# 电磁场理论

马海武 编著

清华大学出版社

# 电磁场理论

马海武 编著

清华大学出版社
北京

## 内容简介

本书全面讲述了电磁场与电磁波的基本规律、基本概念和分析方法。主要内容包括场论、静电场、恒定电场、恒定磁场、静态场的解、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波、电磁波的辐射等。

本书可作为高等院校通信与电子信息类及相关专业本科或研究生的教材，用作高职高专教材时可适当节选，也可作为广大工程技术人员学习电磁场基础理论及应用的参考书。



**图书在版编目(CIP)数据**

电磁场理论/马海武编著. --北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-43545-7

Ⅰ. ①电…　Ⅱ. ①马…　Ⅲ. ①电磁场　Ⅳ. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 080954 号

**责任编辑**：许　龙　洪　英
**封面设计**：常雪影
**责任校对**：王淑云
**责任印制**：刘海龙

**出版发行**：清华大学出版社
　　**网　　址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　**社 总 机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　**质 量 反 馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 刷 者**：北京富博印刷有限公司
**装 订 者**：北京市密云县京文制本装订厂
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：185mm×260mm　　**印　张**：19.25　　**字　　数**：466 千字
**版　　次**：2016 年 6 月第 1 版　　**印　　次**：2016 年 6 月第1次印刷
**印　　数**：1～2000
**定　　价**：39.80 元

产品编号：067230-01

# 前言

FOREWORD

电磁场理论体系是人类文明的集中体现，它的每一个定律、定理和公式都深深地影响了人类社会的变革，甚至塑造了人类的思想。尤其是近几十年来电磁技术的广泛应用，已经深刻地改变了人们的生产和生活方式。它是人类知识宝库中的精髓，更是相关专业工程技术人员必须掌握的基础理论。一直以来，高等院校电子类专业都将电磁场理论列为最重要的专业基础课。当读者开始学习本书的内容时，一般已经在之前几个阶段的物理课中由浅入深地对电磁场的基本定律和基本实验有了初步的认识和理解。但是，对于工程技术人员所从事的相关工程应用和理论研究工作，物理课中的普及性基础的知识是远远不够的。本书的编写宗旨就是希望读者通过本书的学习，能够进一步掌握足够的电磁场基本理论和应用研究方法。

本书共 9 章，重点讲述了电磁场与电磁波的基本规律、基本概念和分析方法，通信工程及电子信息专业本科教学参考学时数为 64 学时。第 1 章是矢量分析与场论，简要介绍学习本课程要用到的数学基础知识；第 2～5 章为静态场，主要介绍静电场、恒定电流的电场和磁场的基本概念和分析与计算方法；第 6 章是时变电磁场，是本书的核心，全面论述了电磁理论中的基本方程及其边界条件；第 7 章研究均匀平面电磁波在无界媒质中的传播及其在平面分界面的反射、折射等特性；第 8 章研究导行电磁波的特性，以及波导、谐振腔等；第 9 章是电磁波的辐射和散射。各章末都附有大量的习题。通过对本书中各部分内容的学习，读者可以对电磁场的基本理论有一个整体的概念。基于在编写方式上的见解和特点，相信本书会对电子信息类学生和专业人员学习电磁场理论课程有一定的帮助。本书渗透着编著者多年的教学心得，希望本书的出版能为相关专业的教学和发展起到一些作用。

对于本科生、研究生，可以根据不同的教学要求灵活选用本书的内容。另外，可根据自身的教学条件，结合实验和仿真技术，通过多媒体教学使学生对这些理论有更加深刻的理解和认识。

