ZIRAN BIANJIEYUAN ZAI
FEIXIANXING WENTI JI DIANCICHANG ZHONG DE YINGYONG

自然边界元在非线性问题及电磁场中的应用

◉ 吴正鹏等 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

自然边界元在非线性问题及电磁场中的应用

吴正鹏　韩　然　张友萍　周宗福　余德浩　著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

自然边界元在非线性问题及电磁场中的应用/吴正鹏等著. —合肥：安徽大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5664-0273-8

Ⅰ.①自… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①边界元—应用—非线性方程—数值计算②边界元—应用—电磁场 Ⅳ.①O24②O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 147025 号

自然边界元在非线性问题及电磁场中的应用 吴正鹏等 著

出版发行：北京师范大学出版集团
安徽大学出版社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn

印　　刷：安徽国文彩印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm
印　　张：9.5
字　　数：135 千字
版　　次：2011 年 8 月第 1 版
印　　次：2011 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：20.00 元
ISBN 978-7-5664-0273-8

责任编辑：陈志兴　钟　蕾　　**装帧设计：**李　军
责任印制：赵明炎

内容提要

本书主要研究若干外边值问题的自然边界元法以及基于自然边界元归化的耦合算法。主要介绍了二维半线性及非线性椭圆方程外问题的基于自然边界元的耦合算法与三维半线性椭圆方程的自然边界元与有限元耦合算法，并分析了算法的收敛性和误差估计，而后讨论了自然边界元法在电磁场中的应用，将自然边界元与棱单元结合起来，给出了耦合算法及解耦算法，并讨论了其收敛性及误差估计。

本书内容分为两部分。第一部分首先介绍了自然边界元方法的基本原理，应用基于自然边界归化的耦合算法求解二维、三维半线性及非线性方程外问题。第二部分，也就是第六章，将自然边界元方法用于电磁场中，将自然边界元与棱单元结合起来，提出一种耦合法及解耦法，并分别讨论解的存在性、唯一性、收敛性及其误差估计。

目　录

第 1 章 自然边界元方法的一般原理

1.1 引言

数学是关于宇宙万物之间关系的研究，是关于数与形的学科. 自从笛卡尔引入坐标系之后，在数与形之间就架起了桥梁. 希尔伯特是分析思想的代表，而庞加莱则更为注重几何观念. 在数学的研究中，方程的研究是重要的组成部分，而在现实问题中，更多的时候人们关心的是方程的数值解. 在以往的微分方程数值解的研究中，人们关心的是数值方法的相容性、收敛性、稳定性、截断误差等，没有考虑系统本身所具有的几何性质.

冯康先生指出："当代计算方法的一条不成文的基本法则是，问题原型的基本特征在离散后应该尽可能的得到保持. 而为了达到这一效果则离散应尽可能在问题原型的同一形式框架中进行."微分方程是一个连续的动力系统，而一个数值方法对这个系统的近似可以看作是一个具有固定时间步长的离散的动力系统. 因此，当我们用数值方法求解系统时，事实上我们是用离散的动力系统去模拟连续系统. 在这个意义上，我们很自然的要求数值模拟应该在同一几何框架中进行，尽可能多的保持原来连续系统的性质，特别是长期跟踪模拟. 因为任

何数值解在长期模拟运算以后，都很可能远远偏离精确解，不能很好的描述真实的物理过程.

许多物理问题可以通过不同途径归化为不同形式的数学模型. 它们或是表示为偏微分方程的边值问题，或表示为区域上的变分问题，或归结为边界上的积分方程. 这些不同的数学形式在理论上是等价的，但在实践中并不等效，它们分别导致有限差分法、有限元方法和边界元方法等不同的数值计算方法. 有限元法和有限差分法是求解有界区域问题上的行之有效的数值方法，但用其处理无界区域问题时常感到困难. 自 20 世纪 60 年代中期美国海军科学研究部门发表了波动方程外问题数值解研究报告以来，无界区域问题的数值解法一直受到人们的广泛关注. 1975 年，R. W. Thatcher 首次用网络无限加密的有限元方法，求解带奇点边值问题. 1978 年，他又把许多元素逼近奇点的思想用于求解无界区域问题并获得成功. 1973 年，R. F. Ungless 在其硕士论文中首次提出无限元思想，无界区域的这一类无限元法是以构造开口的无限单元的形状函数为基础.

