奇异摄动丛书 2

奇异摄动边界层和内层理论

刘树德　鲁世平　姚静荪　陈怀军　著

科学出版社

奇异摄动丛书 2

奇异摄动边界层和内层理论

刘树德　鲁世平　姚静荪　陈怀军 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

奇异摄动问题的边界层和内层理论主要介绍常微分方程、泛函微分方程和偏微分方程的初值、边值问题的解所出现的初始层、边界层和内层现象. 利用伸长变量、匹配原理、多重尺度、合成展开等方法构造问题的形式渐近解, 以及引用极值原理、能量积分、先验估计、上下解理论和不动点原理等理论证明了相关渐近解的一致有效性.

本书可供数学、力学、物理学以及其他学科和工程技术方面的研究人员、高等院校教师、本科高年级学生和研究生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

奇异摄动边界层和内层理论/刘树德等著. —北京: 科学出版社, 2012

(奇异摄动丛书/张伟江主编)

ISBN 978-7-03-033366-7

Ⅰ.①奇… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①摄动-研究 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 007166 号

责任编辑: 王丽平 房 阳 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 耕 者

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2012 年 1 月第一次印刷 印张: 10 1/2

字数: 194 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《奇异摄动丛书》序言

科学家之所以受到世人的尊敬, 除了因为世人都享受到了科学发明的恩惠之外, 还因为人们为科学家追求真理的执着精神而感动. 而数学家又更为世人所折服, 能在如此深奥、复杂、抽象的数学天地里遨游的人着实难能可贵, 抽象的符号、公式、推理和运算已成了当今所有学科不可缺少的内核了, 人们在享受各种科学成果时, 同样也在享受内在的数学原理与演绎的恩泽. 奇异摄动理论与应用是数学和工程融合的一个奇葩, 它出人意料地涉足许多无法想象的奇观, 处理人们原来常常忽略却又无法预测的奇特. 于是其名字也另有一问, 为 "奇异摄动"(Singular Perturbation).

20 世纪 40 年代, 科学先驱钱伟长等已对奇异摄动作了许多研究, 并成功地应用于力学等方面. 20 世纪 50 年代后, 中国出现了一大批专攻奇异摄动理论和应用的学者, 如著名的学者郭永怀, 在空间技术方面作出了巨大贡献, 苏煜城教授留苏回国后开创我国奇异摄动问题的数值计算研究, 美国柯朗研究所、美籍华裔丁汝教授在 1980 年间奔波上海、西安、北京, 讲授奇异摄动理论及应用 ……1979 年, 钱伟长教授发起并组织在上海召开了 "全国第一次奇异摄动讨论会".

可贵的是坚韧. 此后, 虽然起起伏伏, 但是开拓依旧. 2005 年 8 月在上海交通大学、华东师范大学、上海大学组织下, 我们又召开了 "全国奇异摄动学术研讨会", 并且一发而不可止. 此后每年都召开全国性学术会议, 汇集国内各方学者研究讨论. 2010 年 6 月在中国数学会、上海市教委 E- 研究院和上海交通大学支持下, 在上海召开了世界上第一次 "奇异摄动理论及其应用国际学术大会". 该领域国际权威人士 Robert O'Malley(华盛顿大学), John J H Miller(爱尔兰 Trinity 学院) 等都临会, 并作学术报告.

更可喜的是经过学者们的努力, 在 2007 年 10 月, 中国数学会批准成立中国数学会奇异摄动专业委员会, 学术研究与合作的旗帜终于在华夏大地飘起.

难得的是慧眼识英雄. 科学出版社王丽平同志敏锐地觉察到了奇异摄动方向的成就和作用, 将出版奇异摄动丛书一事提到了议事日程, 并立刻得到学者们的赞同. 于是, 本丛书中的各卷将陆续呈现于读者面前.

作序除了简要介绍一下来历之外, 更是想表达对近七十年来中国学者们在奇异摄动理论和应用方面所作出巨大贡献的敬意. 中国科技创新与攀登少不了基础理

论的支持, 更少不了坚持不懈精神的支撑.