在本书的编写过程中，得到了清华大学出版社的大力协助和支持，在此表示诚挚的谢意。另外，对本书所列文献的作者表示由衷的感谢。

限于编者的水平，书中不妥和错误之处在所难免，敬请广大读者及同行批评指正。

作　者

2016 年 3 月

# 目录

# CONTENTS

第 1 章　矢量分析与场论 …… 1
1.1　矢量代数 …… 1
1.1.1　矢量的加、减法 …… 1
1.1.2　数量与矢量的乘积 …… 2
1.1.3　矢量的投影 …… 3
1.1.4　两矢量的标量积 …… 4
1.1.5　两矢量的矢量积 …… 6
1.2　矢量分析 …… 7
1.2.1　矢性函数 …… 7
1.2.2　矢性函数的导数与微分 …… 8
1.2.3　矢性函数的积分 …… 11
1.3　场 …… 12
1.3.1　场的概念 …… 12
1.3.2　数量场的等值面 …… 12
1.3.3　矢量场的矢量线 …… 13
1.4　数量场的方向导数和梯度 …… 14
1.4.1　方向导数 …… 14
1.4.2　梯度 …… 15
1.5　矢量场的通量和散度 …… 18
1.5.1　通量 …… 18
1.5.2　散度 …… 20
1.6　矢量场的环量及旋度 …… 23
1.6.1　环量 …… 23
1.6.2　旋度 …… 25
1.7　几种重要的矢量场 …… 26
1.7.1　有势场 …… 27
1.7.2　管形场 …… 27
1.7.3　调和场 …… 27
1.8　哈密顿算子 …… 28
1.9　正交曲线坐标系 …… 30

1.9.1 正交曲线坐标的概念 …… 30
1.9.2 柱面坐标系和球面坐标系 …… 31
1.10 亥姆霍兹定理 …… 32
习题 …… 34
**第 2 章 静电场** …… 37
2.1 库仑定律与电场强度 …… 37
2.1.1 库仑定律 …… 37
2.1.2 电场强度 …… 40
2.2 高斯定理 …… 42
2.2.1 电通量 …… 42
2.2.2 电场强度的通量和散度 …… 43
2.3 静电场的基本方程 …… 47
2.3.1 电场强度的旋度 …… 47
2.3.2 电位 …… 49
2.3.3 电位方程 …… 53
2.4 电偶极子 …… 56
2.5 静电场中的物质 …… 57
2.5.1 静电场中的导体 …… 57
2.5.2 介质的极化 …… 59
2.5.3 极化介质产生的电位 …… 59
2.5.4 介质中的场方程 …… 61
2.5.5 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的关系及介电常数 …… 61
2.6 边界条件 …… 63
2.6.1 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的边界条件 …… 63
2.6.2 电位的边界条件 …… 64
2.7 静电场中的储能 …… 66
2.7.1 电场能量 …… 66
2.7.2 能量密度 …… 67
2.8 电场力 …… 69
2.9 导体系统的电容 …… 71
2.9.1 电容 …… 71
2.9.2 电位系数 …… 72
2.9.3 电容系数和部分电容 …… 73
习题 …… 76
**第 3 章 恒定电场** …… 79
3.1 电流密度 …… 79
3.1.1 电流的性质 …… 79
3.1.2 电流密度 …… 80
3.2 导体的电阻 …… 82

3.3 电流连续性方程…… 83
3.4 焦耳定律…… 88
3.5 恒定电场的边界条件…… 90
3.6 恒定电场与静电场的比拟…… 94
3.7 电动势…… 99
习题 …… 99
**第 4 章 恒定磁场**…… 102
4.1 磁感应强度 …… 102
4.1.1 安培定律…… 102
4.1.2 毕奥-萨伐尔定律 …… 103
4.2 恒定磁场的基本方程 …… 105
4.3 矢量磁位 …… 108
4.4 磁偶极子 …… 110
4.5 磁介质中的场方程 …… 112
4.5.1 磁场强度…… 112
4.5.2 磁介质中的基本方程…… 115
4.6 恒定磁场的边界条件 …… 116
4.7 标量磁位 …… 118
4.8 互感和自感 …… 119
4.9 磁场能量 …… 122
4.10 磁场力…… 124
习题…… 125
**第 5 章 静态场的解**…… 129
5.1 边值问题的分类 …… 129
5.2 唯一性定理 …… 130
5.2.1 格林公式…… 130
5.2.2 唯一性定理…… 130
5.3 镜像法 …… 131
5.3.1 导体平面上方点电荷的电场…… 132
5.3.2 导体球附近点电荷的电场…… 134
5.3.3 导体平面与平行线电荷的电场…… 137
5.3.4 介质平面上方点电荷的电场…… 139
5.4 分离变量法 …… 140
5.4.1 直角坐标系中的分离变量法…… 140
5.4.2 圆柱坐标系中的分离变量法…… 145
5.4.3 球坐标系中的分离变量法…… 149
5.5 复变函数法 …… 151
5.5.1 复电位函数…… 151
5.5.2 用复电位解二维边值问题…… 152