边界元方法是在经典的边界积分方程法的基础上吸取了有限元离散化技术而发展起来的一种偏微分方程的数值解法. 它把微分方程的边值问题归化为边界上的积分方程，然后利用各种离散化技术求解. 对微分方程作边界化的思想早在 19 世纪就出现了，但将边界归化应用于数值计算并为此目的深入研究边界归化理论则是从 20 世纪 60 年代才开始的. 电子计算机的广泛应用使得有限元方法蓬勃发展，人们将有限元技术与经典的边界归化理论相结合，为边界积分方程法在工程技术和科学计算中的应用打开了新局面. 到 70 年代后期，边界积分方程法开始被称为边界元方法，它是继有限元方法之后出现的一种新的、重要的数值计算方法. C. A. Brebbia、G. C. Hsiao、W. L. Wendland、J. C. Nedelec 以及我国的冯康、杜庆华、余德浩、韩厚德、祝家麟等人对这一方法的发展与推广都做了大量的工作. 现在，边界元方法已被广泛应用于弹性力学、断裂力学、电磁场和热传导等领域的科学研究和工程技术的数值计算.

边界归化有很多途径.我们可以从同一边值问题得到许多不同的边界积分方程,这些积分方程可能是非奇异的,弱奇异的,Cauchy 型奇异的,或者是强奇异的.这些差异因边界归化途径不同而产生.不同的归化途径可能导致不同的边界元方法.国际流行的边界元方法通常被分为间接法与直接法两大类.间接法从基本解及位势理论出发得到 Frehlolm 积分方程,并引入了新变量.直接法则从 Green 公式及基本解出发,并不引入新变量.这两类边界归化得到的边界积分方程通常并不保持原问题的自伴性等有用的性质.

1978 年 10—11 月,我国学者冯康先生应法国国家科学研究中心及意大利国家科学院邀请赴法、意讲学.在这次讲学中,冯先生提出了一种全新的边界归化方式——正则边界归化(见文献[2]).由于这种边界归化保持能量不变,原边值问题的许多有用的性质如双线性的对称性、强制性等均被保持,从而积分方程的解的存在唯一性及稳定性等结果也就随之而得.这一优点也保持了边界归化与经典有限元方法能自然而直接的耦合.因此,后来冯先生又将正则边界归化改称为自然边界归化(见文献[54]),这一提法一直沿用至今.

基于自然边界归化的边界元法称为自然边界元法,它是从 Green 函数和 Green 公式出发,将偏微分方程边值问题归化为边界上的超奇异积分,然后化成相应的变分形式在边界上离散化求解的一种数值计算方法(见文献[3]).随着超奇异积分的计算在二维领域中得到解决(见文献[6,108]),自然边界元法获得了极大的发展.到 20 世纪 80 年代中期,自然边界元的研究工作就已在二维问题中取得了许多重要的结果(见文献[4,5,54,100,103,104,108]).余德浩研究员的专著[3]的出版,则是自然边界元方法趋于成熟的重要标志,该书建立了自然边界元法的一般理论框架,并系统的研究了二维调和问题、重调和问题、平面弹性问题和 Stocks 问题的自然边界元法以及自然边界元与有限元的耦合算法.此后,文献[15]及[18]又分别研究了二维及三维 Helmoholtz 方程外边值问题的自然边界元法.