但愿成功!

张伟江博士

中国数学会奇异摄动专业委员会理事长

2011 年 11 月

前　　言

本书是《奇异摄动丛书》的一本分册，是在《奇异摄动丛书》编委会的统一安排和指导下进行编写的.

本书主要讨论常微分方程、泛函微分方程和偏微分方程的初值、边值问题的解所出现的初始层、边界层和内层现象. 利用伸长变量、匹配原理、多重尺度、合成展开等方法构造问题的形式渐近解，以及引用极值原理、能量积分、先验估计、上下解理论和不动点原理等理论证明了相关渐近解的一致有效性.

本书共分 6 章，第 1 章介绍边界层函数法; 第 2 章涉及常微分方程中定解问题的边界层解的渐近表示式; 第 3 章讨论内层解的渐近表示式; 第 4 章介绍泛函微分方程的基本概念及其有关的边界层解; 第 5 章讨论偏微分方程定解问题中的边界层和内部层解; 第 6 章是介绍几个有关边界层和内层解的实际应用方面的实例. 第 1~3 章主要由刘树德教授撰写; 第 4 章主要由鲁世平教授撰写; 第 5, 6 章主要由姚静荪教授和陈怀军副教授撰写. 编写组成员始终在共同的目标下相互关心，团结一致，尽心尽力地认真进行编写工作.

在本书的撰写过程中，一直受到安徽师范大学校方和有关部门，以及数学计算机科学学院的领导和全体教职工的关心和支持. 感谢莫嘉琪教授对本书的撰写所作的贡献. 特别感谢科学出版社王丽平老师对本书出版的关心和支持.

由于本书撰写人员的水平有限，疏漏和不足之处在所难免，恳请各界同仁提出批评意见.

作者
安徽师范大学
2011 年 11 月

目　　录

第1章　绪　　论

在工程技术和科学问题的应用领域中, 会出现各类边界层和内层现象. 例如, 与内壁毗连的黏性边界层, 接近均匀负载薄壳建筑物受到影响的边缘层, 因热造成的热流边界层, 可压缩气体动力学中的内激波层, 嵌入处理半导体杂物扩散的内杂质层, 热量与质量转换的反应层以及出现在电流、悬浮流等耦合物理问题中的层现象等. 由于问题的非线性、非均匀性和边界条件的一般性, 人们通常只能求其近似分析解, 而各种摄动方法则是求近似分析解的有力手段. 通过对边界层或内层的构造, 往往能看出其中物理参数对解的影响, 有助于弄清解的解析结构, 更重要的是能够提供准确的近似解, 甚至还能启示一条改善数值解的途径.

有许多方法可用于处理边界层和内层问题, 其中包括界定函数法、匹配渐近展开法、多尺度方法和合成展开法等. 下面通过例子来阐释构造奇异摄动问题渐近解的几种常用方法.

1.1　界定函数法

考虑一阶微分方程的初值问题

$$x' = f(t,x), \quad x(a) = A, \tag{1.1.1}$$

其中函数 $f(t,x)$ 在区域 $[a,b]\times\mathbf{R}$ 上连续且有界. 根据解的存在性定理及延拓定理可知, 初值问题 (1.1.1) 的解 $x=\varphi(t)$ 在整个区间 $[a,b]$ 上存在. 进一步, 为了给出 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上的一个估计, 可以应用一阶微分不等式理论. 由比较定理[1] 容易推出如下引理:

引理 1.1.1　设函数 $\alpha(t),\beta(t)\in C^1[a,b]$ 且 $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$, 函数 $f(t,x)$ 在区域 $a\leqslant t\leqslant b, \alpha(t)\leqslant x\leqslant\beta(t)$ 上连续. 若 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 在 $[a,b]$ 上分别满足微分不等式

$$\alpha'(t)\leqslant f(t,\alpha(t))$$

和

$$\beta'(t)\geqslant f(t,\beta(t)),$$

则对任何满足 $\alpha(a)\leqslant A\leqslant\beta(a)$ 的常数 A, 初值问题 (1.1.1) 在区间 $[a,b]$ 上总有一个解 $x=x(t)$, 并成立不等式

$$\alpha(t)\leqslant x\leqslant\beta(t).$$

把 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 称为初值问题 (1.1.1) 的一对界定函数, 这种确定解的存在性并对解作出估计的方法称为界定函数法或上下解方法.

