

编号: 0086

内部

科学技术成果报告

加筋圆柱曲板稳定性研究

科学技术文献出版社

毛主席语录

认识从实践始，经过实践得到了理论的认识，还须再回到实践去。认识的能动作用，不但表现于从感性的认识到理性的认识之能动的飞跃，更重要的还须表现于从理性的认识到革命的实践这一个飞跃。

目 录

加筋圆柱曲板整体稳定性分析	(1)
内容摘要.....	(1)
一、前言.....	(1)
二、符号.....	(2)
三、基本方程.....	(4)
四、基本方程的解.....	(7)
五、均匀轴压.....	(12)
六、均匀剪力.....	(20)
七、均匀轴压和均匀剪力联合作用.....	(30)
附录.....	(33)
参考文献.....	(43)
纵向离散加筋曲板的轴压稳定性	(44)
内容摘要.....	(44)
一、前言.....	(44)
二、符号.....	(45)
三、基本假设.....	(48)
四、屈曲平衡方程.....	(49)
五、均匀轴压下的临界载荷计算与讨论.....	(56)
附录.....	(62)
参考文献.....	(67)
纵向加筋圆柱曲板的轴压稳定实验	(68)
内容摘要.....	(68)
一、前言.....	(68)
二、试件和实验方法.....	(69)
三、实验现象的分析.....	(70)
四、实验结果和讨论.....	(77)
五、结论.....	(79)

参考文献.....(79)

横向离散加筋纵向密加筋圆柱曲板的轴压稳定性.....(82)

 内容摘要.....(82)

 一、前言.....(82)

 二、符号.....(84)

 三、基本假设.....(87)

 四、屈曲平衡方程.....(88)

 五、均匀轴压下的临界载荷计算与讨论.....(95)

 附录.....(100)

 参考文献.....(106)

纵向密加筋横向稀加筋圆柱曲板轴压稳定性实验.....(123)

 一、前言.....(123)

 二、试件.....(123)

 三、实验的边界条件和方法.....(126)

 四、实验结果.....(127)

 五、分析与讨论.....(133)

 参考文献.....(138)

加筋圆柱曲板稳定性研究

中国科学院力学研究所第十二研究室

加筋圆柱曲板整体稳定性分析

内 容 摘 要

本文讨论了加筋圆柱曲板在均匀轴压、均匀剪力以及均匀轴压和均匀剪力联合作用下的临界载荷计算,把加筋曲板当作各向异性曲板来处理,并考虑筋条位置偏心和筋条的抗扭刚度,采用线性理论,对各参数对临界载荷的影响进行了讨论,找出了影响临界载荷的主要参数,给出了适用于设计计算的曲线。文中还比较了四边简支加筋曲板和加筋圆柱壳的轴压临界载荷,表明对于边长比 $\beta \geq 1$ 的情况,在一定的条件下,曲板的直边边界条件对临界载荷的影响可以忽略。

一、前 言

加筋结构〔注1〕在航空中有着很广泛的应用。关于加筋圆柱壳的稳定性问题,许多研究者进行了大量的工作。特别是,近年来, Van der Neut〔1〕在1947年指出的筋条位置偏心对确定加筋圆柱壳的临界载荷的重要性引起了普遍的重视,在这方面发表了大量的研究报告。加筋圆柱壳的稳定性计算一般采用线性理论〔2—7〕,实验研究〔8—12〕表明,在一般情况下,对加筋圆柱壳,线性理论给出的临界载荷和实验结果符合是良好的。对于加筋圆柱曲板的稳定性计算,发表的资料很少, Batdorf等〔13—15〕计算了纵向或横向有一根筋条的圆柱曲板在均匀轴压或均匀剪切作用下的临界载荷。〔注2〕

本文讨论加筋圆柱曲板在均匀轴压、均匀剪力以及均匀轴压和均匀剪力联合作用下的临

〔注1〕:这里“加筋结构”一词,泛指铆接结构,胶接结构和整体结构(包括化铣、机械铣切或挤压成型而成的结构)本文的计算对上述工艺的加筋曲板都是适用的。

〔注2〕:在本工作进行过程中,我们看到了Simites发表的报告〔16〕。

界载荷计算,把加筋曲板当作各向异性曲板来处理,并考虑筋条位置的偏心和筋条的抗扭刚度,采用线性理论。

关于筋条位置偏心对于临界载荷的影响,许多研究报告表明,对于加筋圆柱壳,其影响是很明显的,这方面的详细讨论和文献评述可参考〔6〕。对于加筋平板,〔17〕的研究表明,在一定的参数范围内,筋条位置偏心的影响可以忽略。本文对于纵向加筋曲板,讨论了筋条位置偏心的影响,计算表明,对于纵向加筋曲板,应考虑筋条位置偏心的影响,在纵向内加筋的情况下,不考虑偏心的影响,将给出偏高的结果。

