Dynamic Analysis and Application for
Numerical Methods of Stochastic Systems

随机系统数值方法的动力学分析及应用

蒋 锋 著

科学出版社

随机系统数值方法的动力学分析及应用

Dynamic Analysis and Application for Numerical Methods of Stochastic Systems

蒋 锋 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书旨在介绍随机系统数值方法及其动力学行为，以及作者近几年的研究成果. 本书阐述了随机系统的各种数值方法，分析了中立型随机系统数值方法，Markov 跳跃或 Poisson 跳跃随机系统数值方法，均值回归过程的随机系统数值方法的基本理论和稳定性分析，以及在金融衍生品计算和随机神经网络方面的应用，并通过数值实例演示了理论结果的正确性和方法的有效性.

本书可供高等院校系统与控制理论及应用、应用数学、计算机和随机分析等相关专业高年级本科生和研究生使用，也可供相关教师及科研人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

随机系统数值方法的动力学分析及应用=Dynamic Analysis and Application for Numerical Methods of Stochastic Systems/蒋锋著. —北京：科学出版社, 2016. 6

ISBN 978-7-03-048251-8

Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①蒋… Ⅲ. ①随机系统—数值方法—动力学分析 Ⅳ. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 099876 号

责任编辑：范运年 / 责任校对：蒋 萍
责任印制：张 伟 / 封面设计：铭轩堂

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2016 年 6 月第一次印刷 印张：9 1/2
字数：201 000

定价：78.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

自 1951 年 Itô 引入随机积分后, 随机系统理论得到了快速发展. 近年来, 无论利用 Lyapunov 直接法, 还是利用 Lasalle 不变原理、Razumikhin 方法和 LMI 方法来研究连续随机系统的动力学行为, 都需要构造 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函来建立系统的动力学行为判据. 然而, 一般 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函并不容易构造. 同时, 由于随机系统的复杂性, 一般此类系统都无法得到解析解.

然而, 随着计算机技术的飞速发展, 现在可以利用 Monte-Carlo 方法非常近似地模拟随机环境. 于是随机系统数值方法的研究得到了快速的发展, 但与确定微分系统数值方法的动力学行为相比还有很大的差距, 这关键是由于随机系统数值方法的研究中涉及不同数值方法在多种随机收敛意义下的动力学行为问题, 从而导致在研究中遇到许多实质性的困难要克服, 需要有新的技巧. 在缺乏合适的 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函的情况下, 我们可以通过选择数值方法和步长来比较准确地复制真实解的动力学行为, 因此数值方法就成为一个非常重要的研究随机系统的工具. 数值方法不仅能给出获得随机系统数值解的程序, 而且对建立解的存在性和唯一性提供了一种方法, 进而为研究随机系统的动力学行为提供新的方法. 而金融模型常常伴随着随机性, 本质上是随机系统或 Markov 跳跃随机系统或 Poisson 跳跃随机系统, 但是由于漂移系数或者扩散系数或者 Poisson 跳跃系数一般不满足 Lipschitz 条件或不满足线性增长条件, 从而导致随机金融系统动力学行为极其复杂, 此时经典的研究随机系统动力学行为的方法不再适用, 需要建立新的方法和不等式来处理 Poisson 跳跃项与不满足 Lipschitz 条件或不满足线性增长条件的系数, 这为用随机系统数值方法研究金融随机系统, 随机神经网络的动力学行为提供了新途径, 因此具有重要的理论意义和实用价值.

本书集中了作者近几年来在随机系统数值方法的一系列研究成果, 特别是在随机积分系统、Markov 跳跃随机系统、Poisson 跳跃随机系统和随机神经网络方面的成果. 本书详细地介绍了上述系统和数值方法的动力学, 其理论推导清晰详细, 还提供了大量的数值实例. 因此, 本书可供高等院校系统与控制理论及应用、应用数学、计算机等相关专业高年级本科生和研究生使用, 也可供相关教师及科研人员参考.

在此, 特别感谢我的导师沈轶教授以及曾志刚教授等多年来对我工作的大力支持和热心帮助! 本书的研究内容得到了国家自然科学基金 (编号: 61304067) 和湖北省自然科学基金 (编号: 2013CFB443) 的支持, 在此一并表示诚挚的感谢! 特别感

谢我的夫人、儿子和父母, 谨以此书献给他们!

由于作者知识水平及能力所限, 书中难免有不足之处, 敬请专家和读者批评指正!