下面用界定函数法来讨论奇异摄动一阶微分方程的初值问题

$$\varepsilon x' = f(t, x, \varepsilon), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{1.1.2}$$

$$x(0, \varepsilon) = x_0, \tag{1.1.3}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为小参数,$x_0 > 0, T > 0$ 为常数. 假设

(H_1) 在 $(0, T]$ 上, $f(t, 0, 0) \equiv 0$, 并且存在正常数 l, 使得

$$0 \leqslant f(t, 0, \varepsilon) < l\varepsilon;$$

(H_2) 函数 $f(t, x)$ 在 $[a, b] \times \mathbf{R}$ 上对 t 连续, 对 x 具有 $n(n \geqslant 1)$ 阶连续的导数, 并且存在正常数 $k > 0$, 使得

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t, 0, \varepsilon) \leqslant 0, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

及

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(t, x, \varepsilon) \leqslant -k < 0.$$

在上述假设下, 显然, 退化方程

$$f(t, u, 0) = 0$$

有零解 $u = 0\ (0 < t \leqslant T)$. 若取界定函数 $\alpha(t, \varepsilon) = 0\ (0 \leqslant t \leqslant T)$, 则

$$\varepsilon\alpha' - f(t, \alpha, \varepsilon) = -f(t, 0, \varepsilon) \leqslant 0.$$

于是只要选取界定函数 $\beta(t, \varepsilon) > 0$, 使得

$$\varepsilon\beta' - f(t, \beta, \varepsilon) \geqslant 0, \quad \beta(0, \varepsilon) \geqslant x_0. \tag{1.1.4}$$

当 $n = 1$ 时, 可取 $\beta(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) + r_1\varepsilon$, 其中 $r_1 > 0$ 为待定常数. 由于

$$\begin{aligned}\varepsilon\beta' - f(t, \beta, \varepsilon) =& \varepsilon\beta' - f(t,\ 0,\ \varepsilon) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,\ \theta_1\beta, \varepsilon)\\ \geqslant& \varepsilon\beta' - l\varepsilon + k\beta = \varepsilon v' + kv + (kr_1 - l)\varepsilon, \quad 0 < \theta_1 < 1,\end{aligned}$$

若令 $\varepsilon v' + kv = 0$, 使得 $v(0,\ \varepsilon) = x_0$, 即 $v(t,\ \varepsilon) = x_0 \exp\left(-\dfrac{kt}{\varepsilon}\right)$, 则只要取 $r_1 \geqslant \dfrac{l}{k}$, 就使 (1.1.4) 成立.

当 $n > 1$ 时, 可取 $\beta(t,\ \varepsilon) = v(t,\ \varepsilon) + (r_2\varepsilon)^{1/n}$, 其中 $r_2 > 0$ 为待定常数. 由于

$$\varepsilon\beta' - f(t, \beta, \varepsilon) = \varepsilon\beta' - f(t,\ 0, \varepsilon) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,\ 0, \varepsilon)\beta - \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}(t,\ 0,\varepsilon)\beta^{\,n-1}-\frac{1}{n\,!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,\theta_2\beta,\varepsilon)\beta^n\\
\geqslant&\varepsilon\beta'-l\varepsilon+\frac{k}{n\,!}\beta^{\,n}\\
\geqslant&\varepsilon v'+\frac{k}{n\,!}v^n+\left(\frac{kr_2}{n\,!}-l\right)\varepsilon,\quad 0<\theta_2<1,
\end{aligned}
$$

若令 $\varepsilon v'+\frac{k}{n\,!}v^n=0$, 使得 $v(0,\varepsilon)=x_0$, 可解出

$$
v(t,\varepsilon)=x_0\left[1+\frac{k(n-1)x_0^{n-1}t}{\varepsilon n\,!}\right]^{-\frac{1}{n-1}},
$$

则只要取 $r_2\geqslant\frac{l}{k}n\,!$, 就使 (1.1.4) 成立.

