

AP CALCULUS



北京王府学校
BEIJING ROYAL SCHOOL

AP*微积分

国内AP课程原创教材，特别适合中国学生使用。



余瑶 王劲松 编著

中国人民大学出版社

AP

微积分

AP Calculus

余 瑶 王劲松 编著

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

AP 微积分: 汉、英 / 余瑶, 王劲松编著. —北京: 中国人民大学出版社, 2012.1
ISBN 978-7-300-15071-0

I. ①A… II. ①余… ②王… III. ①微积分-高等学校-入学考试-美国-自学参考资料-汉、英
IV. ①0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 271592 号

AP 微积分

余瑶 王劲松 编著

AP Weijifen

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn (中国1考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京宏伟双华印刷有限公司		
规 格	185 mm × 260 mm 16 开本	版 次	2012 年 4 月第 1 版
印 张	15.5	印 次	2012 年 4 月第 1 次印刷
字 数	329 000	定 价	38.00 元

版权所有

侵权必究

印装差错

负责调换

图书编委会名单（按姓氏拼音顺序）

主 编：王广发

副 主 编：王鲁英 严 俊

编 委：傅 莹 卢嘉杰 苏晓佳 王劲松 杨圣婴
余 瑶 曾津晶 张 珊 张云魁 赵 杰

Preface

With the rapid growth of the Chinese economy, China's education reform has been confronted with a challenge of cultivating talent. The traditional education system cannot satisfy the huge demand of qualified talents for the development of the market economy. Chapter 16 of National education reform and development of long-term planning programs (2010-2020), clearly states that we need to cultivate talents who have international insights, a good understanding of international rules, and the ability to participate in international affairs. The internationalization of education entails teaching resources, environment, outcome and concept. Since 2003, Beijing Royal School (BRS) has implemented an international education along with constant research and trials in methodology and pedagogy. Additionally, BRS has established the A-level, AP and AEOP courses in which the AP course has been the most preferred.

AP(Advanced Placement), initiated by College Board, aims at helping high school students adapt to college education in advance. American universities consider AP grades as important criteria for assessing the students' over-all qualities and research capabilities. They are also used to select students who can meet the standard of college admissions.

In 2006, BRS became the first school in China to offer AP courses. Because of our outstanding teaching achievements, BRS is the first high school in China to be admitted as a member of the College Board, and has been authorized as the only AP teaching demonstration school in China. Since the introduction of AP courses, we have been committed to the promotion of AP research. In 2010, BRS hosted the First AP Teaching Forum along with the College Board. Some of our teachers have been granted the 'AP

Demonstration Teacher' certificates.

In order to help our students adapt to international education and to better integrate with creative learning concepts, BRS has sent many teachers of different disciplines to the United States, the United Kingdom, Korea and Hong Kong for further study, experience and training on a regular basis. As a result, our teachers have accumulated great teaching experience. We sincerely hope that this book can benefit students in China.

This set of books is based on the outlines of AP testing and includes key points, previous test questions and glossaries of the tests in hopes that students will have a better understanding of the AP tests. All the authors are accomplished and experienced AP teachers who specialize in AP tests. They are highly praised by experts from the College Board for applying new methodology, such as understanding-based and critical teaching. Our books can not only bring joy to students learning AP courses but can also lay a firm foundation for the reform of high school education here in China.

Due to time constraints, errors are inevitable. Any suggestions and corrections are welcome and appreciated.

Wang Guangfa



Preface

AP 辅导教材序言

中国经济快速发展，人才培养给我国教育体制改革也带来了更大的挑战。传统教育模式不能满足我国市场经济对于高素质人才的巨大需求。《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020年）》在第十六章“扩大教育开放”中明确提出，要适应国家经济社会对外开放的要求，培养大批具有国际视野、通晓国际规则、能够参与国际事务和国际竞争的人才。教育国际化需要的是教育资源、教育环境、教育成果和教育理念。北京王府学校自2003年成立以来，一直奉行教育国际化的理念，在教育教学、教法和教材的改革上不断进行尝试和摸索，开设了 A-level, AP, AEOP 等课程。其中，尤以 AP 课程为广大学生所青睐。

