21世纪普通高等教育规划教材
21 SHI JI PU TONG GAO DENG JIAO YU GUI HUA JIAO CAI

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

线性代数

刘丁酉 主编

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

21世纪普通高等教育规划教材
21 SHI JI PU TONG GAO DENG JIAO YU GUI HUA JIAO CAI

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

线性代数

刘丁酉 主编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书根据全国工科数学课程指导委员会制定的《线性代数》课程基本要求编写. 本书的主要内容包括行列式、矩阵、向量组与线性方程组、矩阵的相似、二次型、线性空间与线性变换,并为不同教学要求的学校和专业的学生提供了一些式难式易的选择内容(包括知识内容、体系及习题、复习题等).

本书注重内容的循序渐进、层次分明. 文字叙述深入浅出、习题丰富适度. 可作为普通高等院校理工类专业的线性代数教材(适用于36~72课时的教学)或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘丁酉主编. 一上海:上海交通大学出版社,2011

21世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-313-06890-3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. 刘… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第203154号

线性代数

刘丁酉主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路951号 邮政编码200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

武汉武铁印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:787mm×960mm 1/16 印张:16 字数:301千字

2011年1月第1版 2011年1月第1次印刷

印数:1~3030

ISBN 978-7-313-06890-3/O 定价:29.80元

前　言

线性代数是高等理工科院校本科生的一门重要基础课程，该课程对于培养大学生的计算能力和抽象思维能力的必要性已经得到广泛认识，因而绝大多数专业都将线性代数作为必修和必考的内容．另一方面，当代科学技术的迅猛发展，使得理工科院校对该课程提出了更高、更新的要求．需求促进了各种不同版本的《线性代数》的产生．作者在长期的数学教学中经历了数学专业和非数学专业的教学改革和教学实践，使用过多种由不同作者编写的教材(既有大同小异，也有繁简不一)，也曾与其他老师合作撰写过《线性代数》教材．现再次编写，总想表达一些新的体会．

《线性代数》的特点是概念抽象、解题技巧灵活多变，尤其是证明题难以下手．因此，初学者往往对这门课程的学习难以适应．为了帮助初学者克服学习线性代数课程中的困难，提高解题与应试技巧，我们编写了这本《线性代数》教材，也希望能够把知识的传授与解题技巧的表达结合起来．

本书是根据全国工科数学课程指导委员会制定的《线性代数》课程基本要求，参考众多资料和教材，并结合自身的教学体会编写而成的．考虑到目前各高校仍把线性代数课程独立开设，因此本书的编写没有融入空间解析几何的内容．本书的主要内容包括行列式、矩阵、向量组与线性方程组、矩阵的相似、二次型、线性空间与线性变换．并为不同教学要求的学校和专业的学生们提供了一些或难或易的选择内容(包括知识内容、体系及习题难度)．

实践经验告诉我们，《线性代数》教材的全面更新并不容易，但这也不是阻碍我们努力尝试的理由．为此，我们做了以下努力：

(1)注重课程自身的体系和科学性，在基本保持传统教学内容的同时，力求大胆创新．考虑到线性代数的主要内容是解线性方程组，我们在问题的引入方面更加突出了线性方程组的概念引入、模型刻画以及与其他知识的呼应．

(2)注重理论联系实际，加强了概念与理论的背景介绍，特别突出了行列式与矩阵这两个工具的计算能力培养．并增加了实例与习题量，减小了习题难度．

(3)考虑到教科书往往受教学时数的限制，因此讲授时只能介绍基本理论和基本方法，在讲清基本方法的前提下，结合考研试题，适当扩展解题思路，努力使学习者事半功倍，在主课学习和考研复习中双双受益．本书在每一章都增写了典型和扩展例题一节，并在各章后的复习题中选用了大量的考研真题，希望能为学生的课后学习提供帮助．

(4)本书注重内容的循序渐进,低起点,坡度高,并注重基本概念的准确理解和常用方法的熟练掌握,弱化了较难结论的证明,加强了应用能力的培养.