5.5.3 保角变换 …… 153
5.6 有限差分法 …… 156
习题 …… 158
**第6章 时变电磁场** …… 162
6.1 法拉第电磁感应定律 …… 162
6.2 位移电流 …… 165
6.3 麦克斯韦方程组 …… 166
6.4 电磁场的边界条件 …… 170
6.5 坡印廷定理 …… 174
6.6 正弦电磁场 …… 176
6.6.1 正弦电磁场的复数表示 …… 176
6.6.2 麦克斯韦方程组的复数形式 …… 177
6.6.3 复数形式的本构关系和边界条件 …… 178
6.6.4 复坡印廷矢量 …… 179
6.6.5 复介电常数与复磁导率 …… 181
6.7 波动方程 …… 182
6.8 标量位和矢量位 …… 183
习题 …… 185
**第7章 平面电磁波** …… 187
7.1 理想介质中的平面波 …… 187
7.1.1 均匀平面波的分析 …… 187
7.1.2 均匀平面波的传播特性 …… 189
7.2 导电媒质中的平面波 …… 192
7.2.1 导电媒质中平面波的传播特性 …… 192
7.2.2 趋肤深度和表面电阻 …… 196
7.3 等离子体中的平面波 …… 199
7.4 电磁波的色散和群速 …… 200
7.5 电磁波的极化 …… 202
7.5.1 线极化 …… 202
7.5.2 圆极化 …… 203
7.5.3 椭圆极化 …… 204
7.6 沿任意方向传播的平面波 …… 205
7.7 平面波向平面边界的垂直入射 …… 206
7.7.1 平面波向理想导体的垂直入射 …… 207
7.7.2 平面波向理想介质的垂直入射 …… 209
7.8 平面波向多层平面边界的垂直入射 …… 213
7.9 平面波向平面边界的斜入射 …… 214
7.9.1 平面波向理想导体平面的斜入射 …… 214
7.9.2 平面波对理想介质的斜入射 …… 217

7.9.3 全反射和全透射…… 221

习题…… 224

**第8章 导行电磁波**…… 227

8.1 规则波导中导行电磁波的分析 …… 227

8.1.1 导行波横、纵向分量的关系 …… 228

8.1.2 导行波波型的分类…… 230

8.1.3 导行波的传输特性…… 231

8.2 矩形波导 …… 232

8.2.1 矩形波导中的TE波…… 232

8.2.2 矩形波导中的TM波 …… 234

8.2.3 矩形波导的传输特性…… 234

8.2.4 矩形波导中的$TE_{10}$模 …… 235

8.3 圆柱形波导 …… 239

8.3.1 圆形波导中的TE波…… 240

8.3.2 圆形波导中的TM波 …… 242

8.3.3 圆形波导的传输特性…… 243

8.3.4 圆形波导中的几个主要波型…… 244

8.4 波导中的能量传输与损耗 …… 246

8.5 同轴线 …… 249

8.5.1 同轴线的特性阻抗…… 249

8.5.2 同轴线的传输参数、功率 …… 250

8.6 谐振腔 …… 251

8.6.1 谐振腔的基本参数…… 251

8.6.2 矩形空腔谐振器…… 254

8.6.3 圆柱形空腔谐振器…… 256

习题…… 258

**第9章 电磁波的辐射**…… 260

9.1 滞后位 …… 260

9.2 电基本振子的辐射场 …… 262

9.2.1 电基本振子电磁场的分析…… 262

9.2.2 辐射功率和辐射电阻…… 265

9.3 磁基本振子的辐射场与对偶原理 …… 266

9.3.1 磁基本振子的辐射场…… 266

9.3.2 对偶原理…… 268

9.4 天线的电参数 …… 270

9.5 对称振子天线与天线阵 …… 273

9.5.1 对称振子天线…… 273

9.5.2 天线阵的概念…… 277

9.6 面天线的辐射场 …… 280

9.6.1 基尔霍夫公式 …… 280
9.6.2 口径面的辐射场 …… 281
9.7 互易定理 …… 282
习题 …… 284
**附录A 常用矢量公式** …… 286
**附录B 常用数学公式** …… 289
**附录C 量和单位** …… 293
**附录D 通信波段与传输媒质** …… 295
**参考文献** …… 296