作　者

2015 年 12 月

目　　录

第 1 章 随机系统及数值方法概述

1.1 随机系统

自 1892 年 Lyapunov 奠定稳定性理论基础以来, 应用 Lyapunov 直接法[1, 2] 研究确定性系统与随机系统的动力学行为, 国内外已有系列结果, 在神经网络[3-7] 和控制工程[8-14] 等方面都有广泛的应用, 并且人们也一直致力于推广 Lyapunov 稳定性定理. 这些研究中最有代表性的工作有三项, 其一是 Lasalle[15] 在 20 世纪 60 年代对确定性自治系统所建立的 Lasalle 不变原理, 他取消了 Lyapunov 函数为正定的限制, 能解决经典的 Lyapunov 稳定性定理所不能解决的问题; 其二是 Razumikhin[16] 将 Lyapunov 函数应用于时滞系统, 建立了时滞系统稳定性的 Razumikhin 定理, 避免了在研究时滞系统的稳定性时作 Lyapunov 泛函; 最后是用线性矩阵不等式 (LMI) 方法[17, 18] 来处理线性随机系统的动力学行为. 近年来, 一些学者将 Lasalle 与 Razumikhin 方法应用于一般随机系统的动力学行为研究 [19, 20]. 特别地, Shen 和 Mao 等将 Lasalle 与 Razumikhin 方法应用于一般非线性随机混合系统的动力学行为的研究, 拓广了随机混合系统动力学行为的研究方法, 进一步完善了随机混合系统的理论, 建立了一般非线性随机混合系统的 Lasalle 不变原理[21-27] 与 Razumikhin 定理[28-33], 并用于研究随机混合系统的动力学行为, 这具有重要的理论意义和应用价值. 同时, 在金融中, 不同资产有不同的随机性或波动性, 而我们特别关心两种类型的随机过程 —— 离散时间过程 (二项式期权定价模型、三项式期权定价模型等) 和连续时间过程 (Cox-Ingerslll-Ross 模型、Black-Scholes 模型和 Ornstein-Uhlenbeck 模型等). 而实际上, 金融产品的价格模型常常是离散的, 常用随机系统来计算和解释资产价格, 如期权、利率和债券等金融产品价格, 然而并没给出离散系统和原系统间动力学行为的相互关联.

目前, 无论是利用 Lyapunov 直接法, 还是利用 Lasalle 不变原理、Razumikhin 方法和 LMI 方法来研究连续随机系统的动力学行为, 都需要构造 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函来建立系统的动力学行为判据. 然而, 一般 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函并不容易构造. 同时, 由于随机系统的复杂性, 一般此类系统都无法得到解析解. 而随着计算机技术的飞速发展, 现在可以利用 Monte Carlo 方法 [34] 非常近似地模拟随机环境. 于是, 随机系统数值方法的研究得到了快速的发展, 但与确定微分系统数值方法的动力学行为相比还有很大的差距, 关键是由于随机系

统数值方法的研究中涉及不同数值方法在多种随机收敛意义下的动力学行为问题，从而导致在研究中遇到许多实质性的困难要克服，需要有新的技巧. 在缺乏合适的 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函的情况下，我们可以通过选择数值方法和步长来比较准确地复制真实解的动力学行为，因此数值方法就成为一个非常重要的研究随机系统的工具. 数值方法不仅能给出获得随机系统数值解的程序，而且对建立解的存在性和唯一性提供了一种方法[35-38]，进而为研究随机系统动力学行为提供新的方法. 而金融模型常常伴随着随机性，本质上是随机系统[29,39-42] 或 Markov 跳跃随机系统[43, 44] 或 Poisson 跳跃随机系统[34, 45]，但是由于漂移系数或者扩散系数或者 Poisson 跳跃系数一般不满足 Lipschitz 条件或不满足线性增长条件，从而导致随机金融系统动力学行为极其复杂，此时经典的研究随机系统动力学行为的方法不再适用，需要建立新的方法和不等式来处理 Poisson 跳跃项与不满足 Lipschitz 条件或不满足线性增长条件的系数，这为用随机系统数值方法研究金融随机系统的动力学行为提供了新途径，因此具有重要的理论意义和实用价值.

1) 考虑随机系统

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t), t)\mathrm{d}t + g(x(t), t)\mathrm{d}w(t) \tag{1.1}$$

式中，$f : R^n \times R_+ \to R^n$ 与 $g : R^n \times R_+ \to R^{n\times m}$ 是 Borel 可测函数；$w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{\mathrm{T}}$ 是 m 维 Brown 运动，则其 Itô公式为

$$\mathrm{d}V(x, t) = \mathrm{L}V(x, t)\mathrm{d}t + V_x(x, t)g(x(t), t)\mathrm{d}w(t) \tag{1.2}$$

式中，

$$\mathrm{L}V(x, t) = V_t(x, t) + V_x(x, t)f(x(t), t) + \frac{1}{2}\mathrm{trace}\left(g^{\mathrm{T}}(x(t), t)V_{xx}(x, t)g(x(t), t)\right)$$

2) 考虑 Markov 跳跃随机系统

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ 是一完备概率空间，其中 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个满足通常条件 (即单调增加且右连续，同时 $\mathcal{F}_0$ 包含所有的零概率集合) 的 σ 代数流. 设 $w(t) = (w_1(t), \cdots, w_m(t))^{\mathrm{T}}$ 是定义于概率空间上的 m 维布朗 (Brown) 运动.