AP (Advanced Placement), 中文译为美国大学先修课程，由美国大学理事会 (College Board) 举办，旨在使高中学生提前适应大学教育，在高中阶段以美国大学标准挑战自我。美国大学将 AP 成绩看作衡量学生学习综合素质和研究能力的重要指标，也用于帮助筛选符合大学入学标准的优秀学生。

北京王府学校 2006 年成为中国首所引进美国 AP 课程的学校。由于教学成果出色，被美国大学理事会吸收为中国首个会员单位，被美国大学理事会首选为“AP 教学示范学校”。自开设 AP 课程以来，王府学校一直致力于 AP 课程深度教科研活动的推广。2010 年，王府学校作为主办单位，同美国大学理事会共同成功举办了“首届（2010）中国 AP 教学与学习交流观摩论坛”。王府学校部分骨干教师成为中国首批获得“AP 示范教师”证书的教师。

王府学校教师受益于长期的教科研经验积累，学校鼓励和支持更多的学生加入到挑战自我的队伍中来，为让中国的高中学生早日适应先进的教育培养模式，学校各专业教师多次赴美国、英国、韩国及我国香港等地进行学习、交流经验、培训，通过学习收获教学经验积累，同 AP 课程教师和学生创造性学习的教育理念相融合，我们希望根据学生教学需

要编写能够结合 AP 课程精髓和中国学生思维方式的 AP 教材，以飨莘莘学子。

本套 AP 教材以 AP 考试大纲为基本框架，辅以对知识点、考题和专业词汇的缜密解析，旨在帮助学生更快地掌握 AP 知识架构，了解 AP 考试特点和突破专业词汇障碍。负责本教材编写工作的都是学校教学一线的 AP 教师，具有较丰富的教学经验，针对 AP 试题有着深入的研究，应用新教学方法，引领、理解教学，领导教学，比较教学，批判教学，得到了美国大学理事会等著名大学专家学者的认同。本套 AP 教材的编写，不仅能带给学生学习 AP 的乐趣，还能为国内高中教材教学改革抛砖引玉。

时间仓促，书中难免有不妥之处，望同行、读者不吝赐教。

王广发

Preface

前言

本书主要针对《AP 微积分》考试，根据美国大学理事会 (College Board) 提供的 *AP Calculus BC Course Description* 而编写，涵盖考试所需掌握的所有内容。

随着国际化教育的不断发展，参加 AP 考试的中国考生越来越多，而市场上配套的能有效帮助中国考生快速掌握 AP 考试所需知识，提高学习效率的双语辅导书籍几乎空白。阅读国际教材或辅导教材对于大部分英语不是特别熟练的学生来说具有一定的难度，同时也会耗费大量的时间和精力。为了让更多的中国学生能更快更好地掌握 AP 考试所需的信息，北京王府学校特组织编写了这套双语 AP 辅导教材，本书即是其中的微积分分册。

本书对 *AP Calculus BC* 考试所要求的知识做了较全面的讲解，另配有大量的例题和习题。此外，作者还对 2008 年的 *AP Calculus BC* 所有真题做了详尽的解析，能帮助考生零距离地接触和了解 AP 微积分考试。书后附有所有 *AP Calculus BC* 的相关词汇及释义，便于考生查阅和记忆。另外此书以 TI 83 为例，对一些考试中所要用到的图形计算器的重要功能和使用方法也进行了演示和说明。

本书共分 10 章，前 5 章及真题解析主要由王劲松编写，后 5 章主要由余瑶编写，最后由王劲松统稿。由于编者水平有限，外加成书仓促，书中难免有不当之处，希望广大读者提出批评和指正。

2012.2

目录

Contents

Chapter 1 Preknowledge 1

第一章 (预备知识)

- 1.1 Power Functions
(幂函数) 1
- 1.2 Exponential Functions
(指数函数) 6
- 1.3 Logarithmic Functions
(对数函数) 8
- 1.4 Trigonometric Functions
(三角函数) 9

Chapter 2 Limits & Continuity 13

第二章 (极限与连续)

