二五”规划教材，普通高等教育“十二五”应用型本科系列教材《线性代数教程》配套使用的学习指导书。目的是为了帮助学生加深对线性代数的基本概念、基本定理和基本内容的理解与掌握，进一步引导学生能在较短的时间内掌握线性代数的基本理论与应用，学会解题方法和技巧，同时培养学生学习和应用线性代数知识的兴趣。

线性代数学习指导是以培养学生的抽象思维、逻辑推理、空间想象和自学等能力，提高学生分析问题和解决问题的能力为目的编写的。每一章的内容包括本章的基本要求、内容提要、主要方法、疑难点解析、典型题解、教材习题选解、自测题及解答。基本要求给出了每一部分内容应该掌握的程度；内容提要给出了每一章的主要概念、公式和主要结论；主要方法介绍了每一章解题所用到的主要方法；疑难点解析介绍本章的重点内容和较难理解的内容，并列举实际例子给予分析和解答，以帮助学生释疑解难并加深对概念和方法的理解与掌握；典型题解选一些与本章内容相关的经典题型，对它们做了详细的解答和部分评注，并归纳了一些一般的结论和解题方法与技巧；教材习题选解对教材习题中部分难度较大的习题做出详细的解答，有一题多解尽量给出多种解法，并做适当的评注；自测题及解答给出与本章内容有关的各种题型，使学生自我检测对本章知识的掌握程度，自测题附有答案，以备读者自我检测之用。

本书的第一章由罗桂生老师编写，第二章由尤添革老师编写，第三章由刘静老师编写，第四章由魏艳辉老师编写，第五章由杨曼

丽老师编写，第六章由胡桂华老师编写，第七章由帅昌浩老师编写，第八章由黄加增老师编写，第九章由谢明芳老师编写，全书由胡桂华、罗桂生两位老师负责统稿。限于水平，书中难免存在不足之处，恳请同行和读者批评指正。

编者

2014 年 6 月

MULU 目 录

前言

第一章 矩阵 …… 1

一、基本要求 …… 1
二、内容提要 …… 1
三、主要方法 …… 6
四、典型题解 …… 9
五、教材习题选解 …… 16
六、自测题 …… 31

第二章 行列式 …… 35

一、基本要求 …… 35
二、内容提要 …… 35
三、主要方法 …… 40
四、典型题解 …… 41
五、教材习题选解 …… 54
六、自测题 …… 66

第三章 n 维向量 …… 68

一、基本要求 …… 68
二、内容提要 …… 68
三、主要方法 …… 72
四、典型题解 …… 73
五、教材习题选解 …… 82
六、自测题 …… 95

第四章 线性方程组 …… 100

一、基本要求 …… 100
二、内容提要 …… 100
三、主要方法 …… 102
四、典型题解 …… 102
五、教材习题选解 …… 114
六、自测题 …… 129

第五章 向量空间 …… 133

一、基本要求 …… 133
二、内容提要 …… 133
三、主要方法 …… 136
四、典型题解 …… 137
五、教材习题选解 …… 148
六、自测题 …… 154

第六章 矩阵的特征值与特征向量 …… 157

一、基本要求 …… 157
二、内容提要 …… 157
三、主要方法 …… 159
四、典型题解 …… 160
五、教材习题选解 …… 182
六、自测题 …… 196

第七章 二次型 …… 199

一、基本要求 …… 199
二、内容提要 …… 199
三、主要方法 …… 201
四、典型题解 …… 201
五、教材习题选解 …… 204
六、自测题 …… 214

第八章 线性方程组的数值解法 …… 217

一、基本要求 …… 217

二、内容提要 ······ 217
三、主要方法 ······ 220
四、典型题解 ······ 221
五、教材习题选解 ······ 224
六、自测题 ······ 227

第九章　线性空间与线性变换 ······ 231

一、基本要求 ······ 231
二、内容提要 ······ 231
三、主要方法 ······ 237
四、典型题解 ······ 237
五、教材习题选解 ······ 247
六、自测题 ······ 251

参考文献 ······ 256

第一章　矩　　阵

一、基本要求

（1）理解矩阵的概念，了解单位矩阵、对角矩阵、上(下)三角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵及其性质．

（2）掌握矩阵的线性运算(加法、减法及数乘)、乘法运算、转置运算及其运算规律，理解方阵的方幂运算．

（3）掌握可逆矩阵的概念，熟练掌握矩阵可逆的充要条件及矩阵求逆的方法.