令 $r(t), t \geqslant 0$，是一个定义在取有限状态值的概率空间 $S = \{1, 2, \cdots, N\}$ 上的右连续 Markov 链，其状态空间产生器 $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N\times N}$ 为

$$P\{r(t+\Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j \end{cases}$$

式中，$\Delta > 0$. 这里的 $\gamma_{ij} \geqslant 0$ 表示状态从 i 转移到状态 $j(i \neq j)$ 的转移速率，而 $\gamma_{ii} = -\sum\limits_{j\neq i}\gamma_{ij}$. 我们假定 Markov 链 $r(\cdot)$ 独立于 Brown 运动 $w(t)$.

一般 Markov 跳跃随机系统具有下面的形式:

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),t,i)\mathrm{d}t+g(x(t),t,i)\mathrm{d}w(t) \tag{1.3}$$

式中, $f:R^n\times R_+\times S\to R^n$ 与 $g:R^n\times R_+\times S\to R^{n\times m}$ 是 Borel 可测函数. 若给定函数 $V(x(t),t,r(t))\in C^{2,1}(R^n\times R_+\times S;R)$, 那么 $V(x,t,i)$ 也为 Itô 过程, 且

$$\mathrm{d}V(x,t,i)=\mathrm{LV}(x,t,i)\mathrm{d}t+V_x(x,t,i)g(x(t),t,i)\mathrm{d}w(t) \tag{1.4}$$

其中,

$$\begin{aligned}\mathrm{LV}(x,t,i)=&V_t(x,t,i)+V_x(x,t,i)f(x(t),t,i)\\&+\frac{1}{2}\mathrm{trace}\left[g^{\mathrm{T}}(x(t),t,i)V_{xx}(x,t,i)g(x(t),t,i)\right]+\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}V(x,t,j)\end{aligned} \tag{1.5}$$

3) 考虑 Poisson 跳跃随机系统

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),t)\mathrm{d}t+g(x(t),t)\mathrm{d}w(t)+h(x(t),t)\mathrm{d}N(t)$$

式中, $N(t)$ 是一个 Poisson 过程, 那么如果 $F(x,t)$ 在 x 是二次可微的, 在 t 是一次可微的, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F(x(t),t)=&\left(F_t+fF_x+\frac{1}{2}g^2F_{xx}\right)(x(t),t)\mathrm{d}t+(gF_x)(x(t),t)\mathrm{d}w(t)\\&+(F(x(t)+h(x(t),t),t)-F(x(t),t))\mathrm{d}N(t)\end{aligned} \tag{1.6}$$

1.2 随机系统数值方法

自 1951 年 Itô [46] 引入随机积分后, 随机系统的稳定性理论得到了快速发展, 并在金融、物理、工程、控制等领域上得到了广泛的应用[47-52], 特别是在生物种群动力系统上的应用, 读者可以参考文献 [53]~[61]. 然而在相应文献中讨论随机系统稳定性大多是需要构造 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函的, 而其构造一般是不容易的. 而随着计算科学的发展, 数值方法为这一课题的研究带来了新的思路和方法. 数值方法不仅能给出获得随机系统数值解的程序, 而且对建立解的存在性和唯一性提供了一种方法. 这个领域中主要研究的是关注于数值解在有限时间内的收敛性问题及随机系统解的长时间性质. 考虑系统

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),t)\mathrm{d}t+g(x(t),t)\mathrm{d}w(t)+h(x(t),t)\mathrm{d}N(t) \tag{1.7}$$

和系统

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t), r(t), t)\mathrm{d}t + g(x(t), r(t), t)\mathrm{d}w(t) + h(x(t), r(t), t)\mathrm{d}N(t) \tag{1.8}$$

的数值解是否收敛于真实解, 是否稳定? 这里 $w(t)$ 是一个 Brown 运动, $N(t)$ 是一个 Poisson 过程, $r(t)$ 是一个右连续的 Markov 链. 如果 $h \equiv 0, g \neq 0$, 则称式 (1.7) 是随机系统; 如果 $h \neq 0$, 则称式 (1.7) 是 Poisson 跳跃随机系统; 如果 $h \equiv 0, g \equiv 0$, 则称式 (1.7) 是确定系统. 如果 $h \equiv 0, g \neq 0$, 则称式 (1.8) 是 Markov 跳跃随机系统; 如果 $h \neq 0$, 则称式 (1.8) 是具有 Markov 跳跃和 Poisson 跳跃的随机系统; 而带有 Markov 跳跃或者 Poisson 跳跃的随机系统统称为混合随机系统.