- 2.1 Limit
(极限) 13
- 2.2 Evaluating Limits
(计算极限) 17
- 2.3 Continuity
(连续性) 21
- Graphing Calculator Tips 26
- Practice Problems 1 29

Chapter 3 Definition of Derivative 31

第三章 (导数的定义)

- 3.1 Velocities and Slopes
(速度和斜率) 31

3.2	Derivative (导数)	34
3.3	Derivative as a Function (导函数)	35
3.4	Differentiability and Continuity (可导和连续)	37
3.5	Higher Derivatives (高阶导数)	40
	Graphing Calculator Tips	42
	Practice Problems 2	44

Chapter 4 Computation of Derivatives 45

第四章 (导数的计算)

4.1	Basic Differentiation Formulas (求导公式)	45
4.2	Rules for Computing Derivatives (求导法则)	48
4.3	Implicit Differentiation (隐函数求导)	60
	Practice Problems 3	63

Chapter 5 Applications of Derivatives 65

第五章 (导数的应用)

5.1	Equations of Tangent Lines and Normal Lines (切线和法线方程)	65
5.2	Maximum and Minimum Values (最大、最小值)	66
5.3	Graphing Using Derivatives (导数与函数图像)	71

5.4	Related Rates (相关变化率).....	75
5.5	L'Hopital's Rule (洛必达法则).....	78
5.6	Motion	79
	Graphing Calculator Tips.....	82
	Practice Problems 4.....	86

Chapter 6 Indefinite Integral 91

第六章 (不定积分)

6.1	Integration (积分).....	91
6.2	Integration methods (积分法).....	95
	Practice Problems 5.....	103

Chapter 7 Definite Integrals 107

第七章 (定积分)

7.1	Riemann sums and Trapezoid rules (黎曼和与梯形法则).....	107
7.2	Definite Integrals (定积分).....	111
7.3	Improper Integrals (BC) (广义积分).....	115
7.4	Fundamental Theorem of Calculus (微积分基本定理).....	117
	Practice Problems 6.....	120

Chapter 8 Applications of Integrals 123

第八章 (积分应用)

8.1	Area between Two Curves	
-----	-------------------------	--

(曲线间面积).....	124
8.2 Volume of Solid of a Revolution	
(旋转体体积).....	127
8.3 Application of Definite Integral	
(定积分应用).....	132
8.4 Approximation	
(估算).....	134
8.5 Mean Value Theorem of Integrals	
(积分中值定理).....	136
Practice Problems 7.....	138

Chapter 9 Differential Equations 143

第九章 (微分方程)

9.1 Separable Differential Equations	
(可分离微分方程).....	143
9.2 Parametric Functions	
(参数方程).....	144
9.3 Slope Fields	
(斜率场).....	145
9.4 Logistic Equation	
(逻辑斯谛方程).....	147
Graphing Calculator Tips.....	150
Practice Problems 8.....	151

Chapter 10 Infinite Series 153

第十章 (无穷级数)

10.1 Sequence and Series	
(数列和级数).....	153
10.2 Divergence and Convergence	
(发散和收敛).....	154

10.3 Taylor and Maclaurin Series (泰勒级数与麦克劳林级数)	159
10.4 The Lagrange Error Bound (拉格朗日余项)	162
Practice Problems 9	164
2008 AP Calculus BC真题	165
2008 AP Calculus BC真题解析	181
附录1 习题答案	209
附录2 AP Calculus BC 词汇表	220

Chapter 1

Preknowledge

第一章 (预备知识)

在学习 AP 微积分之前，我们需要一些预备的基础知识，主要是一些基本函数及其性质和图像等。以下即为我们所需要掌握的有关函数。

Power Functions (幂函数)