# 第 1 章

# 矢量分析与场论

## 1.1 矢量代数

本节复习矢量的代数运算，在这里不讲细节，只讲与以后讨论矢量分析有关的内容。

经常遇到的量可分为两类：一类完全由数值决定，例如面积、温度、时间、质量等，这一类量称为标量；另一类量，不仅要知道数值的大小，而且要说明它的方向，例如力、速度、加速度等，这一类量称为矢量(或向量)。仅表示矢量大小的数值称为矢量的模。如果去掉矢量的具体性质，矢量可以用一条有向线段表示，使它的正方向指向矢量的方向，它的长度等于矢量的模。表示矢量的记号是用上面带着箭头的拉丁字母如$\vec{a}$、$\vec{b}$…，或用黑体字母如 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$…来表示。有时为了表示出它的起点和终点，便用$\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{AB}$…来表示，其第一个字母表示矢量的起点，第二个字母表示矢量的终点。矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模用$|\boldsymbol{a}|$表示。

需要说明的是，本书所讲的矢量均指自由矢量，就是当两个矢量的方向相同，模相等时，就认为它们是相等的。因此，一个矢量经过平移后仍旧是原来的矢量。

### 1.1.1 矢量的加、减法

**1. 加法**

设有几个矢量，例如 4 个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$。任取一点 $O$，作矢量 $\boldsymbol{a}$，由它的终点 $A$ 作矢量 $\boldsymbol{b}$，再由矢量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 $B$ 作矢量 $\boldsymbol{c}$，其余类推，如图 1.1 所示，这样直至取尽所有的矢量为止。结果就得到折线 $OABCD$，该折线的封闭线 $OD$ 就称为所有矢量之和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$。

特别是，两个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是以 $\boldsymbol{a}$ 的起点 $O$ 为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点 $B$ 为终点所构成的矢量$\overrightarrow{OB}$，如图 1.2 所示。

由图 1.3 和图 1.4 可知，矢量和具有加法的交换律和结合律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$

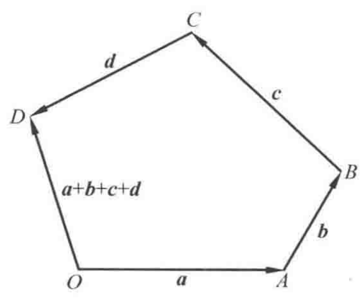


图 1.1 矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 之和

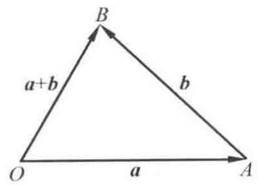


图 1.2　矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和

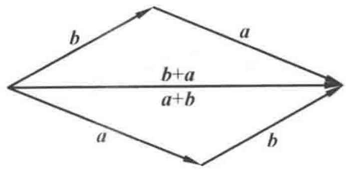


图 1.3　矢量的交换律

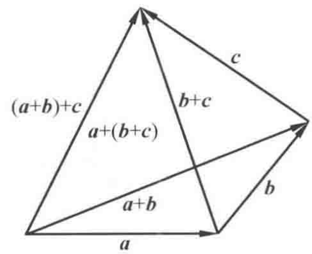


图 1.4　矢量的结合律

**2. 减法**

矢量的减法定义为加法的逆运算，如果矢量 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{M}=\boldsymbol{a}$，则称矢量 $\boldsymbol{M}$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

求矢量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的几何方法如下。

由矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作一矢量 $\boldsymbol{c}$，让 $\boldsymbol{c}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等、方向相反，则以矢量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以矢量 $\boldsymbol{c}$ 的终点为终点的矢量 $\boldsymbol{M}$(见图 1.5)满足关系式：

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{M}=\boldsymbol{a}$$

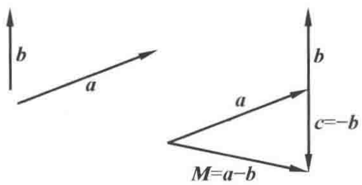


图 1.5　矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差

故矢量 $\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差。

与矢量 $\boldsymbol{N}$ 大小相等方向相反的矢量，称为与 $\boldsymbol{N}$ 相逆的矢量，记作 $-\boldsymbol{N}$。由图 1.5 可知，矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 之和。即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$。