近年来, 对确定性系统各种数值方法的研究已经有许多成果[62-71], 虽然对随机系统数值方法的研究也有一些成果[72-80], 但与确定性系统数值方法的研究相比还有很大的差距. 由于随机系统数值方法的研究中涉及不同数值方法在多种随机收敛意义下的动力学行为问题, 从而导致在研究中遇到许多实质性的困难要克服, 需要有新的技巧. 在缺乏合适的 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函的情况下, 我们可以通过设置很小的步长, 用数值分析的方法进行数值仿真. 在这方面有两个重要问题需要注意:

(Q1) 如果随机系统具有某种动力学行为, 那么对足够小的步长相应随机系统的数值方法是否也具有同样的动力学行为?

(Q2) 如果对足够小的步长随机系统的数值方法具有某种动力学行为, 那么能否推出相应原随机系统也具有同样的动力学行为?

本节重点对随机系统、Markov 跳跃随机系统和 Poisson 跳跃随机系统数值方法的研究给予综述.

1) 一般随机系统数值方法的研究现状

在 1955 年, Maruyama[81] 提出了随机系统 Euler-Maruyama(EM) 方法以来, 对随机系统数值方法的研究越来越受到关注. 众所周知, 在微分数值方法的研究中首先要考虑的是数值方法本身的收敛性和收敛的阶的问题. 在考虑随机系统的数值逼近时, 人们通常关心的是样本路径的逼近和符合分布的逼近. 在这种意义下, 随机情形的数值方法的收敛主要有强收敛和弱收敛, 而本书主要研究的是随机系统数值方法的强收敛性行为. 我们知道随机系统的 EM 方法的收敛阶是 1/2, 但并不能满足实际的需要, 故而需要高阶强收敛的随机数值方法, 然而这一工作是艰难的. 直到 1974 年, Milstein[82] 首先给出了具有一阶强收敛的 Milstein 方法. 在 1982 年, Rumelin[83] 将 Runge-Kutta 方法发展到随机情形, 构造了一个强收敛的随机 Runge-Kutta 方法, 并证明了它是收敛于 Stratonovich 意义下随机常微分系统的解. 在 1984 年, Planten[84] 给出了随机系统的一个强收敛的无导数数值方法. 在 1996 年, Burrage 等[85] 将微分系统中的有根树理论发展到随机情形的强收敛方法中来,

并首次构造了 3/2 阶的强收敛 Runge-Kutta 方法. 1987 年, Chang[86] 针对带有可加噪声的随机系统给出了强二阶收敛的数值方法. 在 1998 年, Milstein 等[87, 88] 首次针对刚性随机系统提出了平衡隐式方法, 并讨论了其收敛性. Milstein 和 Kloeden 等[35, 38] 的著作详细讨论了一般随机系统的各种数值方法 (如 Euler-Maruyama 方法、半隐式 Euler 方法、Milstein 方法和 Taylor 方法等) 的构造及其在全局 Lipschitz 条件下的强解和弱解的收敛性.