于是得到如下定理:

定理 1.1.1 在 (H_1) 和 (H_2) 的假设下, 初值问题 (1.1.2), (1.1.3) 在区间 $[0,\ T]$ 上存在一个解 $x=x(t,\varepsilon)$, 并且满足不等式

$$
0\leqslant x(t,\varepsilon)\leqslant v(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{\frac{1}{n}}),
$$

其中当 $n=1$ 时,

$$
v(t,\ \varepsilon)=x_0\ \exp\left(-\frac{kt}{\varepsilon}\right);
$$

当 $n>1$ 时,

$$
v(t,\varepsilon)=x_0\left[1+\frac{k(n-1)x_0^{n-1}t}{\varepsilon n\,!}\right]^{-\frac{1}{n-1}}.
$$

注 1.1.1 若退化方程 $f(t,\ u,\ 0)=0$ 有一个非平凡解 $u=u(t)$, 则通过变量替换 $y=x-u(t)$, 将问题化为

$$
\varepsilon y'=f(t,\ u(t)+y,\varepsilon)-\varepsilon u'(t),\quad 0<t\leqslant T,
$$

$$
y(0\,,\varepsilon)=x_0-u(0),
$$

使得

$$
F(t,y,\varepsilon)\equiv f(t,\ u(t)+y,\varepsilon)-\varepsilon\,u'(t)
$$

满足假设 (H_1) 和 (H_2), 并且使得 $x_0-u(0)>0$, 则相应于定理 1.1.1 的结论成立.

1.2 匹配渐近展开法

考虑两点边值问题

$$
\varepsilon x''+x'=2t+1,\quad 0<t<1, \tag{1.2.1}
$$

$$x(0, \varepsilon) = 1, \quad x(1, \varepsilon) = 0, \tag{1.2.2}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为小参数. 用匹配渐近展开法求其一致有效的渐近展开式.

因为 x' 的系数是正的, 所以可知边界层在 $x = 0$ 处. 寻求如下形式的外展开式:

$$x^{\mathrm{o}} = \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t)\varepsilon^j, \tag{1.2.3}$$

它应满足 (1.2.2) 中的第二个边界条件. 把 (1.2.3) 代入 (1.2.1) 和 $x(1, \varepsilon) = 0$, 并令 ε^0 的系数相等可得

$$x_0' = 2t + 1, \quad x_0(1) = 0.$$

于是

$$x_0 = t^2 + t - 2$$

且

$$x^{\mathrm{o}} = t^2 + t - 2 + \cdots.$$

为寻求内展开式, 在 (1.2.1) 中引进伸长变量 $\xi = \dfrac{t}{\varepsilon^\lambda}(\lambda > 0)$ 得到

$$\varepsilon^{1-2\lambda}\ddot{x} + \varepsilon^{-\lambda}\dot{x} = 2\varepsilon^\lambda\xi + 1,$$

其中 $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 分别表示 x 对 ξ 的一阶导数和二阶导数. 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 特异极限在 $\lambda = 1$ 时出现, 该方程写为

