

21

高等学校信息工程类“十三五”规划教材

电磁场与电磁波基础

张瑜 李雪萍 付喆 编著

DIANCICHANGYUDIAN
CIBOJICHU



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

高等学校电子信息类“十三五”规划教材

电磁场与电磁波基础

张瑜 李雪萍 付喆 编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书主要以麦克斯韦方程组为核心,介绍宏观电磁场与电磁波的基本概念、基本原理、基本分析计算方法,电磁场和电磁波与物质的相互作用以及电磁波的传播规律等内容。

全书分为基础知识、电磁场理论以及电磁波的传播、传输与辐射三篇进行阐述。在基础知识篇中,介绍了学习电磁场与电磁波课程必备的数学知识,如矢量运算、常用正交坐标系、矢量分析、场论基础等。在电磁场理论篇中,根据学生学习的思维习惯,采用由典型到一般的叙述方式。首先分别介绍静电场、恒定电场、静磁场的基本特性和分析方法,总结出静态场中麦克斯韦方程组及其边界条件;然后介绍静态场的典型计算方法;最后介绍时变电磁场的基本特性和分析方法,总结出适应于静态和时变情况下的一般麦克斯韦方程组和波动方程。在电磁波的传播、传输与辐射篇中,分别介绍了电磁波在无界空间和有界空间中的传播特性、规律和产生的相关效应,最后简要介绍了电磁波辐射特性和规律(属于天线技术领域)。其中电磁波在有界空间中的传输特性和电磁辐射特性可为电子信息类专业学生进一步学习后续课程奠定基础。

本书可作为高等学校电子信息工程、通信工程、电子科学与技术、光电子科学与工程等本科电子信息类专业的教材,也可供通信技术、雷达技术、微波技术、天线技术、射频技术、电波传播、电磁兼容等领域的科研工程人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波基础/张瑜,李雪萍,付喆编著. —西安:西安电子科技大学出版社,2016.4
高等学校信息工程类“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5606-4015-0

I. ①电… II. ①张… ②李… ③付… III. ①电磁场—高等学校—教材 ②电磁波—高等学校—教材 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 061767 号

策划编辑 马乐惠
责任编辑 雷鸿俊
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071
网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfb001@163.com
经 销 新华书店
印刷单位 陕西大江印务有限责任公司
版 次 2016年4月第1版 2016年4月第1次印刷
开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 21
字 数 499千字
印 数 3000册
定 价 39.00元

ISBN 978-7-5606-4015-0/O

XDUP 4307001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

当今世界中的电子信息系统,无论是通信、雷达、广播、电视,还是导航、遥控遥测等,都是通过电磁波传递信息来进行工作的。以宏观电磁理论为基础,以电磁信息的传输和转换为核心的电磁场与电磁波工程技术在其中发挥了重要作用。

我们知道,高等院校电子信息类专业中的专业基础课主要分为两大类。一类是与电磁场和电磁波有关的课程,如电磁学、电磁场与电磁波、微波技术、天线、电波传播、光纤传输等;另一类是与电路有关的课程,如电路分析、模拟电子技术、数字电子技术等。从理论上讲,一切电磁波(包括光波)在宏观媒质中都服从麦克斯韦方程组。但是这两类课程中具体采用的分析方法是不同的,主要依据工作频率与系统的电尺寸相比拟程度来进行选择。当研究系统的电磁波的波长与系统实际电尺寸相当时,一般采用场的方法进行研究,简称场方法。它是麦克斯韦方程组为基础,结合实际问题的边界条件和初始条件,求解空间各点的电磁场量的变化规律,逐点研究某一系统中的电磁过程。当研究系统的电磁波的波长远大于系统实际电尺寸时,一般采用电路的方法进行研究,简称电路方法。它是引入电压、电流等概念和电阻、电感、电容等参数,利用等效电路来研究某个系统的电磁过程,引入的电阻、电感、电容等参数实际上是由媒质的电磁参数(电导率 σ 、介电常数 ϵ 和磁导率 μ)确定的。

作为高等院校电子信息类本科专业重要基础必修课程之一的“电磁场与电磁波基础”属于场类课程,它以麦克斯韦方程组为核心,描述了宏观电磁场与电磁波的基本概念、基本原理、基本分析方法和电磁波的传播规律等。它除了与雷达技术、通信技术、电磁兼容、射频电路等技术领域有密切的关系外,还具有独特的学科意义和广泛的应用背景。与大学物理中的电磁学相比,“电磁学”的重点是电磁场的积分形式,关注电磁场的整体性质,而“电磁场与电磁波”的重点在微分形式,更加关注电磁场的局部性质。当然,为了电磁理论的完整性,它也同样讨论了电磁场的积分形式和整体性质。