虽然, 在全局 Lipschitz 条件和线性增长条件下对随机系统的各种数值方法的构造和收敛性的研究已经有了许多结论, 但是对于随机系统的数值方法的稳定性还没有很好的结论, 而在随机系统不满足全局 Lipschitz 条件或不满足线性增长条件时其数值方法的收敛性、收敛的阶和各种稳定性行为又如何, 也没有很好的结论. 一直到 2002 年, Higham 等在文献 [89] 中首次提出和证明了在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下随机系统的 Euler-Maruyama 方法的数值解收敛到真实解, 也得到了在单边 Lipschitz 条件下随机系统的 Euler-Maruyama 方法的数值解收敛到真实解的结论, 并推广到了隐式数值方法上, 进一步地在单边 Lipschitz 条件和多项式条件下给出了其数值方法的收敛的阶. 至此, 对随机系统各种数值方法的研究得到了快速的发展. 文献 [90] 研究了线性随机时滞积分系统的半隐式 Euler 方法的收敛性和均方稳定性, 给出了数值方法保持真实解的均方稳定性的一个充分条件. 文献 [91] 研究了线性随机时滞系统的 Euler-Maruyama 方法的收敛性和均方稳定性, 显示了其数值方法再造了系统真实解的均方稳定性. 文献 [92] 建立了关于一类线性随机时滞系统的 Milstein 方法的均方稳定性的判据. 而文献 [93] 研究了线性随机时滞系统的的 SSBE(Split-Step Backward Euler) 方法的收敛性和稳定性, 同时给出了数值收敛的阶及其数值方法 MS- 稳定和 GMS- 稳定的一个充分条件. 文献 [94] 研究了带有分布时滞随机泛函系统, 构造了系统的 θ-Maruyama 方法, 并证明了其数值方法的收敛性. 随后文献 [95] 对随机泛函系统构造了系统的一步逼近方法并给出了其数值方法的收敛性. 文献 [96]~[98] 研究了随机系统 Runge-Kutta 方法的构造及其相关性质. 文献 [99] 利用 Halanay 不等式研究了线性随机时滞系统的 Euler 方法的收敛性及其真实解和其数值解的 p 阶矩指数稳定性. 文献 [100] 和文献 [101] 研究了随机时滞系统数值解的弱收敛性问题. 文献 [102] 对随机时滞系统的各种数值方法进行了介绍. 文献 [103] 研究了随机时滞系统的强收敛性和性质. 文献 [104] 介绍了随机系统的各种数值方法的构造和线性随机系统的数值方法稳定的等价性命题. 对于刚性随机系统, 文献 [105] 讨论了其隐式 Taylor 方法, 研究了其数值方法的收敛性. 文献 [106]~[109] 讨论了随机积分系统、随机系统和随机泛函系统的 Taylor 方法的收敛性及其收敛的阶. 文献 [110] 研究了一类线性随机时滞系统的半隐式 Euler 方法的 T-稳定性. 文献 [111] 讨论了双线性随机系统的上 Lyapunov 指数的逼近问题. 文献 [112] 构造了随机泛函系统的 Euler-Maruyama

方法, 并在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下讨论了其数值方法的收敛性问题. 文献 [113] 在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下构造了随机时滞系统的 Euler-Maruyama 方法, 并讨论了其数值方法的收敛性问题. 2010 年, 在文献 [114] 中, Mao 用 Khasminskii 型条件代替了线性增长条件, 并结合局部 Lipschitz 条件研究了随机时滞系统的 Euler-Maruyama 方法的收敛性. 文献 [115] 首次对中立型随机泛函系统构造了 Euler-Maruyama 方法, 建立了在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下系统的数值方法的收敛性, 并在全局 Lipschitz 条件和线性增长条件下给出了系统的数值方法的收敛的阶, 然而并没有给出在局部 Lipschitz 条件下数值方法的收敛的阶. 而文献 [116] 在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下首次讨论了随机系统的 Euler-Maruyama 方法的收敛的阶, 这为随机系统的 Euler-Maruyama 方法的收敛性和其收敛的阶的研究给出了较好的结论, 然而, 对中立型随机泛函系统的数值方法的收敛的阶的问题目前还没有结论. Higham 在文献 [117] 和文献 [118] 中详细地讨论了线性随机系统的数值方法的均方稳定性和渐进稳定性, 并对随机系统给出了数值模拟. 而后, 他和 Mao 在文献 [119] 中对一类具有均值回归过程的随机系统建立了其数值方法的收敛性, 并且给出了系统和其数值方法的回归特性. 文献 [120] 针对随机系统数值方法, 首先研究了线性随机系统 Euler-Maruyama 方法的几乎处处指数稳定性和 p 阶 $(0 < p \leqslant 2)$ 矩指数稳定性, 显示了线性随机系统数值解分享了其真实解的几乎处处指数稳定性和小阶矩指数稳定性; 然后在线性增长条件下将其结论推广到了非线性随机系统; 最后通过例子显示了在非线性增长条件下, 非线性随机系统的 Euler-Maruyama 方法不再分享真实解的稳定性, 但是在单边 Lipschitz 条件下建立了随机系统 Backward Euler 方法的几乎处处指数稳定性和小阶矩指数稳定性, 并推广到高维随机系统. 最近, 一些学者也对随机金融模型的数值解进行了研究, 例如, 文献 [121] 讨论了一类高维意义下的平方根过程的随机金融模型的数值方法的收敛性和各种有界性质; 文献 [122] 研究了带有时滞的 Cox-Ingersoll-Ross 随机金融模型的数值方法的收敛性和一些数值解的有界性质; 文献 [123] 将文献 [121] 的结论推广到随机 Ait-Sahalia 模型上, 给出了其数值方法的收敛性, 这为在金融中的应用提供了理论支持[124−134].