因为加筋板(壳)的基本参数很多,给出加筋板(壳)的稳定性的设计曲线是很困难。为了简化加筋曲板的稳定性的计算,我们通过大量的计算,找出影响临界载荷的主要参数,给出了适用于设计计算的曲线。

文中讨论了加筋圆柱壳在均匀轴压作用下临界载荷的计算,计算表明,对 $\beta \geq 1$ 的纵向加筋曲板,在均匀轴压下的临界载荷(N_{cr})和同一截面形状,同一曲率半径,同一长度的纵向加筋圆柱壳在均匀轴压作用下的临界载荷相同。这也说明当 $\beta \geq 1$ 时四边简支加筋曲板中两直边对轴压临界载荷的影响可以忽略。

加筋曲板在均匀剪力或均匀剪力和均匀轴压联合作用下的临界载荷计算,最后化为求最大特征值问题,在电子计算机上进行计算时,我们对矩阵元素进行适当的排列,并采用自动选取主要项的程序,这样用较低阶的矩阵就能得到较高的精确度。和〔16〕的计算方法相比,本文的计算方法,取较少的项,能得到更高的精确度。

本文的大量计算是针对纵向加筋的圆柱曲板进行的,但基本方程和计算方法对于一般的加筋曲板都是适用的。

二、符 号

$B_x, B_y, B_{xy}, C_{xy}, D_x, D_y,$	加筋板的基本参数
$D_{xy}, D_k, f_{xx}, f_{yx}, f_{xy}, f_{yy}, f_k$	
E	面板和筋条材料的杨氏模量
G	面板和筋条材料的剪切模量
μ	面板和筋条材料的泊桑系数
t	加筋板面板厚度
b	加筋曲板曲边长

l	加筋曲板直边长
R	加筋曲板曲率半径
W	面板中面上一点沿 z 方向的位移
φ	应力函数
N_x, N_y, N_{xy}	面板中面的内力
M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}	面板中面的内力矩
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \tau_{xy}$	面板中面的应变
N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0	失稳前中面的内力
N_1	均匀轴压
S	均匀剪力

无量纲参数

$$\beta = \frac{b}{l}$$

$$\eta_x = \frac{D_x}{D_y}$$

$$\eta_y = \frac{D_{xy} + 2D_k}{D_y}$$

$$\delta = \frac{D_{xy} + 2D_k}{D_x} - \frac{D_y}{D_x}$$

$$e_x = f_{xy} \sqrt{\frac{B_y}{D_y}}$$

$$e_y = (f_{xx} + f_{yy} - 2f_k) \sqrt{\frac{B_y}{D_y}}$$

$$e_z = f_{yx} \sqrt{\frac{B_y}{D_y}}$$

$$K_4 = \frac{e_y}{\sqrt{\eta_x}}$$

$$\theta_{xy} = \left(\frac{2}{B_{xy}} - \frac{1}{C_{xy}} \right) B_y$$

$$\theta_y = \frac{B_y}{B_x}$$

$$K_2 = \frac{l^2}{R\pi^2} \sqrt{\frac{B_y}{D_y}}$$

$$k_N = \frac{l^2 N_1}{D_y \pi^2}$$

$$k_c = \frac{l^2 N_2}{D_y \pi^2}$$

$$k_s = \frac{l^2 S}{D_y \pi^2}$$

算子符号

$$\nabla^2: \quad \nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\nabla^4: \quad \nabla^4 w = \nabla^2 (\nabla^2 w)$$

$$\nabla^8: \quad \nabla^8 w = \nabla^4 (\nabla^4 w)$$

$$\nabla_f^4: \quad \nabla_f^4 w = \left[\eta_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \eta_{xy} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w$$

$$\Delta_f^4: \quad \nabla_f^4 w = \left[f_{xy} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (f_{xx} + f_{yy} - 2f_k) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + f_{yx} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w$$