(5)增加了一些特色内容供不同的专业选择.如特殊矩阵、约当标准形、正交矩阵及其性质、欧氏空间等.为便于使用过程中对有关内容进行灵活取舍,带 * 号的内容具有相对的独立性.

(6)文字表述尽量深入浅出,通俗易懂,力争做到"讲起来好讲,学起来好学".

本书包括基本要求和带 * 号的增加内容两部分,大体上适用于现阶段普通高等院校理工类 36~72 学时(即每周 2~4 课时)的学生.具体来说,每周 2 课时(相当于 36 学时)的学生可学完书中不带 * 号的内容;每周 4 课时(相当于 72 学时)的学生可学完本书全部内容;每周 3 课时(相当于 54 学时)的学生可适当舍去 * 号中的一部分带较多理科色彩的内容(如拉普拉斯定理、惯性定理、约当标准形、欧氏空间等);其他类别相应地做一些取舍即可.

本书还编写了与教材配套的《线性代数复习题答案与解析》,为学生复习时提供方便.此外,还为使用本教材的教师提供了与本书配套且可修改的 *PPT* 课件.

参加本书编写的有刘丁西、黄莉、张敏、李智群、冯霞以及编辑梁艳等为本书提供了许多宝贵的意见和建议,在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中的错误和疏漏之处恳请使用者批评指正.

编者

目　　录

C1 Chapter 1 行列式

在线性代数中,行列式主要用于求解线性方程组.进而,作为一个基本的数学工具,它也用于线性代数中矩阵、向量组的线性相关性等方面的讨论.而且在科技领域的许多分支中都有广泛的应用.

本章先介绍二阶、三阶行列式的定义,然后给出 n 阶行列式的定义及其性质,再进一步讨论行列式的计算方法.最后给出用行列式求解方程个数与未知量个数相同的线性方程组的克拉默(Cramer)法则以及齐次线性方程组有非零解的必要条件.

1.1 n 阶行列式的定义

为了容易地递推出 n 阶行列式定义,先从二元一次方程组和三元一次方程组(即线性方程组)的求解过程中归纳出二阶及三阶行列式的定义.

1.1.1 二阶与三阶行列式

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相同的一次方程组时提出来的.在初等数学中,对于一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

我们可以用 a_{22}, $-a_{12}$ 分别乘以式(1.1)中的一、二式,再将得到的两式相加,可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2,$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,得其解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

采取类似的方法,由式(1.1)解得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.3}$$

通常称上述解法为加减消元法.

如果记

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1.4}$$

$$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式(1.2)及式(1.3)可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \tag{1.5}$$

这意味着当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,二元一次方程组(1.1)有唯一解(1.5).

我们把形如式(1.4)中 D 的右端形式称为二阶行列式.

同理,对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.6}$$

我们也可利用加减消元法消去 x_2, x_3,得到同解方程

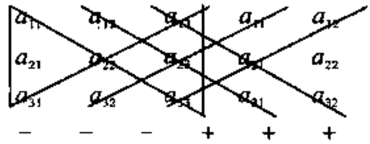
$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &\quad =b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3, \end{aligned}$$

并将 x_1 的系数记为

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

称式(1.7)为三阶行列式(其中横为行,竖为列).

式(1.7)右端项中的6项可以按下面所示的方法(称为沙路法)得到



此时,若三元一次方程组(1.6)的系数行列式 $D\neq 0$,则由消元法可求得这个方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}, \tag{1.8}$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 是用常数项 b_1,b_2,b_3 替换 D 中的第 j 列所得三个三阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

【例 1.1】 解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31, \\ 5x_1+x_2+2x_3=29, \\ 3x_1-x_2+x_3=10. \end{cases}$$

解 因为该三元一次方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-27\neq 0,$$

且

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 29 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-81,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 31 & 4 \\ 5 & 29 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 31 \\ 5 & 1 & 29 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix}=-162,$$

从而由式(1.8)可得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=4,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=6.$$

由上述讨论可知：利用二阶与三阶行列式，可以把二元一次方程组和三元一次方程组的解表示为一种简捷的公式形式. 那么我们自然要考虑的是：n 元一次方程组是否也有这种形式的结果呢？

细心的读者可以从四元一次方程组的消元过程中发现：对于 n 阶行列式($n>3$)，我们不可能如式(1.7)的沙路法那样给出其定义(展开项的项数就不对！). 因此，对一般的 n 阶行列式要用另外的方法来定义. 在代数中，它可以用不同的方法给出.