相比于高等院校电子信息类本科专业学生的其它课程来讲,“电磁场与电磁波基础”课程中的概念抽象、数学推导和计算公式繁杂,是一门相对较为难学的课程。为了使能够对该课程感兴趣,并能够深入理解和掌握好电磁场与电磁波的有关基础知识,本书在编写过程中,尽量采用浅显的语言进行阐述,对有关知识点尽量做到深入浅出,并注重电磁场理论中的实际问题、物理模型、数学描述三者之间的关系。另外,学生感到本课程难学的另一原因是看不见的场与波,如果只靠想象可能对学生来讲不直观,因此,本书尽量增加有关电磁场与电磁波的图形,体现场与波的直观性,便于理解。

全书分为三篇,共11章。第一篇基础知识共有两章,它是学习电磁场与电磁波必备的数学基础。第1章为矢量分析,主要介绍了矢量运算、常用正交坐标系及矢量分析。第2章为场论基础,主要介绍了哈密顿和拉普拉斯两个常用算子、标量场的方向导数与梯度、矢量场的通量与散度、矢量场的环量与旋度,以及几个非常重要的常用定理和各种场的分类。第二篇电磁场理论共有5章,主要阐述了静态场和时变场的有关知识。第3章为静电

场及其特性，主要介绍了库仑定律、电场强度、电位、电容、静电能量、静电力，以及真空和电介质中的静电场方程及其边界条件。第4章为恒定电场及其特性，主要介绍了电流连续性方程、导电媒质中的欧姆定律和焦耳定律，以及恒定电场方程及其边界条件。第5章为静磁场及其特性，主要介绍了安培定律、磁感应强度、矢量磁位与标量磁位、电感、静电能量、静磁力，以及真空和磁介质中的静磁场方程及其边界条件。第6章为静态场的计算，主要介绍了几种理想情形下静态场的计算方法，如镜像法、分离变量法和有限差分法。第7章为时变电磁场及其特性，首先介绍了法拉第电磁感应定律、位移电流、麦克斯韦方程组、时变电磁场的边界条件以及场量与位函数的波动方程、时变电磁场的能量与能流，然后介绍了常用的时谐电磁场条件下的麦克斯韦方程、波动方程、位函数以及平均能量密度与平均能流密度。第三篇电磁波的传播、传输与辐射共有4章，主要阐述了电磁波在无界、有界空间中的传播和传输的特性、规律，以及电磁波的辐射特性和规律。第8章为均匀平面波在无界媒质中传播，主要介绍了均匀平面电磁波在理想介质和导电媒质中的传播特性以及电磁波与媒质相互作用产生的各种效应。第9章为电磁波的反射与折射，主要介绍了平面电磁波在两层媒质分界面上垂直入射和斜入射情况下的反射与折射特性及规律，同时也简要介绍了平面电磁波在多层媒质分界面的垂直入射的电磁场量关系。第10章为导行电磁波与传输，它属于微波技术课程中的部分主要内容，是为后续的微波技术课程奠定基础，简要介绍了双导体传输线、同轴线系统及其传输特性，矩形和圆柱形规则金属波导系统及其传输特性。第11章为电磁辐射与天线，它属于天线技术课程中的部分主要内容，是为后续的天线技术课程奠定基础，简要介绍了电偶极子与磁偶极子的辐射、天线的基本参数、典型的线天线和面天线的电磁辐射。

本书由张瑜、李雪萍和付喆共同编写，其中张瑜编写了第1、2、3、5、7、8、9章，李雪萍编写了第6、11章，付喆编写了第4、10章。本书融入了作者多年来从事电磁场与电磁波及其应用的研究和工程实践，以及数年讲授该门课程的经验。同时也借鉴了国内外较新、较重要的参考文献的内容。主要的参考文献列于书后，在此向原作者表示深深的谢意。

在本书的编写过程中得到了河南师范大学各级领导的关怀和支持，河南师范大学的王旭教授、魏山城教授、牛有田教授，新乡学院的郭涛教授，中国电子科技集团公司第二十二研究所的郝文辉研究员等对本书提出了许多宝贵的意见和建议。西安电子科技大学出版社的马乐惠、雷鸿俊等编辑对本书内容及其它方面提出了宝贵建议，王富亮、李志超、唐哲、吴月月等同学帮助对本书图表进行了细致的绘制，在此一并向他们表示诚挚的感谢，同时对西安电子科技大学出版社的大力支持表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在一些不足之处，敬请广大读者批评指正。