为方便起见，把模为零的特殊矢量称为零矢量，记作 $\boldsymbol{0}$，零矢量的方向是任意的。对于任意一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 均有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$。

### 1.1.2　数量与矢量的乘积

若有一个数量 $m$ 和一个矢量 $\boldsymbol{a}$，所谓数量 $m$ 和矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $m\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{a}m$)，是一个矢量。它的模等于 $|m||\boldsymbol{a}|$；它的方向，当 $m>0$ 时，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，$m<0$ 时，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反，$m=0$ 时，模为零，方向是任意的。

位于平行线上的矢量，称为共线矢量。设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零矢量，如果两矢量共线，则它们具有相同或相反的方向，由数量与矢量乘积的定义可知，两矢量间存在关系式：

$$\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$$

反之，若两矢量具有关系式 $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$，则矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 具有相同或相反的方向，因此矢量 $\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 共线。

根据以上的讨论可知，对于任何两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们共线的充要条件是：存在一个不等于零的数量 $m$ 使等式 $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$ 成立。

模为 1 的矢量，称为单位矢量。矢量 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量是方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，且模为 1 的矢量，记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$。显然，任何矢量 $\boldsymbol{a}$ 均可写成

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$$

上面的式子把矢量 $\boldsymbol{a}$ 分成两部分，分别表示该矢量的模 $|\boldsymbol{a}|$ 和它的方向 $\boldsymbol{a}^\circ$。

### 1.1.3 矢量的投影

在解析几何中研究过线段在轴上投影的基本原理，这里讨论矢量在轴上投影的基本定理，这些定理容易由解析几何中有关投影的定理得到。下面将不加证明地叙述其主要内容。

**定义** 设有一矢量 $\boldsymbol{a}$ 及一轴 $l$，过矢量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 $A$ 和终点 $B$ 分别作平面 $P$、$Q$ 垂直于轴 $l$，且交轴于 $A'$ 和 $B'$，见图 1.6，称轴 $l$ 上的有向线段 $\overline{A'B'}$ 的值（记作 $A'B'$）为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 $l$ 上的投影，记作 $\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a}$，即

$$\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a} = A'B'$$

关于矢量的投影有下面的基本定理：

(1) 矢量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 $l$ 上的投影等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模与矢量 $\boldsymbol{a}$ 及轴 $l$ 间夹角 $\varphi$ 的余弦的积，即

$$\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$$

(2) 矢量和在任何轴上的投影等于各个矢量在同轴上的投影之和，即

$$\mathrm{prj}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = \mathrm{prj}_l\boldsymbol{a} + \mathrm{prj}_l\boldsymbol{b} + \mathrm{prj}_l\boldsymbol{c} + \mathrm{prj}_l\boldsymbol{d}$$

设矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的起点是坐标原点 $O$，而终点 $M$ 的坐标是 $(x,y,z)$，如图 1.7 所示，由矢量的加法得

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

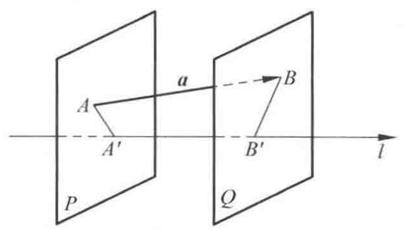


图 1.6 矢量的投影

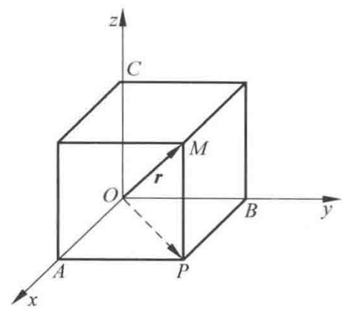


图 1.7 矢量坐标

而

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

因 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OC}$，所以有

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

矢量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 称为矢量 $\overrightarrow{OM}$ 在坐标轴上的分矢量。点 $M$ 的坐标 $x=OA$，$y=OB$，$z=OC$，因此 $OA$、$OB$ 和 $OC$ 正是矢量 $\overrightarrow{OM}$ 在坐标轴上的投影。我们在坐标轴的正向作单位矢量，以 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 表示，这样，引进的 3 个两两互相垂直的单位矢量称为基本单位矢量，于是有