$$\nabla_\theta^4: \quad \Delta_\theta^4 w = \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \theta_{xy} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \theta_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w$$

$$\nabla_\theta^{-4}: \quad \nabla_\theta^{-4} (\nabla_\theta^4 w) = w$$

三、基本方程

考虑双向密筋加强的圆柱形曲板，取曲板的中面为 xy 平面， z 轴垂直于 xy 平面指向曲率中心。（如图 1 所示）

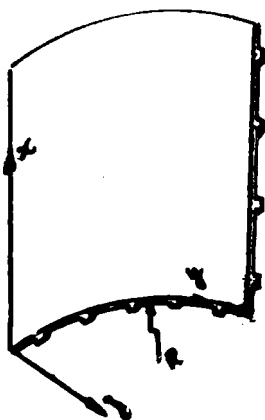


图 1

我们采用如下假设：

1. 筋条比较密，能把加筋曲板当作一正交各向异性曲板来处理〔注〕

2. 薄壳：曲板厚度 t 和半径 R 相比很小。

3. 扁壳：采用扁壳方程

4. 线性理论

5. 弹性：假定应力不超过比例极限。

在计算中我们考虑了筋条偏心的影响和筋条的扭转刚度的影响。

对于正交各向异性板，考虑弯曲和拉压、扭转和面向剪切的偶合关系，广义力和广义位移一般有下列关系：

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ N_x \\ N_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D'_x & D'_{xy} & F_x & F_{xy} \\ D'_{xy} & D'_y & F_{yx} & F_y \\ F_x & F_{yx} & A_x & A_{xy} \\ F_{xy} & F_y & A_{xy} & A_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

注：在什么情况下，加筋曲板可作为各向异性曲板来处理，见本报告第二篇“纵向离散加筋曲板的轴压稳定性”。

$$\begin{Bmatrix} H \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D'_k & F_k \\ F_k & C_{xy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

在下面的分析中，我们以 w 和应力函数 ϕ 为变量，所以将 (3.1) 改写成：

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_x & D_{xy} & f_{xx} & f_{xy} \\ D_{xy} & D_y & f_{yx} & f_{yy} \\ -f_{xy} & -f_{yx} & \frac{1}{B_x} & \frac{1}{B_{xy}} \\ -f_{xy} & -f_{yy} & \frac{1}{B_{xy}} & \frac{1}{B_y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ N_x \\ N_y \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\begin{Bmatrix} H \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_k & f_k \\ -f_k & \frac{1}{C_{xy}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}$$

其中 w 是面板中面上一点沿 z 方向的位移， $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 为面板中面的应变， $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$ 为中面的内力和内力矩，其正向如图 2 所示。而 $H = \frac{1}{2}(M_{xy} + M_{yx})$ 。式中 $D_x, D_{xy}, D_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, B_x, B_{xy}, B_y, D_k, C_{xy}, f_k$ 为加筋板的基本参数，

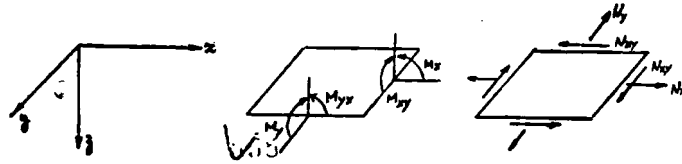


图 2

关于基本参数的讨论见附录 1。

把 (3.2) 写成展开形式，即

$$M_x = -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - f_{xx} N_x + f_{xy} N_y$$

$$M_y = -D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_{yx} N_x + f_{yy} N_y$$

$$\varepsilon_x = f_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{N_x}{B_x} + \frac{N_y}{B_{xy}} \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_y = f_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{N_x}{B_x} + \frac{N_y}{B_y}$$

$$H = -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f_k N_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = 2f_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{C_{xy}} N_{xy}$$

引入应力函数 φ

$$N_x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (3.3)$$

代入 (3.2)

$$M_x = -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - f_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - f_{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$M_y = -D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - f_{yx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - f_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_x = f_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{B_x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{B_{xy}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = f_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{B_{xy}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{B_y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

$$H = -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xy} = 2f_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{C_{xy}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

将 (3.4) 代入平衡方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (3.5)$$

和协调方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.6)$$

(其中 N_x^0 , N_y^0 , N_{xy}^0 为失稳前 (无矩状态) 的中面内力)