$$\ddot{x} + \dot{x} = 2\varepsilon^2\xi + \varepsilon. \tag{1.2.4}$$

设内展开式形式为

$$x^{\mathrm{i}} = \sum_{j=0}^{\infty} X_j(\xi)\varepsilon^j, \tag{1.2.5}$$

它必须满足 (1.2.2) 的第一个边界条件

$$x^{\mathrm{i}}(0, \varepsilon) = 1. \tag{1.2.6}$$

将 (1.2.5) 代入 (1.2.4) 和 (1.2.6), 并令 ε^0 的系数相等可得

$$\ddot{X}_0 + \dot{X}_0 = 0, \quad X_0(0) = 1.$$

于是

$$X_0 = 1 + C_0[1 - \exp(-\xi)]$$

且

$$x^{\mathrm{i}} = 1 + C_0[1 - \exp(-\xi)] + \cdots.$$

根据 Van Dyke 匹配原则[2] 来匹配 x^{o} 和 x^{i} 的 $O(1)$ 项. 由于

$$(x^{\mathrm{o}})^{\mathrm{i}} = -2, \quad (x^{\mathrm{i}})^{\mathrm{o}} = 1 + C_0,$$

故得 $-2 = 1 + C_0$, 从而定出 $C_0 = -3$. 由此构成一项复合展开式

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{c}} &= x^{\mathrm{o}} + x^{\mathrm{i}} - (x^{\mathrm{o}})^{\mathrm{i}} \\ &= t^2 + t - 2 + 3\exp(-\xi), \end{aligned}$$

所以

$$x(t,\varepsilon) = t^2 + t - 2 + 3\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + \cdots. \tag{1.2.7}$$

为了说明 (1.2.7) 的一致有效性, 求出问题 (1.2.1), (1.2.2) 的精确解, 得到

$$x(t,\varepsilon) = t^2 + (1-2\varepsilon)t + \frac{-2 + 2\varepsilon - \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + (3-2\varepsilon)\exp\left(-\dfrac{t}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

注意到当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ 为指数型小项 (记作 EST), 故上式可写为

$$x(t,\varepsilon) = t^2 + t - 2 + 3\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

可见, (1.2.7) 是精确解的一致有效的 $O(\varepsilon)$ 阶近似.

注 1.2.1 Van Dyke 匹配原则表述如下: n 项外展开式的 m 项内展开式等于 m 项内展开式的 n 项外展开式. 以本节的问题为例, 将一项外展开式和一项内展开式按如下程序进行匹配:

一项外展开式

$$x_0(t) = t^2 + t - 2,$$

用内变量改写为

$$x_0(\xi\varepsilon) = (\xi\varepsilon)^2 + \xi\varepsilon - 2,$$

对小的 ε 展开为

$$x_0(\xi\varepsilon) = -2 + \xi\varepsilon + \xi^2\varepsilon^2. \tag{1.2.8}$$

同样地, 一项内展开式

$$X_0(\xi) = 1 + C_0[1 - \exp(-\xi)].$$

用外变量改写为

$$X_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = 1 + C_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\right],$$

对小的 ε 展开为

$$X_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = 1 + C_0 + \mathrm{EST}. \tag{1.2.9}$$

令式 (1.2.8), (1.2.9) 的 $O(1)$ 项相等得 $-2 = 1 + C_0$, 从而得出 $C_0 = -3$.

1.3 多尺度方法

仍考虑问题 (1.2.1), (1.2.2), 用多尺度方法寻求如下形式的渐近展开式:

$$x(t,\varepsilon) = x_0(\xi,\eta) + \varepsilon x_1(\xi,\eta) + \cdots, \tag{1.3.1}$$

其中

$$\xi = \frac{t}{\varepsilon}, \quad \eta = t$$

分别为内、外两个变量所选用的尺度. 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2},$$

所以 (1.2.1) 可改写为

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta} + \varepsilon\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial x}{\partial\eta} = 2\eta + 1$$

或

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} + \frac{\partial x}{\partial\xi} = \varepsilon\left(2\eta + 1 - 2\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\right) - \varepsilon^2\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}. \tag{1.3.2}$$

将 (1.3.1) 代入 (1.3.2), 并令 ε 同次幂的系数相等得到

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial\xi^2} + \frac{\partial x_0}{\partial\xi} = 0 \tag{1.3.3}$$

及

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\xi^2} + \frac{\partial x_1}{\partial\xi} = 2\eta + 1 - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial x_0}{\partial\eta}. \tag{1.3.4}$$