（4）熟练掌握矩阵的初等变换及其应用(利用初等变换求矩阵的标准形，求可逆矩阵的逆矩阵，解矩阵方程等).

（5）了解初等矩阵及其性质，了解初等变换与初等矩阵之间的关系，了解矩阵等价的概念．

（6）了解分块矩阵及其运算．

二、内容提要

（一）矩阵的概念

1. 定义

排列成 m 行 n 列的 $m\times n$ 个数形成的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ **矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$，简记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的**元素**，简称为$(i,\ j)$元．

当 $m=n$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 称为 n **阶方阵**或 n **阶矩阵**，而 n 称为方阵的阶数．

2. 特殊矩阵

（1）行矩阵：只有一行的矩阵．

（2）列矩阵：只有一列的矩阵．

（3）零矩阵：所有元素都是零的矩阵．

（4）对角矩阵：除了主对角线元素外，其余元素全为零的方阵．

（5）数量矩阵：主对角线上的元素全都相同的对角阵．

（6）单位矩阵：主对角线上的元素都是 1 的对角阵．n **阶单位矩阵**记作

$$\boldsymbol{E}_n=(\delta_{ij})，其中\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

（7）负矩阵：若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则 $\boldsymbol{B}=(-a_{ij})$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记作 $-\boldsymbol{A}$.

（8）对称矩阵：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$的方阵．

（9）反对称矩阵：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=-a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$的方阵．

3. 矩阵的相等

（1）同型矩阵：如果两个矩阵的行数和列数分别相等，则称它们是**同型矩阵**.

（2）矩阵相等：如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，即 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，且对应的元素都相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

（二）矩阵的运算

1. 矩阵的线性运算(加法、减法与数乘)

（1）定义：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是同型矩阵，定义

① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(c_{ij})$，其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

② $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

③ $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})=\boldsymbol{A}k$，$k$ 是数．

（2）运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，λ、μ 是数)：

① 加法交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

② 加法结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

③ 数与矩阵的结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$.

④ 数乘分配律：$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$；$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$.

2. 矩阵的乘法

（1）定义：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，定义 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，且

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n).$$

（2）运算规律：

① 乘法结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

② 左乘分配律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；

右乘分配律：$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

③ 数乘结合律：$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$（$\lambda$ 是数）.

（3）单位矩阵的性质：$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

（4）不成立的算律：

① 交换律不成立，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 未必成立．

② 存在零因子，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能断言 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

③ 消去律不成立，即若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

3. 方阵的方幂

（1）定义：设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，k 是正整数，则 $\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k个}$. 当 $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵时，则

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}，\boldsymbol{A}^{-k}=(\boldsymbol{A}^{-1})^k=(\boldsymbol{A}^k)^{-1}.$$

（2）运算规律：$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$，$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$，其中，$k$、$l$ 是整数．但一般 $(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$，除非方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是可交换的．

注意：不是方阵的矩阵没有幂运算，不可逆的方阵没有 0 次幂和负指数幂.

4. 矩阵的转置

（1）定义：将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列(或将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列换成同序数的行)，这样得到的矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

（2）性质：

① $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

③ $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

④ $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，此性质可以推广到有限多个矩阵的情形，如 $(\boldsymbol{ABC})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

（三）矩阵的分块运算

将一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用横线和竖线分成若干个子矩阵，每个子矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**子块**，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**．根据需要，一个矩阵可以作不同的分块．

设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix},$$

简记作 $A=(A_{ij})_{r\times s}$，称为 $r\times s$ 分块矩阵.