编者

2016年1月

目 录

第一篇 基础知识

第 1 章 矢量分析	2	2.1 标量场与矢量场	21
1.1 标量与矢量	2	2.1.1 标量场与等值面	21
1.1.1 标量	2	2.1.2 矢量场与矢量线	22
1.1.2 矢量	2	2.2 哈密顿算子与拉普拉斯算子	23
1.2 矢量代数	3	2.2.1 哈密顿算子	23
1.2.1 矢量的加法	3	2.2.2 拉普拉斯算子	24
1.2.2 矢量的减法	4	2.3 标量场的方向导数与梯度	24
1.2.3 矢量的数乘	4	2.3.1 方向导数	25
1.2.4 矢量的点积	5	2.3.2 梯度	26
1.2.5 矢量的叉积	5	2.4 矢量场的通量与散度	29
1.2.6 矢量的组合运算	6	2.4.1 矢量场的通量	29
1.3 常用正交坐标系	7	2.4.2 矢量场的散度	31
1.3.1 直角坐标系	7	2.4.3 散度定理	33
1.3.2 圆柱坐标系	11	2.5 矢量场的环量与旋度	35
1.3.3 球坐标系	13	2.5.1 矢量场的环量	35
1.3.4 各坐标系间的转换	17	2.5.2 矢量场的旋度	36
1.4 矢量分析	18	2.5.3 斯托克斯定理	39
1.4.1 标量函数与矢量函数	18	2.6 若干常用定理与场的分类	43
1.4.2 矢端曲线	18	2.6.1 格林定理	44
1.4.3 矢量函数的导数与微分	19	2.6.2 唯一性定理	44
1.4.4 矢量函数的积分	19	2.6.3 亥姆霍兹定理	45
习题	20	2.6.4 场的分类	46
第 2 章 场论基础	21	习题	47

第二篇 电磁场理论

第 3 章 静电场及其特性	50	3.3.3 真空中的静电场方程	58
3.1 电荷与电荷密度	50	3.4 电介质中的静电场方程	60
3.1.1 电荷与电荷守恒定律	50	3.4.1 电介质的极化	60
3.1.2 电荷密度	50	3.4.2 极化强度与极化电荷密度	61
3.2 库仑定律与电场强度	52	3.4.3 电位移矢量与电介质中的高斯定理	63
3.2.1 库仑定律	52	63
3.2.2 电场强度	53	3.4.4 电介质分类与本构关系	64
3.3 真空中的静电场方程	55	3.4.5 电介质的静电场方程	65
3.3.1 静电场的散度与高斯定理	55	3.5 电位与电位差	67
3.3.2 静电场的旋度与环路定理	57	3.5.1 电位	67

3.5.2	电位差	68	5.1.2	磁感应强度	99
3.5.3	静电场的电位方程	69	5.1.3	洛伦兹力	100
3.6	静电场的边界条件	70	5.2	真空中的静磁场方程	101
3.6.1	电位移矢量的法向边界条件	70	5.2.1	静磁场的散度与磁通连续性原理	102
3.6.2	电场强度的切向边界条件	71	5.2.2	静磁场的旋度与安培环路定理	103
3.6.3	电场矢量线在分界面上的折射	72	5.2.3	真空中的静磁场方程	104
3.6.4	电位在分界面上的边界条件	73	5.3	磁介质中的静磁场方程	106
3.7	导体系统的电容	75	5.3.1	介质的磁化	106
3.7.1	电容与电容器	75	5.3.2	磁化强度与磁化电流	107
3.7.2	多导体间的部分电容	76	5.3.3	磁场强度与磁介质中的安培环路定理	108
3.8	静电场的能量与力	78	5.3.4	磁介质的本构关系	109
3.8.1	静电场的能量	78	5.3.5	介质中的静磁场方程	111
3.7.2	静电场的力	81	5.4	矢量磁位与标量磁位	113
习题		83	5.4.1	矢量磁位	113
第4章	恒定电场及其特性	85	5.4.2	标量磁位	114
4.1	电流与电流密度	85	5.4.3	磁矢位与磁标位的拉普拉斯方程和泊松方程	114
4.1.1	电流	85	5.5	静磁场的边界条件	116
4.1.2	电流密度	85	5.5.1	磁感应强度的法向边界条件	116
4.2	导电媒质中的欧姆定律和焦耳定律	87	5.5.2	磁场强度的切向边界条件	117
4.2.1	欧姆定律	87	5.5.3	磁力线在分界面上的折射	118
4.2.2	焦耳定律	88	5.5.4	磁矢位和磁标位在分界面上的边界条件	119
4.3	恒定电场方程	88	5.6	电感	120
4.3.1	电流连续性方程	88	5.6.1	自感	120
4.3.2	恒定电场的散度	89	5.6.2	互感	120
4.3.3	恒定电场的旋度	89	5.7	静磁场的能量与力	123
4.3.4	恒定电场的电位	90	5.7.1	静磁场的能量	123
4.3.5	导电媒质中的恒定电场方程	90	5.7.2	静磁场的力	126
4.4	恒定电场的边界条件	91	习题		128
4.4.1	电流密度与电场的边界条件	91	第6章	静态场的计算	130
4.4.2	电力线在分界面上的折射	92	6.1	静态场的边值与唯一性定理	130
4.4.3	导电媒质分界面上的电荷面密度	93	6.1.1	边值问题	130
4.4.4	电位在分界面上的边界条件	93	6.1.2	边值问题类型	131
4.5	恒定电场与静电场的比拟	93	6.1.3	唯一性定理	131
4.6	电导与接地电阻	94	6.2	镜像法	132
4.6.1	电导	94	6.2.1	镜像法的基本思想	133
4.6.2	接地电阻	95	6.2.2	导体平面镜像法	133
习题		97	6.2.3	导体球面镜像法	138
第5章	静磁场及其特性	98			
5.1	安培定律与磁感应强度	98			
5.1.1	安培定律	98			