特别指出的是, 2003 年, 文献 [135] 在全局 Lipschitz 条件下利用数值方法的收敛性行为建立了非线性随机系统的 Euler-Maruyama 方法的指数稳定性的等价命题, 并指明了在局部 Lipschitz 条件下并不能得到随机系统的指数稳定性和对应随机系统数值方法的指数稳定性等价的结论, 也证明了在单边 Lipschitz 条件下, 随机系统数值方法的收敛性行为; 进一步地, 2007 年, 文献 [136] 在全局 Lipschitz 条件下利用数值方法的收敛性行为建立了非线性常时滞随机系统的 Euler-Maruyama 方法的指数稳定性的等价命题, 并将其结论推广到了变时滞随机系统. 这两篇文献对问题 Q1 和 Q2 的研究给出了较好的结论. 然而, 对其他数值方法能否也可以建

立同样的指数稳定性等价命题呢? 对其他的稳定性 (如渐进稳定、几乎处处稳定和依分布稳定等) 是否也能建立相应的等价命题呢? 在非全局 Lipschitz 条件下或非线性增长条件下能否建立如此的等价命题等都还是一个开放性的问题.

2) Markov 跳跃随机系统数值方法的研究现状

上述随机系统都是以 Brown 运动作为唯一的随机干扰源, 而在实际中, 系统常常受多种随机因素的干扰. 由于突变现象, 如分支和系统内部联系紊乱, 参数的转移以及在不同时刻对系统的输入和输出量测量时存在随机误差等, 使得大量物理系统具有可变结构, 易于随机改变. 对于具有这种特点的系统, 人们常常用混合动态模型来刻画, 即系统的状态空间既包含离散状态, 也包含连续状态. 在这类系统中, Markov 跳跃随机系统是近年来备受学者青睐的一类动态模型. 在 1971 年, Kazangey 等[137] 给出了一种跳跃系统, 它是用国民经济宏观模型来研究联邦政策的有效性, 其中用于描述利率影响的就是用有限状态 Markov 链来模拟的. Athans[138] 认为混合系统将为解决控制问题 (如军事化战斗指挥、控制和通信 (BM/C^3) 系统) 提供一种基本的框架. 同时, 混合系统也能被看作电力系统模型. 在文献 [44] 中, Mariton 认为在不同的领域 (如目标追踪、故障控制、制造加工等), 对各种设计问题的规划, 混合系统都能被作为一种有用的数学模型, 其中重要的一种混合系统就是 Markov 跳跃随机系统 (式 (1.8)). 其中 $x(t)$ 是状态, $r(t)$ 可以看作模式. 在运算中, 系统将从一个模式随机地切换到另一个模式, 其切换的模式由 Markov 链确定. 对 Markov 跳跃随机系统稳定性的研究已经得到了许多结论, 例如, 文献 [139] 对 Markov 跳跃随机系统的稳定性进行了系统的研究; 文献 [140] 研究了中立型 Markov 跳跃随机时滞系统的稳定性; 文献 [141]~文献 [143] 分别讨论了 Markov 跳跃随机时滞系统的稳定性、鲁棒稳定性和比较原理.

众所周知, 绝大部分 Markov 跳跃随机系统没有显式解, 因此数值方法成为一种强有力的研究方法. 虽然随机系统的数值方法被大量研究, 然而对 Markov 跳跃随机系统并不能照搬随机系统的数值方法, 这主要是由于两个方面的原因: 其一是数学上的困难, 对 Markov 跳跃项需要新的技巧和方法; 其二是大部分 Markov 跳跃随机系统不满足全局 Lipschitz 条件. 在 2004 年, Yuan 等在文献 [144] 中首次建立了 Markov 跳跃随机系统的 Euler-Maruyama 方法, 利用随机分析工具在全局 Lipschitz 条件和局部 Lipschitz 条件下讨论了系统数值方法的收敛性问题, 同时揭示了在全局 Lipschitz 条件下系统收敛的阶. 进而, 对 Markov 跳跃随机系统数值方法的研究越来越受到关注. Rathinasamy 等在文献 [145] 中利用 M 矩阵理论给出了一个非线性 Markov 跳跃随机多时滞系统指数稳定性的充分条件, 并证明了系统半隐式 Euler 方法的收敛性, 通过不等式和数值分析的方法证明了线性 Markov 跳跃随机多时滞系统数值方法的 MS-稳定性和 GMS-稳定性. 同时, 在文献 [146] 中也给出了线性 Markov 跳跃随机积分系统的 Milstein 方法的收敛性和随机积分系统的数