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{e}_x,\quad \overrightarrow{OB} = y\boldsymbol{e}_y,\quad \overrightarrow{OC} = z\boldsymbol{e}_z$$

所以

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

式中，$x$、$y$、$z$ 是矢量 $\overrightarrow{OM}$ 在坐标轴上的投影，在矢量的起点为坐标原点的情况下，$x$、$y$、$z$ 也正好是矢量终点 $M$ 的坐标。

上面公式，不但对于由原点出发的矢量是成立的，而且对于以空间任一点作起点的矢量也是成立的，即

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z$$

式中，$a_x$、$a_y$、$a_z$ 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影。这个表示式称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的投影式，简记为 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$。

矢量的投影表示式在矢量理论中有特别重要的意义，依靠它建立起矢量理论的两部分，即几何的和代数的两部分之间的联系。

设已知两个矢量

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{e}_x + b_y \boldsymbol{e}_y + b_z \boldsymbol{e}_z$$

由投影的基本定理可得

$$(a+b)_x = a_x + b_x$$

$$(a+b)_y = a_y + b_y$$

$$(a+b)_z = a_z + b_z$$

由此，得

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{e}_x + (a_y + b_y)\boldsymbol{e}_y + (a_z + b_z)\boldsymbol{e}_z$$

也就是已知矢量的投影，在几何相加矢量时，必须将同名的投影分别相加，这样，一个几何和归结为三个代数和。

仿之，几何差可以写为

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{e}_x + (a_y - b_y)\boldsymbol{e}_y + (a_z - b_z)\boldsymbol{e}_z$$

数量乘矢量可以写为

$$m\boldsymbol{a} = ma_x \boldsymbol{e}_x + ma_y \boldsymbol{e}_y + ma_z \boldsymbol{e}_z$$

连接坐标原点与点 $M(x,y,z)$ 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 称为点 $M$ 的矢径，如图 1.7 所示，由图可知

$$OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z$$

或

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z$$

这时 $\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

且其模为

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### 1.1.4 两矢量的标量积

#### 1. 定义

两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模和它们间夹角 $\varphi$ 的余弦的乘积，称为两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的标量积，记作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi$$

由定义得

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0 = |\boldsymbol{a}|^2$$

如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$，则上式可写成

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$$

**2. 标量积的基本性质**

(1) 非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

因为当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直时，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，从而有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$$

反之，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，并且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 皆不为零矢量，则有

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$$

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直。

(2) 由标量积的定义可知，标量积满足交换律，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

(3) 标量积满足分配律，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

事实上，由标量积的定义有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos[\widehat{\boldsymbol{c},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}]=|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

再由投影定理可知

$$\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{prj}_c\boldsymbol{a}+\mathrm{prj}_c\boldsymbol{b}$$

所以有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{prj}_c\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{prj}_c\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

(4) 由标量积的定义易知，标量积与标量的乘积满足结合律，即

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})m=\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

**3. 标量积的投影表示法**

设有两个矢量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，由上面所述标量积的基本性质可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=&(a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z)\cdot(b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z)\\=&a_x\boldsymbol{e}_x\cdot(b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z)+a_y\boldsymbol{e}_y\cdot(b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z)\\&+a_z\boldsymbol{e}_z\cdot(b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z)\\=&a_xb_x\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x+a_xb_y\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y+a_xb_z\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_z+a_yb_x\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_x+a_yb_y\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y+a_yb_z\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z\\&+a_zb_x\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_x+a_zb_y\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_y+a_zb_z\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 是互相垂直的单位矢量，故有

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y=0,\quad\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z=0,\quad\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_x=0,\quad\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x=1,\quad\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y=1,\quad\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z=1$$

最后得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

这就是说，两个矢量的标量积等于它们在坐标轴上同名投影乘积的代数和。

特别是 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时得到

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$$

所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

**4. 两矢量间的夹角**

设两个矢量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 之间的夹角为 $\varphi$，则

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

由两矢量的标量积和矢量的模的投影表示式得到

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

## 1.1.5 两矢量的矢量积

**1. 定义**

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积是这样的一个矢量 $\boldsymbol{c}$：

(1) 矢量 $\boldsymbol{c}$ 的模等于以矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所组成的平行四边形面积，即