6.2.4 导体圆柱面镜像法	142	7.4 时变电磁场的边界条件	179
6.2.5 介质平面镜像法	146	7.4.1 时变电磁场的法向边界条件	179
6.3 分离变量法	149	7.4.2 时变电磁场的切向边界条件	180
6.3.1 直角坐标系中的分离变量法	149	7.4.3 典型情况下的边界条件	181
6.3.2 圆柱坐标系中的分离变量法	154	7.5 场量与位函数的波动方程	182
6.3.3 球坐标系中的分离变量法	157	7.5.1 场量波动方程	183
6.4 有限差分法	160	7.5.2 位函数波动方程	184
6.4.1 有限差分方程	161	7.6 时变电磁场的能量与能流	188
6.4.2 有限差分方程求解方法	162	7.6.1 坡印廷定理	189
习题	167	7.6.2 坡印廷矢量	190
第7章 时变电磁场及其特性	168	7.7 时谐电磁场	193
7.1 法拉第电磁感应定律	168	7.7.1 时谐电磁场的复数形式	193
7.2 位移电流	172	7.7.2 复数形式的麦克斯韦方程	194
7.3 麦克斯韦方程组与辅助方程	174	7.7.3 复介电常数与复磁导率	196
7.3.1 麦克斯韦方程组的积分形式	175	7.7.4 时谐电磁场的波动方程	197
7.3.2 麦克斯韦方程组的微分形式	175	7.7.5 时谐电磁场的位函数	198
7.3.3 麦克斯韦方程组的辅助方程—— 本构关系	177	7.7.6 时谐电磁场的平均能量密度与 平均能流密度矢量	199
7.3.4 洛伦兹力	178	习题	202
7.3.5 麦克斯韦方程组的讨论	178		

第三篇 电磁波的传播、传输与辐射

第8章 均匀平面波在无界媒质中传播	206	习题	228
8.1 均匀平面电磁波	206	第9章 电磁波的反射与折射	230
8.2 理想介质中的均匀平面波传播	207	9.1 平面电磁波在媒质界面上的反射和折射	230
8.2.1 理想介质中的均匀平面波	207	9.1.1 平面波的电场与磁场	230
8.2.2 理想介质中均匀平面波的 传播特性	209	9.1.2 平面电磁波的反射和折射	231
8.2.3 理想介质中沿任意方向的 均匀平面波	212	9.2 平面电磁波对媒质分界面的垂直入射	232
8.3 导电媒质中的均匀平面波传播	215	9.2.1 对导电媒质分界面的垂直入射	233
8.3.1 导电媒质中的均匀平面波	215	9.2.2 理想导体分界面的垂直入射	235
8.3.2 导电媒质中的均匀平面波的 传播特性	216	9.2.3 理想介质分界面的垂直入射	237
8.3.3 弱导电媒质中的均匀平面波	217	9.3 平面电磁波对多层媒质分界面的垂直入射	242
8.3.4 强导电媒质中的均匀平面波	218	9.3.1 多层媒质面上的电磁场量关系	243
8.3.5 趋肤深度和表面电阻	219	9.3.2 多层媒质的应用	246
8.4 电磁波的特性	221	9.4 平面波对理想介质平面的斜入射	248
8.4.1 电磁波的极化	222	9.4.1 反射定律和折射定律	249
8.4.2 电磁波的色散	225	9.4.2 菲涅尔公式	250
8.4.3 相速与群速	225	9.4.3 全反射与全透射	254

9.5 平面波对理想导体平面的斜入射	259	10.4.2 圆柱形波导的传输特性	292
9.5.1 垂直极化波对理想导体平面的斜入射	259	习题	294
9.5.2 平行极化波对理想导体平面的斜入射	261	第 11 章 电磁辐射与天线	296
9.6 平面波对导电媒质平面的斜入射	263	11.1 电偶极子与磁偶极子的辐射	296
习题	265	11.1.1 电偶极子的辐射	296
第 10 章 导行电磁波与传输	267	11.1.2 磁偶极子的辐射	300
10.1 导行电磁波	267	11.2 天线的基本参数	303
10.1.1 导波系统中的场方程	268	11.2.1 天线的方向性函数和方向性系数	303
10.1.2 TEM 波、TE 波及 TM 波	270	效率与增益	306
10.1.3 TE 波及 TM 波在波导中的传输特性	272	11.2.2 天线的极化	307
10.2 双导体传输线系统及其传输特性	272	11.2.3 有效长度	308
10.2.1 传输线方程	273	11.2.4 输入阻抗	308
10.2.2 均匀传输线方程的解	275	11.2.5 频带宽度	309
10.2.3 传输线特性参数和状态参量	277	11.3 线天线	309
10.2.4 同轴线及其特性	283	11.3.1 对称振子天线	309
10.3 矩形规则金属波导系统及其传输特性	285	11.3.2 阵列天线	312
10.3.1 矩形波导中的场分布	286	11.4 面天线	313
10.3.2 矩形波导中的电磁波传输特性	288	11.4.1 惠更斯元的辐射	313
10.4 圆柱形规则金属波导系统及其特性	290	11.4.2 平面口径面的辐射	315
10.4.1 圆柱形波导中的场分布	290	11.4.3 抛物面天线	316
		11.4.4 卡塞格伦天线	318
		习题	321
		附录 A 常用矢量运算	323
		附录 B 常用物理常数	326
		参考文献	327