1.1.2 全排列及其逆序数

观察三阶行列式(1.7)，我们发现它有以下特点：

(1) 三阶行列式由 3! 项的代数和构成.

(2) 三阶行列式的每项都是该行列式中不同行不同列的三个元素的乘积.

(3) 三阶行列式的每项都有确定的符号规律.

为了进一步弄清这些符号的内在规律,我们先给出以下的有关概念.

定义 1.1 我们把自然数 $1,2,\cdots,n$(或 n 个元素) 排成的每一种有确定次序的数组,称为一个全排列,或 n 元排列(简称排列),并记为 $i_1i_2\cdots i_n$. 显然不同的 n 元排列共有 $n!$ 个.

例如,自然数 1,2,3,4 共有 24 个 4 元排列,其中 1234 和 3142 等都是 4 元排列,而 43152 则是一个 5 元排列. 特别,$12\cdots n$ 称为自然排列.

定义 1.2 在一个 n 元排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果元素 $i_s>i_t$,就称元素 i_s 与 i_t 构成一个逆序. 一个 n 元排列中所有逆序的总数称为该排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

根据该定义,我们可以按下述方法来计算排列的逆序数:首先,设在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,比 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$ 大且排在 i_k 后面的元素共有 t_k 个,则该排列中所有逆序的个数(即 t_k 之和) 就是这个排列的逆序数. 于是

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{k=1}^{n}t_k.$$

【例 1.2】 求排列 3712456 及 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

解 (1)$\tau(3712456)=2+5+0+0+0+0=7$;

(2)$\tau[n(n-1)\cdots 21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 1.3 逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

由定义,排列 3712456 是一个奇排列,自然排列 $12\cdots n$ 是一个偶排列.

有了逆序数的概念,我们就可以根据二、三阶行列式的特点,将式(1.4) 和式(1.7) 的定义改写为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2)}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

这里 $\sum\limits_{(j_1j_2)}$,$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 分别为对自然数 1,2 及 1,2,3 的所有排列求和. 有了二、三阶行列式的这种形式定义,就可以推广地给出 n 阶行列式的定义了.

1.1.3 n 阶行列式的定义

定义 1.4 我们把由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，简记为 $D=\det(a_{ij})_{n\times n}$ 或 $|a_{ij}|_{n\times n}$，其中横排称为行，竖排称为列，它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项的符号是：当该项中每一个元素的行标按自然顺序排列后，若对应的列标所成排列是偶排列则取正号，奇排列则取负号. 于是有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.9}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对自然数 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. 这里数 a_{ij} 称为行列式的 (i,j) 元，$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

由定义可以看出：

(1) 与二、三阶行列式类似，n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，且带正号的项数和带负号的项数各占一半，其中展开项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

(2) 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，不要与普通数的绝对值记号混淆了.

【例 1.3】 用行列式定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶的下三角行列式，其展开项共有 24 项，因为行列式的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，若某一项的四个元素乘积中只要有一个元素为零，则该展开项为零. 例如，先考虑零元最多的第一行，其中只有 $a_{11}\neq 0$，所以只能取 $j_1=1$，同理，$j_2=2,j_3=3,j_4=4$，即不为零的项只有 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 一项，且该项的符号为 $(-1)^{\tau(1234)}$，其中 1234 为偶排列. 故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44},$$

其中，凡未列出的元素都是零元，下同.