与一般边界归化得到的边界积分方程取决于归化途径及所选择的基本解

不同，自然积分方程是由原边值问题唯一确定的，它准确地反映此边值问题的解的互补微分边值之间的本质关系.我们可以通过各种不同的途径，例如专著[3]中使用的 Green 函数法、Fourier 变换或 Fourier 级数法及复变函数论方法等来推求自然积分方程.因此可以说，自然边界归化在各种边界归化中占有特殊的地位并具有许多优越性.从数值计算的角度来看，自然边界元方法也有许多优点，如刚度矩阵的对称正定性，近似解的稳定性，以及在处理无穷区域及断裂区域时仍保持理想的精度等等.特别是对于圆周及椭圆边界的情况，自然边界元刚度矩阵还有某种循环性，于是我们并不需要计算全部矩阵系数，而只要计算大约半行系数就可以了.这样，与一般边界元方法由于刚度矩阵系数计算的复杂性使得边界元降维的优点在很大程度上被抵消不同，自然边界元方法确实使计算量大为减少.

自然边界元法的优点正是由自然边界归化的解析上的工作换来的.由于对一般区域上的边值问题往往难以得到相应的 Green 函数，也难以应用 Fourier 分析方法及复变函数论方法，从而无法解析地求得自然积分方程和 Poisson 积分公式，也就不能直接应用自然边界元法.此外，自然边界元法也和其他边界元法一样难以处理非线性问题及非均质问题，而有限元则适用于较任意的区域及更广泛的问题.于是自然就想到将这两种方法结合起来，即将求解区域分成两个子区域，在一个有限的、无奇性的子区域上问题可以是非线性的、非均匀的，在另一个可以是无限的、有奇性的、规则的子区域上问题则是线性的、均匀的.我们在前一子区域上应用有限元法，而在后一子区域上应用自然边界元法，这就是自然边界元与有限元耦合法.这种耦合综合了自然边界元方法与经典有限元方法的优点，既克服了自然边界元方法对区域的局限性，又使经典有限元方法能适用于无界区域及裂缝区域.

由于自然边界归化完全保持了原椭圆边值问题的一些基本特性，特别是具有能量泛函不变性，又由于自然边界元法和有限元法基于同样的变分原理，故两者的耦合非常直接自然，并能简单的纳入有限元计算体系.耦合法的总体刚

度矩阵恰为分别有自然边界元法及有限元法得到的刚度矩阵之和. 这与通常非直接的其他类型的边界元与有限元的耦合法相比要简单得多,从而也更易于应用. 事实上实施自然边界归化的子区域正是有限元剖分中的一个大单元,由于其内部不需要再剖分,使节点数大为减少,从而得到的线性代数方程组的阶数大为降低. 而为此付出的代价只是插入一个计算自然边界元刚度矩阵的子程序. 大单元通常取作圆(或椭圆)外区域,相应的刚度矩阵有对称循环性,故其计算量是很小的.

为求解微分方程的外边值问题常常是需要引进人工边界(见文献[14,15,22,23]). 对人工边界外部区域作自然边界归化得到的自然积分方程即 Dirichlet—Neumann 映射,正是人工边界上的准确的边界条件(见文献[3,17,24,105]),这是一类非局部边界条件. 自然积分算子即 Dirichlet—Neumann 算子,是 Hadamard 型超奇异积分算子,也是正 1 阶的拟微分算子. 它在应用耦合方法或区域分解算法求解外问题时起着非常重要的作用(见文献[2,3,7,8,101,103,108]). 在二维情形,为简单起见通常取圆周为人工边界,这对一般的二维外区域而言确是最佳选择. 但若求解区域是细长障碍物的外部区域,则采用圆周做人工边界显然很不经济,而应用椭圆人工边界却可节省大量计算(见文献[10,17]). 在此基础上也可研究一类各向异性常系数椭圆型方程的外边界值问题,得到圆周或椭圆上的准确的人工边界条件,即自然积分方程,并进而发展相应的耦合算法和区域分解算法.