就得到加筋圆柱曲板 (圆柱壳) 稳定问题的基本方程:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{xy} + 2D_k) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + f_{xy} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (f_{xx} + f_{yy} - 2f_k) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + f_{yx} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^2} = N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{B_y} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \left(\frac{2}{B_{xy}} + \frac{1}{C_{xy}} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - \left[f_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (f_{xx} + f_{yy} - 2f_k) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + f_{yx} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.7)$$

引入无量纲参数:

$$\eta_x = \frac{D_x}{D_y}, \quad \eta_y = \frac{D_{xy} + 2D_k}{D_y}, \quad \theta_{xy} = \left(\frac{2}{B_{xy}} + \frac{1}{C_{xy}} \right) B_y, \quad \theta_y = \frac{B_y}{B_x} \quad (3.8)$$

并记

$$\begin{aligned} \nabla_+^4 w &= \left[\eta_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\eta_y \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w \\ \nabla_f^4 w &= \left[f_{xy} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (f_{xx} + f_{yy} - 2f_k) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + f_{yx} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w \\ \nabla_\theta^4 w &= \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \theta_{xy} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \theta_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w \end{aligned} \quad (3.9)$$

这样方程 (3.7) 可写成:

$$\begin{aligned} \nabla_+^4 w + \frac{1}{D_y} \left[\nabla_f^4 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \varphi &= \frac{1}{D_y} \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ \nabla_\theta^4 \varphi - B_y \left[\nabla_f^4 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] w &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

对 (3.10) 的第一个方程作用微分算子 ∇_θ^4 , 对第二个方程作用微分算子 ∇_+^4 , 则可消去 φ , (3.10) 合并成一个方程:

$$\begin{aligned} \nabla_\theta^4 \nabla_+^4 w + \frac{B_y}{D_y} \left[\nabla_f^4 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]^2 w &= \frac{1}{D_y} \nabla_\theta^4 \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

四、基本方程的解

四边简支加筋曲板临界载荷的计算公式, 考虑图 3 所示的四边简支加筋曲板, 曲边长为

b, 直边长为l, 曲率半径为R, 若曲板受不均匀轴压和剪力的联合作用(图3)则

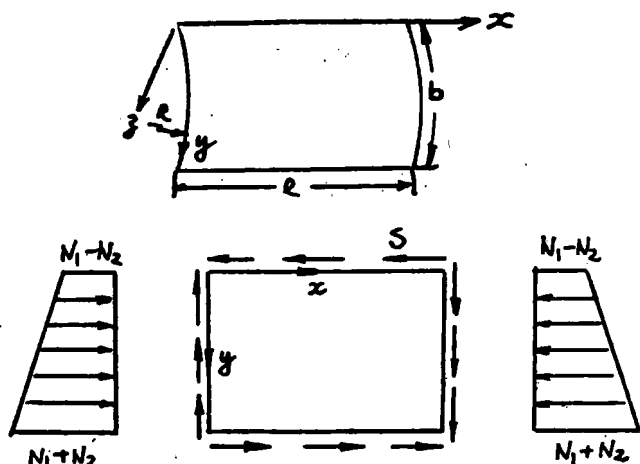


图 3

$$N_x^0 = - \left[N_1 + N_2 \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \right]$$

$$N_y^0 = 0 \quad (4.1)$$

$$N_{xy}^0 = S$$

边界条件:

$$\text{当 } x=0 \text{ 或 } x=l$$

$$W=V=N_x=0 \quad (4.2)$$

$$M'_y = M_x - f_{xx}N_x$$

$$-f_{xy}N_y = 0$$

$$\text{当 } y=0 \text{ 或 } y=b$$

$$W=U=N_y=0 \quad (4.3)$$

$$M'_y = M_y - f_{yx}N_x - f_{yy}N_y = 0$$

其中 M'_x 和 M'_y 为相对于加筋板形心面的内力矩。

设位移函数:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.4)$$

则满足边界条件 (4.2) 和 (4.3)

为了运算方便, 把方程 (3.11) 改写成:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w + \frac{B_y}{D_y} \nabla^4 \left[\nabla^4 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]^2 w - \frac{1}{D_y} \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