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则是相似的.

（四）可逆矩阵

1. 定义

设 A 是 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 B，使

$$AB=BA=E,$$

则称方阵 B 为 A 的逆(矩)阵，记作 A^{-1}，并称方阵 A 是可逆方阵，简称为可逆的.

注意：方阵 A 的逆矩阵是唯一的.

2. 运算规律

① $(A^{-1})^{-1}=A.$

② $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}(k\neq 0).$

③ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，其中 A、B 是同阶可逆方阵. 可以推广到有限多个同阶可逆矩阵的情形，如 $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

④ 若 A 可逆，则 A^{T} 亦可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

3. 方阵 A 可逆的充要条件

① 方阵 A 可逆的充要条件是其行列式 $|A|\neq 0$.

② n 阶方阵 A 可逆的充要条件是，存在 n 阶方阵 B 使得 $AB=E$(或 $BA=E$). 且当 $AB=E$(或 $BA=E$)时，有 $A^{-1}=B$.

注意：按定义判断，必须两个等式 $AB=E$ 及 $BA=E$ 同时成立，才能明确 $A^{-1}=B$. 而按②，如果已知 A、B 是同阶方阵，则两个等式中只要有一个成立，就可断言 $A^{-1}=B$，这是比较方便的.

（五）矩阵的初等变换

1. 矩阵的初等变换与标准形

（1）初等行变换：

① **换法变换**：$r_i\leftrightarrow r_j$（i、j 两行对调）.

② **倍法变换**：$r_i\times k$ 或 kr_i（第 i 行的所有元素乘以数 $k\neq 0$）.

③ **消法变换**：r_i+kr_j(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上).

把行换为列，把记号 r 换为 c 即得相应的初等列变换：

(2) 初等列变换：

①$c_i\leftrightarrow c_j$；②$c_i\times k(k\neq 0)$；③c_i+kc_j.

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

(3) 矩阵的等价：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次的初等变换变为矩阵 $\boldsymbol{B}$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

由初等变换的定义，可知矩阵的等价关系具有下列性质：

① 反身性：$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$.

② 对称性：若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$.

③ 传递性：若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$.

初等变换都是可逆的，而且它们的**逆变换**是同一类型的初等变换．如对于初等行变换：变换 $r_i\leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身；$r_i\times k$ 变换的逆变换就是 $r_i\times\frac{1}{k}$(或记作 $r_i\div k$)；变换 r_i+kr_j 的逆变换就是变换 $r_i+(-k)r_j$(或记作 r_i-kr_j).

(4) 矩阵的标准形：任何 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，都可用有限次的初等行变换化为所谓的**行阶梯形矩阵**．这类矩阵的特征是：**非零行的第一个非零元素前面，零元素的个数至少比上一行多一个．从上至下，每一行的第一个非零元素与其前面的零元素之间的分界线呈阶梯状**.

若行阶梯形矩阵的非零行(至少有一个非零元素的行)的第一个非零元为1，且其所在的列的其余元素都为0，则称之为**行最简形矩阵**.

任何 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，都可用有限次初等变换化为如下形式的矩阵：

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{J}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**标准形**，它的左上角是一个 $r(r\leqslant\min\{m,n\})$ 阶单位阵，其余元素都是零.

注意：单用初等行变换一般不能将矩阵化为标准形.

2. 初等方阵及其性质

(1) 初等方阵：由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵或初等方阵**.

对应于三种初等变换，有三种初等方阵：

① $\boldsymbol{E}(i,j)$：对应于 $r_i\leftrightarrow r_j$ 或 $c_i\leftrightarrow c_j$ 的初等方阵.

② $\boldsymbol{E}(i(k))$：对应于 $r_i\times k$ 或 $c_i\times k$ 的初等方阵.

③ $\boldsymbol{E}(i,\ j(k))$：对应于 r_i+kr_j 或 c_j+kc_i 的初等方阵 .