值方法的 MS- 稳定性和 GMS- 稳定性. 文献 [147] 在局部 Lipschitaz 条件下研究了一类 Markov 跳跃随机系统的 Euler–Maruyama 方法的收敛性和均方稳定性. 文献 [148] 研究了一类具有均值回归的 Markov 跳跃随机系统的 Euler-Maruyama 方法的收敛性和数值方法的回归性, 并利用得到的理论计算了债券和期权等金融产品价格, 这为随机系统在金融模型中的应用提供了理论支持. 文献 [149] 在非 Lipschitz 条件和线性增长条件下研究了 Markov 跳跃随机系统的 Euler-Maruyama 方法 L^1 收敛性和 L^2 收敛性, 推广了局部 Lipschitz 条件下系统数值方法的收敛性结论. 文献 [150] 在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下研究了 Markov 跳跃随机时滞系统的 Euler-Maruyama 方法的均方收敛性, 同时讨论了系统 Euler-Maruyama 方法的依概率收敛性. 文献 [151] 在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下研究了中立型 Markov 跳跃随机时滞系统的 Euler-Maruyama 方法的数值解的有界性及其数值方法的收敛性. 文献 [152] 研究了一类 Markov 跳跃随机系统的 Taylor 方法的收敛性, 推广了随机系统 Euler-Maruyama 方法收敛的结论. 文献 [153] 在非线性增长条件下研究了 Markov 跳跃随机时滞系统的数值方法的收敛性问题. 文献 [154] 构造了一类 Markov 跳跃随机系统的数值算法, 研究了系统解的存在唯一性. 文献 [155] 在线性增长条件下将文献 [120] 的结论推广到 Markov 跳跃随机系统, 得到了 Markov 跳跃随机系统 Euler-Maruyama 方法的几乎处处指数稳定性和小阶矩指数稳定性.

3) Poisson 跳跃随机系统数值方法的研究现状

在股票市场, 由于一些突发事件的变化, 股票价格和期权可能会突然地大幅度增长或降低, 因此扩散过程不能很好地描述这一突发的不可预测的现象. 又如 Black-Scholes 公式, 也还不能很好地解释一些期权定价等实际现象. 为了解释这些现象, 引入 Poisson 过程到资产价格过程中是一种重要的方法[156-159]. 也就是说, 引入 Poisson 过程到随机系统或随机时滞系统或随机泛函系统中来模拟这一变化[160]. 同时, 在期权定价中, Poisson 过程也起着重要的作用, 所以对 Poisson 跳跃随机系统的研究是必要的. 例如, 文献 [161]~文献 [165] 提出了一种带有 Poisson 跳跃的随机金融模型, 而这种模型较已有的模型更容易计算美式期权, 充分显示了随机波动和 Poisson 过程对期权价格的影响, 并通过仿真结果发现, Poisson 过程对美式期权和欧式期权都有重大的影响, 特别是对平价期权. 文献 [166] 在随机和 Poisson 过程下考虑了 Bates 模型, 给出了一种较为快速求解此问题的数值方法.

然而, Poisson 跳跃随机系统比随机系统更加复杂, 同时一般也没有显式解, 因此在金融产品价格的计算中, 数值方法也是一种重要的工具. 如果我们能控制数值解的误差, 那么这个数值方法将能更快更简单地估计一些期权等金融产品价格. 文献 [167] 研究了 Poisson 跳跃随机时滞系统的数值方法, 在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下建立了系统数值方法的收敛性, 在全局 Lipschitz 条件下建立了系统数值方法的指数稳定性和系统指数稳定性的等价命题, 这推广了 Mao[136] 关于随

机系统数值方法指数稳定与随机系统解的指数稳定间的等价命题. 文献 [168] 研究了 Poisson 跳跃随机时滞系统的 Euler-Maruyama 方法的收敛性问题, 推广了文献 [116] 的结论, 得到了在局部 Lipschitz 条件下, Poisson 跳跃随机时滞系统数值方法的收敛的阶. 文献 [169] 研究了 Poisson 跳跃随机系统的 Backward Euler 方法的收敛性, 并给出了其收敛的阶, 同时在多项式增长的条件下给出了系统数值方法的收敛的阶. 文献 [170] 在单边 Lipschitz 条件下构造了 Poisson 跳跃随机系统的 SSBE 方法和补偿 SSBE 方法, 建立了 Euler-Maruyama 方法和后退 Euler 方法的收敛性, 给出了一个均方稳定的充分条件, 最后建立了线性随机系统解及其数值方法的均方稳定性的一个等价命题. 文献 [171] 研究了 Poisson 跳跃随机系统的半隐式 Euler 方法的强收敛性和弱收敛性及线性 Poisson 跳跃随机系统数值方法的 A-稳定性, 并给出了线性随机系统的稳定区域. 文献 [172] 研究了变尺度 Poisson 跳跃随机系统的半隐式 Euler 方法的收敛性和线性 Poisson 跳跃随机系统的数值稳定性. 文献 [173] 研究了 Poisson 跳跃随机系统的均方有效数值解的问题. 文献 [174]~文献 [176] 分别研究了广义 Poisson 跳跃随机系统的数值方法的收敛性和 Poisson 跳跃随机时滞系统的数值方法的收敛性. 文献 [177] 研究了 Poisson 跳跃随机系统强 Taylor 逼近解和数值解的矩有界性, 并在 L^2 范数下建立了数值逼近的阶. 文献 [178] 研究了带有平方根过程的 Poisson 跳跃随机系统, 得到了系统解的一阶矩和二阶矩的回归性、系统半隐式 Euler 方法的一阶矩有界性和二阶矩有界性. 文献 [179] 研究了线性 Poisson 跳跃随机系统解的渐进稳定性、半隐式 Euler 方法的渐进稳定性, 给出了系统 Euler 方法的渐进稳定和非渐进稳定的充分条件. 而文献 [180] 在此基础上研究了具有均方回归平方根过程的 Poisson 跳跃随机系统数值方法的回归性、解的有界性和系统的 Euler-Maruyama 方法的收敛性.