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

(2) 矢量 $\boldsymbol{c}$ 同时垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，因而矢量 $\boldsymbol{c}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面。

(3) 矢量 $\boldsymbol{c}$ 的正向按“右手法则”来确定，如图 1.8 所示。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积用记号 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 表示，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

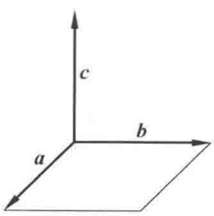

图 1.8 两矢量的矢量积

**2. 矢量积的基本性质**

(1) 两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是两矢量的矢量积为零，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

事实上，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 $\pi$，$\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，故得 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$。

反之，当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，而 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$ 时，由 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 推得 $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，从而 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 $\pi$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$。

(2) 由矢量积的定义得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$$

这说明矢量积不满足交换律，并且当矢量积的因子交换时变号。

(3) 由矢量积的定义易证

$$(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(m\boldsymbol{b})$$

即标量积的乘数可以提出，放在矢量积记号外面。

(4) 矢量积满足分配律，即

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$

**3. 矢量积的投影表示法**

将上面研究的结果应用到基本单位矢量的矢量积可得

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=-(\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x)=\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z=-(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y)=\boldsymbol{e}_x,\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x=-(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z)=\boldsymbol{e}_y$$

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z)\times(b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z)\\&=a_xb_x(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x)+a_xb_y(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y)+a_xb_z(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z)+a_yb_x(\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x)+a_yb_y(\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_y)\\&\quad+a_yb_z(\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z)+a_zb_x(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x)+a_zb_y(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y)+a_zb_z(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z)\end{aligned}$$

从而得到

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{e}_x+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{e}_y+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{e}_z$$

应用三阶行列式，则上式可表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x&\boldsymbol{e}_y&\boldsymbol{e}_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

## 1.2　矢量分析

矢量分析是矢量代数的继续，主要内容是介绍矢性函数及其微分、积分等，是学习场论的基础。

### 1.2.1　矢性函数

#### 1. 矢性函数的概念

矢量代数中讨论了模和方向都保持不变的矢量，这种矢量称为常矢，其中零矢量的方向为任意，是一个特殊的常矢量；另外还有模和方向或其中之一会改变的矢量，这种矢量称为变矢。在矢量分析中还引进了矢性函数的概念，它的定义是：设有数性变量 $t$ 和变矢 $\boldsymbol{A}$，如果对于 $t$ 在某个范围 $G$ 内的每一个数值，$\boldsymbol{A}$ 都以一个确定的矢量与之对应，则称 $\boldsymbol{A}$ 为数性变量 $t$ 的矢性函数，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)\tag{1.1}$$

并称 $G$ 为函数 $\boldsymbol{A}$ 的定义域。

矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在 $Oxyz$ 直角坐标系中的 3 个坐标，也就是它在 3 个坐标轴上的投影，显然都是 $t$ 的函数：

$$A_x(t),\quad A_y(t),\quad A_z(t)$$

所以，矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$的坐标表示式为

$$\boldsymbol{A}=A_x(t)\boldsymbol{e}_x+A_y(t)\boldsymbol{e}_y+A_z(t)\boldsymbol{e}_z\tag{1.2}$$

式中，$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 为沿 $x$、$y$、$z$ 坐标轴正向的单位矢量。可见，一个矢性函数和 3 个有序的数性函数（坐标）构成一一对应的关系。

#### 2. 矢端曲线

如果不论两个矢量的空间位置如何，只要当两个矢量的模和方向都相同，就说这两个矢量是相等的，这样的矢量称为自由矢量。以后所讲的矢量均指自由矢量。所以，为了能用图形来直观地表示矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$的变化状态，可以将 $\boldsymbol{A}(t)$的起点取在坐标原点。当 $t$ 变化时，矢量 $\boldsymbol{A}(t)$的终点 $M$ 就描绘出一条曲线 $l$，称曲线 $l$ 为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$的矢端曲线或矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$的图形，如图 1.9 所示。同时称式(1.1)或式(1.2)为曲线 $l$ 的矢量方程。

称起点在坐标原点 $O$、终点为 $M(x,y,z)$的矢量$\overrightarrow{OM}$为点 $M$（对于 $O$ 点）的矢径，一般用