记:

$$\begin{aligned} k_N = \frac{l^2 N_1}{D_y \pi^2}, \quad k_C = \frac{l^2 N_2}{D_y \pi^2}, \quad k_S = \frac{l^2 S}{D_y \pi^2} \\ \sqrt{\frac{B_y}{D_y}} f_{xy} = e_x, \quad \sqrt{\frac{B_y}{D_y}} (f_{xx} + f_{yy} - 2f_k) = e_y, \quad f_{yx} \sqrt{\frac{B_y}{D_y}} = e_z \quad (4.6) \\ \sqrt{\frac{B_y}{D_y}} \frac{l^2}{R \pi^2} = K_2, \quad \beta = \frac{b}{l} \end{aligned}$$

把 (4.1), (4.4) 代入 (4.5) 并用 (4.6) 引入的记号, 得到:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\eta_x m^4 \beta^4 + 2\eta_y m^2 n^2 \beta^2 + n^4 + \frac{[(e_x m^4 \beta^4 + e_y m^2 n^2 \beta^2 + e_z n^4) - k_2 m^2 \beta^4]^2}{m^4 \beta^4 + \theta_{xy} m^2 n^2 \beta^2 + \theta_y n^4} \right. \\
& \quad \left. - m^2 \beta^4 k_N \right] \times A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} - \\
& \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_{mq} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{q\pi y}{b} \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) k_c m^2 \beta^4 - \\
& \quad \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} 2 A_{pq} \cos \frac{p\pi x}{l} \cos \frac{q\pi y}{b} k_s p q \beta^3 = 0 \quad (4.7)
\end{aligned}$$

把 $\sin \frac{q\pi y}{b} \left(\frac{2y}{b} - 1 \right)$ 展成 $\sum_{n=1}^{\infty} F_{nq} \sin \frac{n\pi y}{b}$

则:

$$\begin{aligned}
F_{nq} &= \frac{2}{b} \int_0^b \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \sin \frac{q\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
F_{nq} &= \begin{cases} -\frac{16nq}{\pi^2(n^2 - q^2)} & n \pm q \text{ 为奇数} \\ 0 & n \pm q \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

把 $\cos \frac{p\pi x}{l} \cos \frac{q\pi y}{b}$ 展成 $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mnpq} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b}$

则:

$$\begin{aligned}
H_{mnpq} &= \frac{4}{lb} \int_0^l \int_0^b \cos \frac{p\pi x}{l} \cos \frac{q\pi y}{b} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\
&= \begin{cases} \frac{16mn}{\pi^2(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} & m \pm p \text{ 和 } n \pm q \text{ 为奇数} \\ 0 & m \pm p \text{ 或 } n \pm q \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

把 (4.8), (4.9) 代入 (4.7), 并令

$$\begin{aligned}
\alpha_{mn} &= \eta_x m^4 \beta^4 + 2\eta_y m^2 n^2 \beta^2 + n^4 + \frac{[(e_x m^4 \beta^4 + e_y m^2 n^2 \beta^2 + e_z n^4) - K_4 m^2 \beta^4]^2}{m^4 \beta^4 + \theta_{xy} m^2 n^2 \beta^2 + \theta_y n^4} \\
& \quad - m^2 \beta^4 k_N \quad (4.10)
\end{aligned}$$

得到:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{16k_c \beta^4}{\pi^2} \right. \\
& \quad \left. \sum_{q=1}^{\infty} \frac{m^2 n q}{(n^2 - q^2)^2} A_{mq} \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{32k_s \beta^3}{\pi^2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)} A_{pq} \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \\
& \alpha_{mn} A_{mn} + \frac{16k_c \beta^4}{\pi^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{m^2 n q}{(n^2 - q^2)^2} A_{mq} - \\
& \quad (n \pm q \text{ 为奇数}) \\
& - \frac{32k_c \beta^3}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} A_{pq} = 0 \quad (4.11) \\
& \quad (m \pm p \text{ 和 } n \pm q \text{ 为奇数}) \\
& \quad (m=1, 2, \dots, \infty, n=1, 2, \dots, \infty)
\end{aligned}$$