第一篇 基础知识

第 1 章 矢量分析

在电磁场与电磁波理论中描述电场和磁场及其相互关系时,一般采用矢量及其运算,一是它可为复杂的电磁现象提供紧凑的数学描述,二是便于人们的直观想象和运算变换。因此在学习电磁场与电磁波理论时,首先必须学好矢量概念和矢量运算等矢量分析方法。矢量分析是研究电磁场在空间中的分布和变化规律的基本数学工具之一。矢量分析中有一些新的符号和规则,因此需要特别关注并学好它,以便为电磁场与电磁波基础知识的学习奠定基础。另外,矢量可用坐标系下的分量进行表示,因此也应掌握矢量在不同坐标系下的表示方法。尽管矢量在不同的坐标系下表达式不同,但是它们都表示同一个矢量,因此也应掌握各坐标系之间的相互转换关系。

1.1 标量与矢量

在电磁场与电磁波理论中遇到的绝大多数参量,都可以很容易地用标量或矢量进行表示或描述。

1.1.1 标量

一个只用大小就能够完整描述的物理量称为标量。在数学上,任一代数量都是标量。在物理学中,任一代数量一旦被赋予物理单位,则称其为具有物理意义的标量,即物理量,如质量 m 、时间 t 、温度 T 、能量 W 、电荷 Q 、电压 u 、长度 L 、面积 S 等都是标量。若一个物理量与坐标系的选择无关,则称该物理量为绝对标量。

1.1.2 矢量

一个必须用大小和方向一起来描述的量称为矢量(或称为向量)。一旦某一矢量被赋予物理单位,则称该矢量为具有物理意义的物理矢量(或物理向量),如力 F 、速度 v 、电场 E 、加速度 a 等都是物理矢量。因此,每个矢量都具有大小和方向两个特征。

在几何上,一个矢量 A 可用一条有方向的线段 OP 来表示,其中 O 表示线段的起点, P 表示线段的终点, A 表示从 O 点指向 P 点的矢量,如图 1.1-1 所示。线段 OP 的长度表示矢量 A 的模 A , 即 $A = |A|$, 它是一个标量。

如果一个矢量的模 A 为 1, 则称该矢量为单位矢量, 用 e_A 表示。它表示与 A 同方向、模为 1 的一个矢量。显然,

$$e_A = \frac{A}{A} \quad (1.1-1)$$

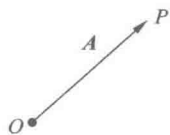


图 1.1-1 矢量的几何表示

在代数上, 矢量 \mathbf{A} 可表示为 $\mathbf{A} = e_A A$, 则矢量的方向为单位矢量 e_A 的方向, 该矢量的模 A 为

$$A = \frac{\mathbf{A}}{e_A} = |\mathbf{A}| \quad (1.1-2)$$

如果一个矢量的大小和方向均不变, 则称该矢量为常矢量。但要注意, 一个单位矢量尽管其模为常数 1, 但其方向是会变化的, 因此单位矢量不一定是常矢量。只有单位矢量的方向不变时它才是常矢量。

如果一个矢量的大小等于 0, 则称该矢量为零矢量, 简称为空矢或零矢。零矢量是唯一不能用箭头表示的矢量。

如果两个矢量同时满足方向相同和模的大小相等这两个条件, 则称这两个矢量相等。

1.2 矢量代数

在日常生活中, 我们遇到最多的数字计算大都是标量之间的加、减、乘、除运算, 这对于绝大多数人来讲是很简单的。在计算时, 只要把具有相同单位的标量的大小进行加、减、乘、除就完成了。但是, 对于矢量的加、减、乘、除运算就没有那么简单了。因为矢量运算不仅要考虑大小, 而且也要考虑方向。由于矢量的除法目前还没有明确的物理定义, 因此这里略去, 有兴趣的读者可参阅有关的书籍。