一般地，n 阶下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即下三角形行列式等于它的主对角线元素的乘积(行列式中从左上角到右下角的对角线上元素称为主对角线元).

同理，n 阶上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即上三角行列式也等于它的主对角线元素的乘积. 特别地，n 阶对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即它也等于其主对角线元素的乘积.

【例 1.4】 用行列式定义计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & ⋰ & & \\ n-1 & & & \\ n & & & \end{vmatrix}.$$

解 行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

在一般项中，已知

$$a_{1n} = 1, a_{1j_1} = 0, (j_1 = 1, 2, \cdots, n-1),$$
$$a_{2,n-1} = 2, a_{2j_2} = 0, (j_2 = 1, 2, \cdots, n-2, n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$a_{n-1,2} = n-1, a_{n-1,j_{n-1}} = 0, (j_{n-1} = 1, 3, \cdots, n),$$
$$a_{n1} = n, a_{nj_n} = 0 (j_n = 2, 3, \cdots, n).$$

因此，在该行列式中只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$ 这一项不为零，其他项均为零. 由于

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{(n-1)n}{2}.$$

于是 $D=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}n!$

1.1.4 对换

为进一步研究 n 阶行列式的性质，我们还需要引入对换的概念，并给出对换与排列奇偶性的关系.

定义 1.5 在 n 元排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中，将元素 j_s 与 j_t 对调，其余的元素仍保持原来位置不变，得到一个新的排列 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$，这样的变换就称为一个对换. 特别地，将两个相邻元素作对换，称为一个邻换.

定理 1.1 任意一个排列经过一个对换后，改变该排列的奇偶性.

证明 (1) 先证明邻换情形. 设 n 元排列为 $j_1\cdots j_k j_{k+1}\cdots j_n$，邻换 j_k, j_{k+1} 后的排列为 $j_1\cdots j_{k+1} j_k\cdots j_n$，由于新排列中除 j_k, j_{k+1} 两元素外，其余元素的相对位置不变，因而这些元素的逆序数经过邻换后也不改变，当 $j_k<j_{k+1}$ 时，邻换使排列的逆序数相对于 j_k 增加 1 个而相对于 j_{k+1} 不变；当 $j_k>j_{k+1}$ 时，邻换使排列的逆序数相对于 j_k 不变而相对于 j_{k+1} 减少 1 个. 总之，邻换后的新旧两个排列的奇偶性改变.

(2) 再证明对换情形. 设 n 元排列为 $j_1\cdots j_k i_1\cdots i_s j_{k+s+1}\cdots j_n$（此时 j_k 与 j_{k+s+1} 之间恰有 s 个元素），对换 j_k, j_{k+s+1}，相当于在原来排列中先将元素 j_k 作 s 次邻换变为新的排列 $j_1\cdots i_1\cdots i_s j_k j_{k+s+1}\cdots j_n$，再将元素 j_{k+s+1} 作 $s+1$ 次邻换变为 $j_1\cdots j_{k+s+1} i_1\cdots i_s j_k\cdots j_n$，于是对换后的新排列相当于由原排列经过 $2s+1$ 次邻换得到. 由上面的证明(1)知它改变了奇数次奇偶性. 总之，对换后的新旧两个排列的奇偶性改变.

推论 1 任一 n 元排列皆可经过对换变成自然排列，且对换次数与该排列的奇偶性相同.

证明 不妨设 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列，由定理 1.1 知，可将该排列顺序地对换成自然排列，且所作对换的次数就是该排列奇偶性变化的次数. 又因为自然排列是偶排列，所以只能经过奇数次对换才能将奇排列对换变成自然排列.

由推论 1 易见：n 个自然数（$n>1$）所形成不同 n 级排列共有 $n!$ 个，且其中的奇偶排列各占一半.

由上述对换的性质，利用数的乘积具有交换性，可将行列式中的展开项各因子换序，使其相应的两个下标所成排列进行适当的同步对换. 可得 n 阶行列式的等价定义如下：

定理 1.2 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}. \qquad (1.10)$$