令:

$$\begin{aligned}
\frac{16k_c \beta^3}{\pi^2} &= \frac{1}{\lambda_c} \\
\frac{32k_s \beta^3}{\pi^2} &= \frac{1}{\lambda_s} \\
\rho &= \frac{2\lambda_s}{\lambda_c} = \frac{k_c}{k_s} = \frac{N_2}{S} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$X_{mn} = \sqrt{\alpha_{mn}} A_{mn}$$

$$\begin{aligned}
B_{mnpq} &= \begin{cases} \frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)\sqrt{\alpha_{mn}}\sqrt{\alpha_{pq}}} & m \pm p \text{ 和 } n \pm q \text{ 为奇数} \\ 0 & m \pm p \text{ 或 } n \pm q \text{ 为偶数} \end{cases} \\
C_{mnq} &= \begin{cases} \frac{m^2 n q}{(n^2 - q^2)^2 \sqrt{\alpha_{mn}} \sqrt{\alpha_{pq}}} & n \pm q \text{ 为奇数} \\ 0 & n \pm q \text{ 为偶数} \end{cases}
\end{aligned}$$

则 (4.11) 可写成

$$\begin{aligned}
X_{mn} - \frac{1}{\lambda_s} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} B_{mnpq} X_{pq} + \frac{\beta}{\lambda_c} \sum_{q=1}^{\infty} C_{mnq} X_{mq} &= 0 \quad (4.13) \\
(m=1, 2, \dots, \infty, n=1, 2, \dots, \infty)
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
X_{mn} - \frac{1}{\lambda_s} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} B_{mnpq} X_{pq} - \frac{\beta \rho}{2} \sum_{q=1}^{\infty} C_{mnq} X_{mq} \right] &= 0 \quad (4.14) \\
(m=1, 2, \dots, \infty, n=1, 2, \dots, \infty)
\end{aligned}$$

令

$$D_{mnpq} = \begin{cases} C_{mnq} & p=m \\ 0 & p \neq m \end{cases} \quad (4.15)$$

$$E_{mnpq} = B_{mnpq} - \frac{\rho\beta}{2} D_{mnpq}$$

则 (4.14) 可写成:

$$\lambda_s X_{mn} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} E_{mnpq} X_{pq} \quad (4.16)$$

$$(m=1, 2, \dots, \infty, n=1, 2, \dots, \infty)$$

这样把求临界载荷的问题, 化为解特征值问题 (4.16), 若给定一组 k_n 和 ρ , 通过解特征值问题 (4.16), 求出最大特征值, 并由 (4.12) 求得临界载荷系数 k_s 。用这个方法, 可以求得四边简支加筋曲板在不均匀轴压和剪切联合作用下的临界载荷的相关曲线。

下面讨论几种特殊情况

1. 均匀轴压

$$N_2 = S = 0$$

由方程 (4.11) 得到

$$\alpha_{mn} = 0$$

由 (4.10) 即

$$\eta_x m^4 \beta^4 + 2 \eta_y m^2 n^2 \beta^2 + n^4 + \frac{[e_x m^4 \beta^4 + e_y m^2 n^2 \beta^2 + e_z n^4 - k_2 m^2 \beta^4]^2}{m^4 \beta^4 + \theta_{xy} m^2 n^2 \beta^2 + \theta_y n^4} -$$

$$- m^2 \beta^4 k_n = 0$$

$$(m=1, 2, \dots, \infty, n=1, 2, \dots, \infty)$$

$$k_{N_{cr}} = \frac{1}{m^2 \beta^4} \left[\eta_x m^4 \beta^4 + 2 \eta_y m^2 n^2 \beta^2 + n^4 + \frac{[e_x m^4 \beta^4 + e_y m^2 n^2 \beta^2 + e_z n^4 - k_2 m^2 \beta^4]^2}{m^4 \beta^4 + \theta_{xy} m^2 n^2 \beta^2 + \theta_y n^4} \right] \quad (4.17)$$

$$(m=1, 2, \dots, \infty, n=1, 2, \dots, \infty)$$

选取 m, n 使上式得最小值

再由 (4.6) 得到

$$N_{cr} = k_{N_{cr}} \frac{D_y \pi^2}{l^2} \quad (4.18)$$

2. 均匀轴压和均匀剪力联合作用

$$N_2 = 0$$

由方程 (4.14)

$$\lambda_s x_{mn} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} B_{mnpq} x_{pq} \quad (4.19)$$