幂函数的形式为 $f(x) = x^p$ ， p 为常数。下面是几种常见的幂函数的图像及基本性质：

(1) p 为正整数

如果 p 为奇数，那么 $f(x) = x^p$ 为奇函数，定义域为 \mathbf{R} ，如图 1.1 所示：

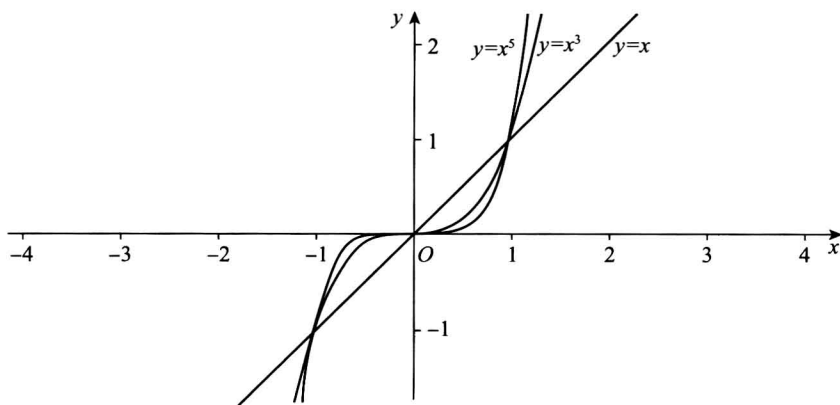


图 1.1

如果 p 为偶数，那么 $f(x) = x^p$ 为偶函数，定义域为 \mathbf{R} ，如图 1.2 所示：

(2) p 为正分数

如果 $p = \frac{n}{m}$ ， n, m 为正整数，那么 $f(x) = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ ，函数的性质取决于 n, m 的值。图 1.3 是一些简单的此类函数图像。

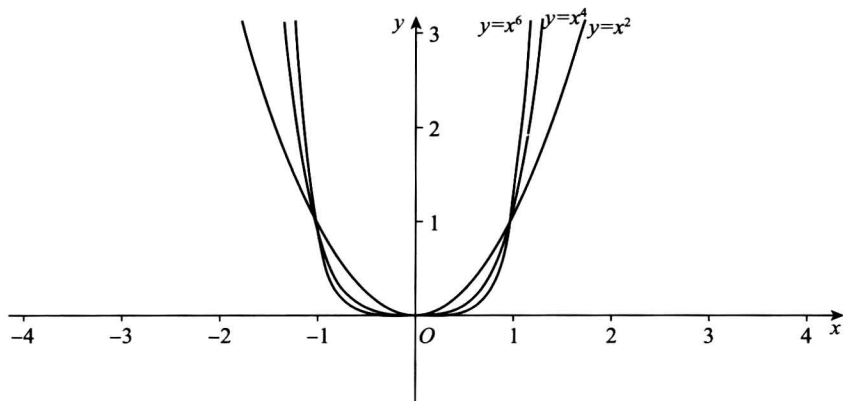


图 1.2

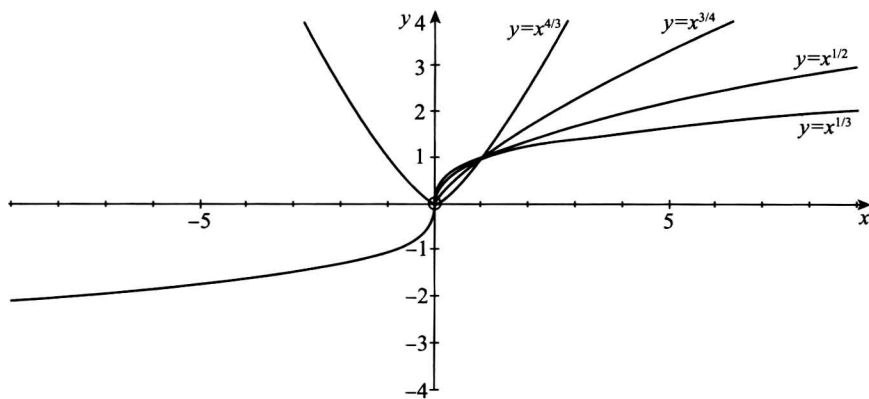


图 1.3

(3) p 为负数

设 $f(x) = x^p$, $p = -q$, 其中 q 为正数, 那么有 $f(x) = x^{-q} = \frac{1}{x^q}$ 。如 $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 。

由幂函数又可以组成多项式函数 (Polynomial Functions) 和 有理函数 (Rational Functions)

Polynomial Function:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, n \text{ 为正整数};$$

Rational Function:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, P(x), Q(x) \text{ 为 Polynomial Functions. 对于有理函数我们要注意一}$$