1.2.1 矢量的加法

若两个矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 相加, 则其和是另一个矢量 \mathbf{C} , 即 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ 。两矢量的求和方法同物理学中的两个力的合成或两个速度的合成相类似, 在几何上主要有平行四边形法和三角形法两种计算方法。用平行四边形法求矢量和是以 O 为这两矢量相同的起点, 以这两矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 为邻边作平行四边形, 平行四边形的对角线 OC 对应的矢量 \mathbf{C} 即为两矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的矢量和, 如图 1.2-1 所示。用三角形法求矢量和是以第一个矢量 \mathbf{A} 的终点作为第二个矢量 \mathbf{B} 的始点, 这样用直线连接矢量 \mathbf{A} 的始点与第二个矢量 \mathbf{B} 的终点, 形成的矢量即为两矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的矢量和, 如图 1.2-2 所示。

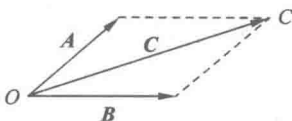


图 1.2-1 两矢量相加的平行四边形法

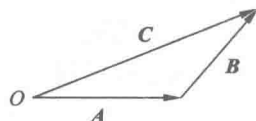


图 1.2-2 两矢量相加的三角形法

从前面的讨论中可以看出, 两矢量相加与各个矢量的先后次序无关, 因此矢量相加服从加法的交换律, 即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1.2-1)$$

如果三个矢量相加, 可以证明矢量相加也服从加法的结合律, 即

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (1.2-2)$$

从表面上看, 矢量求和的平行四边形法和三角形法是完全等价的。但三角形法的最大优点在于它可以推广到 n 个矢量求和的多边形法, 即当 n 个矢量首尾相接时, 总的矢

量和是连接第一个矢量的起点到最后一个矢量的终点的直线所形成的矢量,如图 1.2-3 所示。

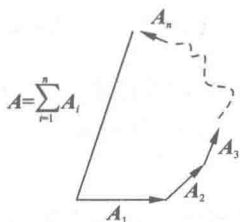


图 1.2-3 n 个矢量求和的多边形法

在数学形式上, n 个矢量 $A_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 的矢量和 A 为

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \quad (1.2-3)$$

1.2.2 矢量的减法

两个矢量的减法同矢量的加法完全类似,可以用平行四边形法和三角形法进行计算。两个矢量减法的平行四边形法是以 O 为两个矢量相同的起点,以这两矢量 A 、 B 为邻边作平行四边形,平行四边形的另一对角线 AB 对应的矢量 D 即为两矢量 A 、 B 的差,如图 1.2-4 所示。两个矢量减法的三角形法是以 O 为两个矢量相同的起点,第一个矢量 A 的终点与第二个矢量 B 的终点的连线形成的矢量即为两矢量 A 、 B 的差,如图 1.2-5 所示。

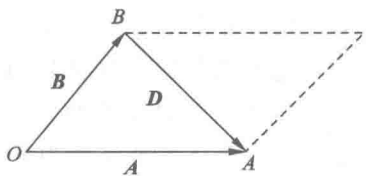


图 1.2-4 两矢量相减的平行四边形法

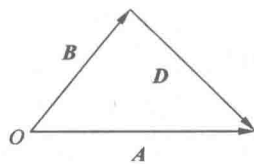


图 1.2-5 两矢量相减的三角形法

事实上,负矢量 $-B$ 是一个与矢量 B 大小相等、方向相反的矢量,称为矢量 B 的逆矢量。因此矢量的减法也可以用负矢量的加法来计算,即

$$D = A - B = A + (-B) \quad (1.2-4)$$

利用负矢量,可以将两矢量的减法运算变成两矢量的加法进行运算。

1.2.3 矢量的数乘

标量 k 与矢量 A 的乘积定义为标量与矢量的数乘,其结果也是一个矢量 B ,即

$$B = kA \quad (1.2-5)$$

矢量 B 的模等于矢量 A 的模的 k 倍。若 $k > 0$,则矢量 B 与矢量 A 同方向;若 $k < 0$,则矢量 B 与矢量 A 反方向;特殊地,若 $k = 0$,则矢量 $B = 0$ 。但是无论标量 k 如何变化,矢量 B 都平行于矢量 A ,只是在方向上相同或相反而已。

1.2.4 矢量的点积

两种矢量相乘的乘积有两种,一种称为点积,记为 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$;另一种称为叉积,记为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 。

点积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 表示两矢量间的一种数量(或标量)相互作用,定义为两矢量模的大小与它们之间较小夹角 $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$ 的余弦之积,如图 1.2-6 所示,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (1.2-6)$$

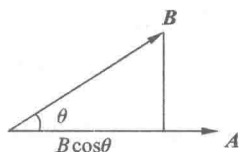


图 1.2-6 点积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 示意图

两矢量的点积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 是一个标量,因此也称为标量积、数量积或内积。根据矢量点积的定义,两矢量的点积也可以写为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A(B \cos \theta) = B(A \cos \theta) \quad (1.2-7)$$