本章将首先概述通常的边界归化方法及基于这些边界归化的边界元方法,以便读者对一般的间接法和直接法也有所了解. 从第 3 节起即转入本书主题,依次介绍自然边界元归化的基本思想,强奇异积分的数值计算,自然边界元解的收敛性及误差估计等内容.

1.2 边界归化与边界元方法

边界元方法是将区域内的微分方程边值问题归化到边界上然后在边界上离散化求解的一种数值计算方法. 其基础在于边界归化，即将区域内的微分方程边值问题归化为在数学上等价的边界上的积分方程. 边界归化的途径很多，可以从同一边值问题得到许多不同的边界积分方程. 不同的边界归化途径可能导致不同的边界元方法. 下面我们简要介绍通常采用的两种边界归化方法，即间接归化法及直接归化法.

1.2.1 间接边界归化

间接边界归化是从基本解及位势理论出发得到的 Fredholm 积分方程，这是经典的边界归化方法. 此时积分方程的未知量不上原问题的解的边值而是引入的新变量，因此这种归化被称为间接归化. 现以二维调和方程边值问题为例来说明.

考察以逐段光滑的简单(无自交点)闭曲线 Γ 为边界的平面有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 内的调和方程第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u = u_0, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

及第二边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, \text{在 } \Gamma \text{ 上} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

其中 n 为 Γ 上的外法线方向. 边值问题(1.2.1)存在唯一解，而边值问题(1.2.2)在满足相容性条件

$$\int_\Gamma g \, \mathrm{d}s = 0$$

时，在差一个任意常数的意义下有唯一解.

类似地考察 Ω 的补集的内部 Ω' 上的调和方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0, \text{在 } \Omega' \text{ 内} \\ u = u_0, \text{在 } \Gamma \text{ 上}\end{cases} \tag{1.2.3}$$

及第二边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0, \text{在 } \Omega' \text{ 内} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, \text{在 } \Gamma \text{ 上}\end{cases} \tag{1.2.4}$$

边值问题(1.2.3)及(1.2.4)的解的唯一性依赖于 u 在无穷远的性态，即必须对解在无穷远处的性态作一定的限制才能保证解的唯一性.

为了建立解的积分表达式，要用到 Green 公式

$$\iint_{\Omega} v\Delta u \, dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx_1 dx_2 \tag{1.2.5}$$

及由此推出的 Green 第二公式

$$\iint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \tag{1.2.6}$$

今后常简记 $x = (x_1, x_2)$，$dx = dx_1 dx_2$. 又已知二维调和方程的基本解为

$$E = -\frac{1}{2\pi} \ln r \tag{1.2.7}$$

其中 $r = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$，$y = (y_1, y_2)$ 为屏幕上的某定点. 基本解 E 满足

$$-\Delta E = \delta(x - y) \tag{1.2.8}$$

这里 $\delta(\cdot)$ 为二维 Dirac－δ 函数，其定义如下：

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

且

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \delta(x) dx = 1$$

它是一个广义函数，对任意连续函数 $\varphi(x)$ ，满足

$$\iint_{R^2}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

(见文献[30],[58]).

下面的定理给出了上述边值问题的解的积分表达式.

定理 1.1 设 u 为 Ω 和 Ω' 中二次可微函数，分别有边值

$$u\big|_{int\Gamma}, u\big|_{ext\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{int\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{ext\Gamma}$$

且满足

$$\begin{cases}\Delta u = 0, \text{在 } \Omega\cup\Omega' \text{ 内} \\ \text{当 } |x| \text{ 大时}, u(x) = O\left(\dfrac{1}{|x|}\right), |grad u(x)| = O\left(\dfrac{1}{|x|^2}\right)\end{cases} \tag{1.2.9}$$

于是，若 $y\in\Omega\cup\Omega'$ ，则

$$u(y) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left\{[u(x)]\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y| - \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right]\ln|x-y|\right\}\mathrm{d}s(x) \tag{1.2.10}$$