注意：初等方阵都是可逆的，它们的逆阵也是初等方阵，且

$$\boldsymbol{E}(i,\ j)^{-1}=\boldsymbol{E}(j,\ i),\ \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),\ \boldsymbol{E}(i,\ j(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,\ j(-k)).$$

（2）初等方阵与初等变换的关系：

① 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换相当于用相应的初等方阵左乘 $\boldsymbol{A}$.

② 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换相当于用相应的初等方阵右乘 $\boldsymbol{A}$.

3. 矩阵的等价表示

① 两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是，存在有限个 m 阶初等方阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_r$ 及 n 阶初等方阵 $\boldsymbol{Q}_1$，$\boldsymbol{Q}_2$，…，$\boldsymbol{Q}_s$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_r\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_s.$$

② 两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBQ}$.

③ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与同阶单位阵 $\boldsymbol{E}$ 等价 .

④ n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是，存在有限个 n 阶初等方阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_m$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_m.$$

三、主要方法

矩阵的运算是本章的重点，其中又以矩阵乘法和矩阵的初等变换最为重要 . 矩阵的乘法一般不难掌握，但求方阵的高次幂却需要一些技巧 . 矩阵的初等变换之所以重要，是因为可以用来求矩阵的标准形，求可逆方阵的逆矩阵，求矩阵的秩（第三章介绍）、判断向量组的线性相关性（第三章介绍）和解线性方程组等 .

此外，分块矩阵的运算是矩阵运算的一个重要方法 . 为了使分块矩阵运算能够进行，必须注意分块的方式，特别是利用分块矩阵作乘法和求逆阵时 . 对矩阵按行分块与按列分块，以及按对角矩阵分块都是常用的分块方式 .

下面介绍一些矩阵运算的常用方法：

1. 求方阵高次幂的方法

（1）数学归纳法：从计算 $\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^3$，…中发现 $\boldsymbol{A}^k$ 的元素的规律，再用数学归纳法加以证明 .

（2）二项公式法：将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分解成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$，若 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 可交换，则有

$$A^k=(A_1+A_2)^k=A_1^k+C_k^1A_1^{k-1}A_2+C_k^1A_1^{k-2}A_2^2+\cdots+C_k^{k-1}A_1A_2^{k-1}+A_2^k,$$

其中 A_1、A_2 的方幂要容易计算(若 A_1 与 A_2 不可交换，上述展开式是不成立的).

(3) 相似对角化法：若求得可逆方阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}，则有 A^k=P\begin{pmatrix}\lambda_1^k&&&\\&\lambda_2^k&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^k\end{pmatrix}P^{-1}(见第六章).$$

2. 初等变换的应用方法

(1) 求矩阵的标准形：

① 直接法：$A\xrightarrow{\text{初等变换}}J=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$(行变换与列变换可以并用).

② 行阶梯形矩阵法：$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}B$(行阶梯形矩阵)，若行阶梯形矩阵 B 中"非零行"的个数为 r，则矩阵 A 的标准形为

$$J=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}.$$

(2) 求可逆矩阵的逆阵：设 A 是 n 阶可逆矩阵，则

① 由 $(A\mid E_n)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E_n\mid A^{-1})$，求得 A^{-1}.

② 由 $\begin{pmatrix}A\\---\\E_n\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E_n\\---\\A^{-1}\end{pmatrix}$，求得 A^{-1}.

注意：(ⅰ)当变换不能进行到底时，表明 A 不可逆.

(ⅱ)求逆矩阵还可以应用伴随矩阵求，即有公式(见第二章)：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$. 不过，阶数大于 2 的方阵 A 的伴随矩阵 A^* 的计算比较麻烦. 至于二阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，有 $A^*=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$，其记忆口诀为**"主对角线(元素)对调，副对角线(元素)变号"**，计算非常简单.

(3) 求可逆变换的逆变换：

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，对于从变量 x_1，…，x_n 到变量 y_1，…，y_n 的线性变换 $Y=AX$，如果 A 可逆，只要求得方阵 A 的逆矩阵 A^{-1}，就可求得逆变换：$X=A^{-1}Y$.