可见,两矢量的点积实际上是一个矢量的模在另一个矢量上的投影与另一个矢量的模这两个标量的乘积。

当两非零矢量平行时,由于其夹角 $\theta=0$,则两矢量的点积取得最大值;当两矢量垂直(或正交)时,由于其夹角 $\theta=\pi/2$,则两矢量的点积为零。根据两矢量点积为零这一特性,可以确定两非零矢量是否处于正交的状态,即如果两非零矢量的点积为 0,则这两个矢量必定正交。

利用两矢量的模和它们的点积可以得到这两个矢量之间较小的夹角 $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$,即

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right) \quad (1.2-8)$$

由式(1.2-7)可见, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A(B \cos \theta) = B(A \cos \theta) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$,因此,矢量的点积性质服从交换律,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{交换律}) \quad (1.2-9)$$

由于两矢量的点积是一个矢量与另一个矢量在第一个矢量上投影的标量乘积,对于矢量 \mathbf{A} 与两矢量 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 之和的点积 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$,实际上就是 $(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ 在矢量 \mathbf{A} 上的投影与矢量 \mathbf{A} 的标量乘积。又因为 $(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ 在矢量 \mathbf{A} 上的投影标量等于矢量 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 分别在矢量 \mathbf{A} 上的投影标量之和,因此矢量的点积性质也服从分配律,即

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{分配律}) \quad (1.2-10)$$

在电磁场与电磁波理论中,矢量点积最重要的应用之一是寻找给定方向上的分量。如矢量 \mathbf{A} 在单位矢量 \mathbf{e}_n 上的分量(标量)为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n = |\mathbf{A}| \cos \theta = A \cos \theta \quad (1.2-11)$$

当 $0 < \theta < \pi/2$ 时,分量的符号为正;当 $\pi/2 < \theta \leq \pi$ 时,分量的符号为负。

1.2.5 矢量的叉积

叉积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 表示两矢量间的一种矢量相互作用。定义两矢量的叉积是一个矢量,其模

的大小等于矢量 A 和 B 的模与 A 、 B 间较小夹角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 的正弦之积, 其方向与 A 、 B 所在平面相垂直, 且满足右手螺旋法则(右手四指从 A 转向 B 时大拇指所指示的方向), 如图 1.2-7 所示。

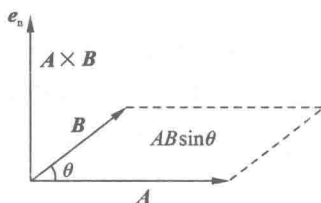


图 1.2-7 叉积 $A \times B$ 图示

两矢量叉积 $A \times B$ 为

$$A \times B = e_n AB \sin \theta \quad (1.2-12)$$

式中, e_n 为矢量 A 、 B 组成平面的法线方向的单位矢量。

可见, 两矢量的叉积 $A \times B$ 是一个矢量, 因此也称为矢积、矢量积或外积。

当两非零矢量平行时, 由于其夹角 $\theta = 0$, 则两矢量的叉积为零; 当两矢量垂直(或正交)时, 由于其夹角 $\theta = \pi/2$, 则两矢量的叉积取得最大值。根据两矢量叉积为零这一特性, 可以确定两非零矢量是否处于平行的状态, 即如果两非零矢量的叉积为 0, 则这两个矢量必定平行。

利用两矢量的模和它们的叉积可以得到这两个矢量之间较小的夹角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 即

$$\theta = \arcsin\left(\frac{A \times B}{AB}\right) \quad (1.2-13)$$

根据叉积的定义有

$$B \times A = (-e_n)BA \sin \theta = -e_n AB \sin \theta = -A \times B \quad (1.2-14)$$

这说明两矢量的叉积不满足交换律。同理, 根据叉积定义可以证明矢量的叉积满足分配率, 即

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (1.2-15)$$

1.2.6 矢量的组合运算

前面讨论的是两个矢量的点积和叉积。如果有三个矢量进行点积和叉积的组合运算, 将更为复杂一些。常见的矢量组合运算主要有标量三重积和矢量三重积两种。

1) 标量三重积

矢量 A 与矢量 $B \times C$ 的点积 $A \cdot (B \times C)$ 称为标量三重积。因为 $B \times C$ 是一个矢量, 故矢量 A 与 $B \times C$ 的点积必定是一个标量。

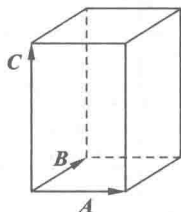
标量三重积最重要的性质是旋转法则, 即

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (1.2-16)$$

标量三重积的几何意义表示由三个矢量 A 、 B 、 C 为邻边的平行六面体的体积, 如图 1.2-8 所示, 即

$$V = A \cdot (B \times C) \quad (1.2-17)$$

因此可以推论, 三个非零矢量的标量三重积为 0 的充要条件是: 三个矢量 A 、 B 、 C 共面, 此时对应地向六面体的体积为零。

图 1.2-8 平行六面体的有向体积 $V = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

2) 矢量三重积

矢量 \mathbf{A} 与矢量 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 的叉积 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 称为矢量三重积。因为 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 是一个矢量，矢量 \mathbf{A} 与它的叉积必定也是一个矢量。