若 $y\in\Gamma$ ，则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{u(y)|_{int\Gamma} + u(y)|_{ext\Gamma}\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left\{[u(x)]\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y| - \left[\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right]\ln|x-y|\right\}\mathrm{d}s(x)\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

其中规定法线方向总是指向 Ω'、$int\Gamma$ 的外部，即由 Ω 指向 Ω'，$int\Gamma$ 及 $ext\Gamma$ 分别表示 Γ 的内侧及外侧，

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{int\Gamma} - \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{ext\Gamma}$$

$$[u] = u\big|_{int\Gamma} - u\big|_{ext\Gamma}$$

分别表示 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 及 u 越过 Γ 的跃度.

定理的证明可见专著[26]或论文[36].

上述结果是对光滑边界而言的，若边界 Γ 上有角点 y_0，则式(1.2.10)依然成立，而式(1.2.11)左边在 y_0 处应作改变，即代之以

$$
\begin{aligned}
&\frac{\theta}{2}u(y_0)\big|_{int\Gamma}+\frac{2\pi-\theta}{2\pi}u(y_0)\big|_{ext\Gamma}\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left\{[u(x)]\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y_0|-\left[\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right]\ln|x-y_0|\right\}\mathrm{d}s(x) \qquad (1.2.12)
\end{aligned}
$$

其中 θ 为 Γ 在 y_0 点的二条切线在 Ω 内的夹角的弧度数.

若分别考虑 Ω 及 Ω' 内的调和方程边值问题，可以从式(1.2.10)－(1.2.12)得到

$$
\int_{\Gamma}\left\{u(x)\big|_{int\Gamma}\frac{\partial}{\partial n}\ln|x-y|-\frac{\partial u(x)}{\partial n}\bigg|_{int\Gamma}\ln|x-y|\right\}\mathrm{d}s(x)=\begin{cases}2\pi u(y), & y\in\Omega\\ \theta u(y)\big|_{int\Gamma}, & y\in\Gamma\\ 0, & y\in\Omega'\end{cases} \qquad (1.2.13)
$$

及

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Gamma}\left\{u(x)\big|_{ext\Gamma}\frac{\partial}{\partial n}\ln|x-y|-\frac{\partial u(x)}{\partial n}\bigg|_{ext\Gamma}\ln|x-y|\right\}\mathrm{d}s(x)\\
&=\begin{cases}2\pi u(y), & y\in\Omega'\\ (2\pi-\theta)u(y)\big|_{ext\Gamma}, & y\in\Gamma\\ 0, & y\in\Omega\end{cases} \qquad (1.2.14)
\end{aligned}
$$

下面讨论如何得到边界积分方程.引入两个辅助变量

$$
\varphi=[u]=u\big|_{int\Gamma}-u\big|_{ext\Gamma} \qquad (1.2.15)
$$

及

$$
q=\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]=\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{int\Gamma}-\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{ext\Gamma} \qquad (1.2.16)
$$

这里，当调和方程的解 u 被解释为物理学中静电场的电分位分布时，φ 表示在 Γ 两侧的电位的跃度，相当于在 Γ 内侧分布着负电荷，而在 Γ 外侧分布着等量的正电荷，从而形成的电偶极子的矩在 Γ 上的分布密度；q 表示 Γ 两侧电场强度法向量的跃度，相当于在 Γ 上分布的电荷密度.

在 u 连续通过 Γ 的情况下，也即当 $[u(x)]=0$ 时，解的积分表达式(1.2.10)变成

$$u(y)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}q(x)\ln|x-y|\mathrm{d}s(x),y\in R^2 \tag{1.2.17}$$

这一表达式被称为单层位势，其物理意义为在 Γ 上分布密度为 q 的电荷在空间产生的电势场.