点, 即其图像一般来说都有渐近线 (asymptotes), 我们先看两个函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 和 $f(x) =$

$\frac{2x^2}{x^2 - 1}$ 的图像。

图 1.4 为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图像, 我们由图可知, 越往两边走函数的图像越靠近 x 轴, 也就是说当 $|x|$ 越来越大时, 函数图像会渐渐靠近 $x=0$ 这条线, 这一性质我们可以用极限来表示: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 这时我们说 $x=0$ 是 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的一条渐近线 (asymptote), 由于其方向是水平的, 我们称之为水平渐近线 (horizontal asymptote)。而不管 x 从哪边趋近 0 时, 函数图像会渐渐靠近 $y=0$ 这条线, 我们把 $y=0$ 称为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的竖直渐近线 (vertical asymptote)。

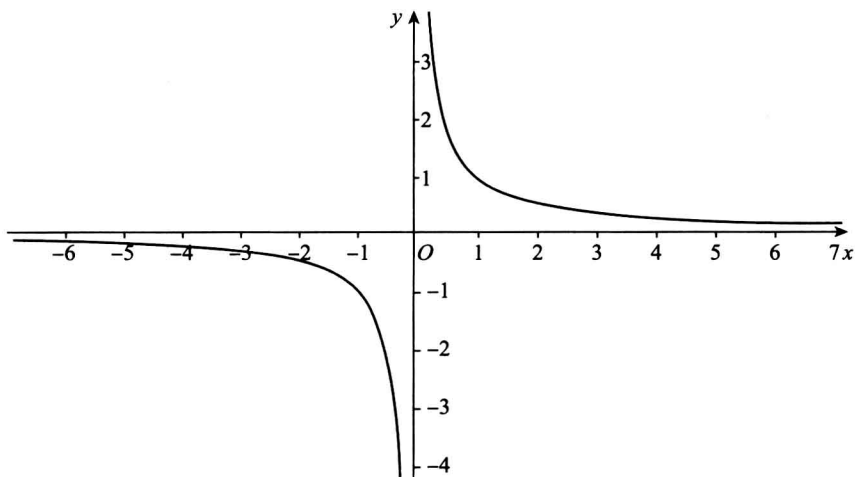


图 1.4

图 1.5 为 $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ 的图像。同样的, 我们可以看到, 当越往两边走时函数图像也会渐渐靠近一条线, 即 $y = 2$, 这是因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2$; 而在竖直方向上, 函数图像则分别靠近两条线: $x = -1$ 和 $x = 1$ 。

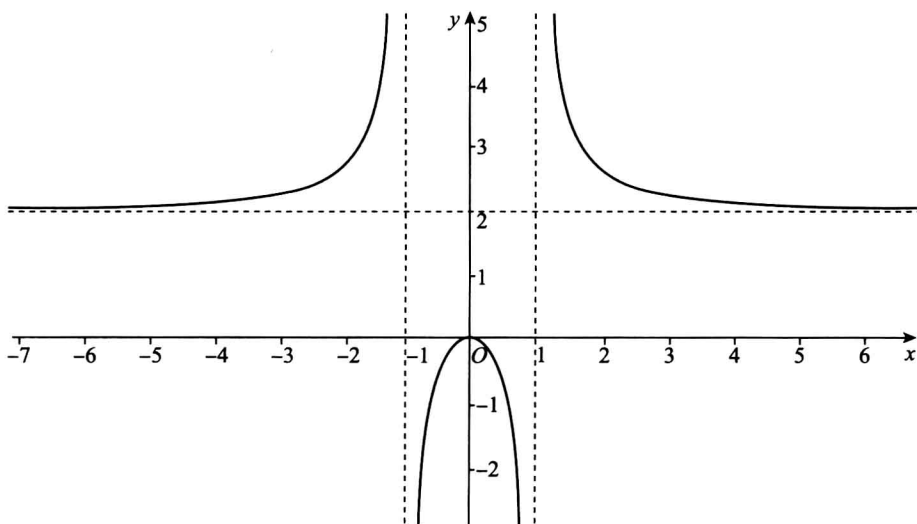


图 1.5