$$(m=1, 2, \dots, \infty, n=1, 2, \dots, \infty)$$

求出最大特征值 λ_s , 再由 (4.12) 和 (4.6) 求得

$$k_s = \frac{\pi^2}{32\beta^3} \frac{1}{\lambda_s} \quad (4.20)$$

$$S = k_s \frac{D_y \pi^2}{l^2} \quad (4.21)$$

若只有均匀剪力作用, 则在 (4.19) 的 α_{mn} 中取 $k_m = 0$ 。

3. 不均匀轴压

$$S = 0$$

令方程 (4.13) 中 $\frac{1}{\lambda_s} = 0$, 得到

$$\lambda_c X_{mn} + \beta \sum_{q=1}^{\infty} C_{mnq} X_{mq} = 0 \quad (4.22)$$

$$(m=1, 2, \dots, \infty, n=1, 2, \dots, \infty)$$

求出最大特征值 λ_s , 再由 (4.12) 和 (4.6) 求得

$$k_c = \frac{\pi^2}{16\beta^3 \lambda_c} \quad (4.23)$$

$$N_c = k_c \frac{D_y \pi^2}{l^2} \quad (4.24)$$

五、均 匀 轴 压

1. 四边简支纵向加筋曲板在均匀轴压作用下的临界载荷

第四节已推得四边简支加筋曲板在均匀轴压作用下的临界载荷计算公式 (4.17), (4.18)

$$k_{N_{cr}} = \frac{1}{m^2 \beta^4} \left[\eta_x m^4 \beta^4 + 2\eta_y m^2 n^2 \beta^2 + n^4 + \frac{[(e_x m^4 \beta^4 + e_y m^2 n^2 \beta^2 + e_z n^4 - K_2 m^2 \beta^4)^2]}{m^4 \beta^4 + \theta_{xy} m^2 n^2 \beta^2 + \theta_y n^4} \right]$$

$$(m=1, 2, \dots, \infty, n=1, 2, \dots, \infty) \quad (5.1)$$

$$N_{cr} = k_{N_{cr}} \frac{D_y \pi^2}{l^2} \quad (5.2)$$

选取 m 、 n 使 (5.1) 得最小值

由附录 1，对于纵向加筋曲板

$$e_z = 0, e_x = -\mu e_y \quad (5.3)$$

为了计算方便，引入表示筋条抗扭刚度的参数 δ 来代替 η_y

$$\eta_y = 1 + \delta \eta_x \quad (5.4)$$

若不考虑筋条抗扭刚度的影响，则 $\delta = 0$

把 (5.3) 和 (5.4) 代入 (5.1) 得到：

$$k_{N_{cr}} = \frac{1}{m^2 \beta^4} \left[\eta_x m^4 \beta^4 + 2(1 + \delta \eta_x) m^2 n^2 \beta^2 + n^4 + \frac{(e_y(-\mu m^4 \beta^4 + m^2 n^2 \beta^2) - k_2 m^2 \beta^4)^2}{m^4 \beta^4 + \theta_{xy} m^2 n^2 \beta^2 + \theta_y n^4} \right] \\ (m=1, 2, \dots, \infty, n=1, 2, \dots, \infty) \quad (5.5)$$

计算表明，对于纵向加筋曲板，在一般情况下，当 $m=1$ 时 k_N 得最小值，在 (5.5) 中令 $m=1$ ，

并令

$$g = \frac{n}{\beta} \quad (5.6)$$

得到：

$$k_{N_{cr}} = \eta_x + 2(1 + \delta \eta_x) g^2 + g^4 + \frac{(e_y(-\mu + g^2) - k_2)^2}{1 + \theta_{xy} g^2 + \theta_y g^4} \quad (5.7)$$

$$\left(g = \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \frac{3}{\beta}, \dots, \frac{n}{\beta}, \dots \right)$$

选取 n 使 (5.7) 得最小值，如 n 比较大，则可认为 g 是连续的，这样使 (5.7) 取最小值的条件是

$$\frac{\partial(k_{N_{cr}})}{\partial(g^2)} = 0 \quad (5.8)$$

把 (5.7) 代入 (5.8) 得到

$$K_2 = e_y(-\mu + g^2) - \frac{e_y(1 + \theta_{xy} g^2 + \theta_y g^4)}{\theta_{xy} + 2\theta_y g^2} + \\ + \frac{e_y^2(1 + \theta_{xy} g^2 + \theta_y g^4)^2}{(\theta_{xy} + 2\theta_y g^2)^2} + \frac{2(1 + \theta_{xy} g^2 + \theta_y g^4)^2(1 + \delta \eta_x + g^2)}{(\theta_{xy} + 2\theta_y g^2)} \quad (5.9)$$