现在利用单层位势作边界归化. 对 Ω 内或 Ω' 内的第一边值问题，边值 $u|_{\mathrm{int}\Gamma}$ 或 $u|_{\mathrm{ext}\Gamma}$ 为已知函数 u_0 . 若解 u 可用单层位势表达式(1.2.17)表示，则 $q(x)$ 应为如下第一类 Fredholm 积分方程之解：

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}q(x)\ln|x-y|\mathrm{d}s(x)=u_0(y),y\in\Gamma \tag{1.2.18}$$

由式(1.2.18)解出 $q(x)$ 后再代入式(1.2.17)便可得 Ω 内或 Ω' 内的解 u . 这里需要指出的是，由于定理 1.1 对 u 在无穷远的性态作了较强的限制，实际上对 u 的边值 u_0 也有了某种限制，于是并非所有的解函数 u 可用单层位势式(1.2.17)表示，但可以证明，若 u 不能用单层位势表示，则必可表示为

$$u(y)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}q(x)\ln|x-y|\mathrm{d}s(x)+C \tag{1.2.19}$$

其中 C 为某常数. 由(1.2.19)仍得第一类 Fredholm 积分方程

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}q(x)\ln|x-y|\mathrm{d}s(x)=u_0(y)-C,y\in\Gamma \tag{1.2.20}$$

对第二边值问题，假定相容性条件

$$\int_{\Gamma}g(x)\mathrm{d}s(x)=0$$

被满足，有如下定理.

定理 1.2 若 u 满足定理 1.1 的假设，且 $[u]=0$ ，则对 $y\in\Gamma$，有

$$\left.\frac{\partial u(y)}{\partial n}\right|_{\mathrm{ext}\Gamma}=-\frac{1}{2}q(y)-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}q(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s(x) \tag{1.2.21}$$

$$\left.\frac{\partial u(y)}{\partial n}\right|_{\mathrm{int}\Gamma}=\frac{1}{2}q(y)-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}q(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s(x) \tag{1.2.22}$$

其证明可参见论文[36]. 于是由此定理，可得关于第二边值外问题的 Γ 上的积分方程

$$-\frac{1}{2}q(y)-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}q(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\,\mathrm{d}s(x)=g(y) \tag{1.2.23}$$

这是一个第二类 Fredholm 积分方程. 而对于第二边值内问题，则有如下第二类 Fredholm 积分方程：

$$\frac{1}{2}q(y)-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}q(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\,\mathrm{d}s(x)=g(y) \tag{1.2.24}$$

解出 $q(y)$ 后仍可由单层位势表达式(1.2.17)得到原问题的解 u.

今假设 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界连续，即 $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]=0$，并利用辅助变量 $\varphi=[u]$. 此时由定理 1.1 给出

$$u(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y|\,\mathrm{d}s(x),\ y\in\Omega\cup\Omega' \tag{1.2.25}$$

由于它相应于在 Γ 上分布密度为 φ 的电偶极子矩在 $\mathbb{R}^2$ 中产生的电场，被称为双层位势.

考虑第一边值内问题，$u|_{\mathrm{int}\Gamma}=u_0$，作 u 在 Ω' 的延拓使 $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]=0$. 于是 u 有双层位势表达式(1.2.25). 可由定理 1.1 的式(1.2.11)得到联系 φ 和 u_0 的方程

$$\frac{1}{2}\varphi(y)+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y|\,\mathrm{d}s(x)=u(y_0) \tag{1.2.26}$$

这是 Γ 上的第二类 Fredholm 积分方程. 由式(1.2.26)解出 $\varphi(x)$ 后即可由式(1.2.25)得到解函数 u. 对于第一边值外问题，同样可得

$$-\frac{1}{2}\varphi(y)+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y|\,\mathrm{d}s(x)=u(y_0) \tag{1.2.27}$$

这也是 Γ 上的第二类 Fredholm 积分方程.

综上所述，对于二维区域 Ω 或 Ω' 内的调和方程的边值问题，有如下结果：