在 Markov 跳跃随机系统或 Poisson 跳跃随机系统得到快速发展的同时, Svishchuk 等在文献 [181] 中首次利用 Lyapunov 第二方法研究了带有 Markov 跳跃和 Poisson 跳跃的随机时滞系统的渐进稳定性和 p 阶矩指数稳定性, 并用这个模型来描述股票成本、解释股票折扣费用和有价证券持有者的股本. 随后, 文献 [182] 研究了带有 Markov 跳跃和 Poisson 跳跃随机时滞系统比较原理, 而后利用这个比较原理证明了系统的依概率稳定性、依概率渐进稳定性、p 阶稳定性、p 阶渐进稳定性、p 阶矩指数稳定性, 从而提高和一般化了文献 [181] 中的主要结论. 文献 [183] 研究了带有 Markov 跳跃和 Poisson 跳跃随机时滞系统的数值方法, 在局部 Lipschitz 条件和线性增长条件下证明了系统数值方法的强收敛性和依概率收敛性. 而文献 [184] 在局部 Lipschitz 条件和一种非线性增长条件下研究了带有 Markov 跳跃和 Poisson 跳跃的随机时滞系统的 Euler 数值解的依概率收敛性. 然而, 这类系统常常是不满足全局 Lipschitz 条件或不满足线性增长条件的, 所以需要发展一些新的方法和技巧来克服这个困难, 对这方面的研究目前还是一个开放性的课题.

1.3 常用不等式

引理 1.1 (Chebyshev 不等式) 设 $X \in L^p(\Omega, R^n)$, 且 $c > 0, p > 0$, 则有

$$P\{\omega : |X(\omega)| \geqslant c\} \leqslant \frac{E|X|^p}{c^p}$$

引理 1.2 (Borel-Cantelli 引理) 设 $\mathcal{F}$ 为一 σ 代数, $A_n \subset \mathcal{F}$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, 则 $P(A) = 0$; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ 且 $\{A_n\}$ 独立, 则 $P(A) = 1$.

引理 1.3 (连续型 Gronwall 不等式) 设 $T > 0$, $c \geqslant 0$, $u(\cdot)$ 是 $[0,T]$ 上的 Borel 可测且有界的非负函数, $v(\cdot)$ 是 $[0,T]$ 上的非负可积函数. 如果对于所有的 $0 \leqslant t \leqslant T$, 有

$$u(t) \leqslant c + \int_0^t v(s)u(s)\mathrm{d}s$$

那么对所有的 $0 \leqslant t \leqslant T$, 有

$$u(t) \leqslant c \exp\left(\int_0^t v(s)\mathrm{d}s\right)$$

引理 1.4 (离散型 Gronwall 不等式) 设 M 是一个正整数, u_k 和 v_k $(k = 0,1,2,\cdots,M)$ 是非负数. 如果

$$u_k \leqslant u_0 + \sum_{j=0}^{k-1} v_j u_j, \quad k = 1,2,\cdots,M$$

那么

$$u_k \leqslant u_0 \exp\left(\sum_{j=0}^{k-1} v_j\right), \quad k = 1,2,\cdots,M$$

引理 1.5 (Doob 鞅不等式) 设 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个定义在 R^n 上的鞅, $[a,b]$ 是 R_+ 上的有界闭区间, 那么如果 $p > 1$ 和 $M_t \in L^p(\Omega; R^n)$, 则

$$E\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b} |M_t|^p\right) \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right) E|M_b|^p$$