可以证明矢量三重积有如下运算性质：

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.2-18)$$

应注意，矢量三重积不满足结合律，即

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \quad (1.2-19)$$

1.3 常用正交坐标系

一个物理量在空间中的位置可通过三条相互正交曲线的交点来确定。三条相互正交曲线组成的体系称为正交曲线坐标系，其中，三条正交曲线称为坐标轴，它描述的参量称为坐标变量。在电磁场与电磁波理论中涉及的大多数参量，一般都可采用不同的坐标系来描述。常用的坐标系一般有三种，即直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。在实际应用中可根据物理量所处的条件，以便于简便描述的原则选择对应的坐标系。当然，相同的物理量可由不同的坐标系来描述，得到的结果只是在表征形式上的不同，其实质上是相同的，因此，各坐标系之间可以转换。

1.3.1 直角坐标系

直角坐标系由三条相互正交的直线组成，这三条直线分别称为 x 、 y 、 z 坐标轴，三条直线的交点称为坐标原点。在各个坐标轴上的物理量分别称为 x 、 y 、 z 分量，一般用单位矢量 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z 表示对应三个轴的方向。由于直角坐标系中三个轴的方向相互正交，因此这三个轴的方向符合右手螺旋法则。

x 、 y 、 z 三个分量的变化范围分别为

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty$$

空间中任意一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是三个平面 $x=x_0$ 、 $y=y_0$ 、 $z=z_0$ 的交点，从原点开始指向并到达 P 点的矢量称为位置矢量 \mathbf{r} (或简称为位矢或矢径)。因此，空间中任意一点可以由它的矢径在三个轴向上的投影来唯一确定，如图 1.3-1 所示。

如果假设空间任意一矢量 \mathbf{A} 的模在直角坐标系中三个坐标轴上的投影分量分别为 A_x 、 A_y 、 A_z ，则矢量 \mathbf{A} 可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z \quad (1.3-1)$$

类似地，矢量 \mathbf{B} 可表示为

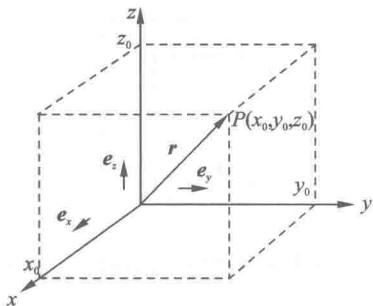


图 1.3-1 直角坐标系中空间点的投影

$$\mathbf{B} = e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z \quad (1.3-2)$$

则两矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的和、差为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \pm (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ &= e_x (A_x \pm B_x) + e_y (A_y \pm B_y) + e_z (A_z \pm B_z) \end{aligned} \quad (1.3-3)$$

由于直角坐标系中的三个单位矢量 e_x 、 e_y 、 e_z 相互正交, 根据两矢量相乘时的点积和叉积特性则有

$$\begin{aligned} e_x \cdot e_x &= 1, e_y \cdot e_y = 1, e_z \cdot e_z = 1 \\ e_x \cdot e_y &= 0, e_y \cdot e_z = 0, e_z \cdot e_x = 0 \\ e_x \times e_x &= 0, e_y \times e_y = 0, e_z \times e_z = 0 \\ e_x \times e_y &= e_z, e_y \times e_z = e_x, e_z \times e_x = e_y \end{aligned}$$

这样, 两矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的点积为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \cdot (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.3-4)$$

两矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的叉积为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \times (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ &= e_x (A_y B_z - A_z B_y) + e_y (A_z B_x - A_x B_z) + e_z (A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.3-5)$$

【例题 1-1】 假设在直角坐标系下, 已知四个矢量分别为 $\mathbf{r}_1 = 2e_x - e_y + e_z$, $\mathbf{r}_2 = e_x + 3e_y - 2e_z$, $\mathbf{r}_3 = -2e_x + e_y - 3e_z$, $\mathbf{r}_4 = 3e_x + 2e_y + 5e_z$, 试求 $\mathbf{r}_4 = a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3$ 中的三个常数 a 、 b 、 c 。

解 将已知的矢量 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 、 \mathbf{r}_3 、 \mathbf{r}_4 分别代入到 $\mathbf{r}_4 = a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3$ 中可得

$$\begin{aligned} 3e_x + 2e_y + 5e_z &= a(2e_x - e_y + e) + b(e_x + 3e_y - 2e_z) + c(-2e_x + e_y - 3e_z) \\ &= (2a + b - 2c)e_x + (-a + 3b + c)e_y + (a - 2b - 3c)e_z \end{aligned}$$

要使上式成立, 等号两边各分量必须相等, 这样就可建立由三个方程组成的标量方程组, 即

$$\begin{cases} 2a + b - 2c = 3 \\ -a + 3b + c = 2 \\ a - 2b - 3c = 5 \end{cases}$$