(1.3.3) 的通解为

$$x_0 = A(\eta) + B(\eta)\,\exp(-\xi).$$

将它代入 (1.3.4) 得

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\xi^2} + \frac{\partial x_1}{\partial\xi} = 2\eta + 1 - A' + B'\,\exp(-\xi). \tag{1.3.5}$$

(1.3.5) 的一个特解为

$$\bar{x}_1 = (2\eta + 1 - A')\xi - B'\,\xi\exp(-\xi).$$

为使 $\dfrac{x_1}{x_0}$ 都对所有 $\xi \geqslant 0$ 都有界, 必须

$$2\eta + 1 - A' = 0 \quad 且 \quad B' = 0.$$

因此,

$$A = \eta^2 + \eta + a, \quad B = b,$$

其中 a 和 b 为积分常数, 于是

$$x_0 = \eta^2 + \eta + a + b\exp(-\xi).$$

将它代入 (1.3.1), 并代回原变量得

$$x = t^2 + t + a + b\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right). \tag{1.3.6}$$

再把 (1.3.6) 代入边界条件 (1.2.2) 有

$$a + b = 1 \quad 及 \quad 2 + a + \mathrm{EST} = 0,$$

从而得出 $a = -2$ 及 $b = 3$, 于是 (1.3.6) 写为

$$x = t^2 + t - 2 + 3\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + \cdots.$$

这与式 (1.2.7) 是一致的.

1.4 合成展开法

考虑两点边值问题

$$\varepsilon^2 x'' + \varepsilon t x' - x = -\exp(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1.4.1}$$

$$x(0,\varepsilon) = 2, \quad x(1,\varepsilon) = 1, \tag{1.4.2}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为小参数. 用合成展开法求其一致有效的渐近展开式. 将外部解

$$U(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t)\varepsilon^j$$

代入方程 (1.4.1), 并令 ε^0 的系数相等得到

$$u_0(t) = \exp(t).$$

$u_0(t)$ 显然不满足 (1.4.2) 中的任何一个边界条件, 需要在 $t=0$ 和 $t=1$ 处构造边界层校正项. 先在 $t=0$ 处引入伸长变量 $\xi = \dfrac{t}{\varepsilon}$, 构造校正项

$$V(\xi,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(\xi)\varepsilon^j,$$

并将合成展开式

$$U(t,\varepsilon) + V(\xi,\varepsilon)$$

代入 (1.4.1) 和 $x(0,\varepsilon)=2$, 令 ε^0 的系数相等可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_0}{\mathrm{d}\xi^2} - v_0 = 0, \quad v_0(0) = 1. \tag{1.4.3}$$

此外, 校正项 $v_0(\xi)$ 应满足

$$v_0(+\infty) = 0. \tag{1.4.4}$$

从 (1.4.3) , (1.4.4) 中解出

$$v_0(\xi) = \exp(-\xi).$$

再在 $t=1$ 处引入伸长变量 $\eta = \dfrac{1-t}{\varepsilon}$, 构造校正项

$$W(\eta,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(\eta)\varepsilon^j,$$

并将合成展开式

$$U(t,\varepsilon) + W(\eta,\varepsilon)$$

代入 (1.4.1) 和 $x(1,\varepsilon)=1$, 令 ε^0 的系数相等可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_0}{\mathrm{d}\eta^2} - \frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}\eta} - w_0 = 0, \quad w_0(0) = 1-\mathrm{e}, \tag{1.4.5}$$

并且校正项 $w_0(\eta)$ 应满足

$$w_0(+\infty) = 0. \tag{1.4.6}$$

从 (1.4.5), (1.4.6) 中解出

$$w_0(\eta) = (1-\mathrm{e})\exp\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\eta\right).$$

由此构成一项复合展开式

$$x(t,\varepsilon) = \exp(t) + \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2\varepsilon}(1-t)\right) + \cdots,$$

这与 Holmes[3] 用匹配渐近展开法构造的结果是一致的.