线性代数提高

邹杰涛 张 杰 主 编
解加芳 刘 波 副主编

XIANXING DAISHU TIGAO

中国财政经济出版社

线性代数提高

邹杰涛　张　杰　主　编
解加芳　刘　波　副主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数提高/邹杰涛，张杰主编．—北京：中国财政经济出版社，2011.8
ISBN 978-7-5095-3062-7

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①邹…　②张…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-自学参考资料
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 171065 号

责任编辑：陆宗祥　　　　责任校对：杨瑞琦
封面设计：邹海东　　　　版式设计：汤广才

中国财政经济出版社出版
URL：http://www.cfeph.cn
E-mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100142
营销中心电话：88190406　北京财经书店电话：64033436　84041336
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　17.25 印张　390 000 字
2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月北京第 1 次印刷
定价：28.00 元
ISBN 978-7-5095-3062-7/O·0030
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010-88190744

前言 qian yan

线性代数是高等院校理工科各专业的重要基础课。由于线性代数的基础性和实用性作用，学好线性代数是至关重要的：一方面要深刻理解其有关概念、掌握重要结论；另一方面要多做练习，以加深对线性代数内容的理解和认识，这对于解决实际问题时熟练应用有关线性代数内容是必不可少的。本书是根据教育部制订的线性代数教学大纲的要求编写的，是为理工科大学生学习线性代数以及准备考研的学生复习线性代数而编写的一本提高性读物，也可作为教师的教学参考书。本书由北方工业大学数学系公共数学教学团队（北京市优秀教学团队）共同编写而成。教学团队由具有多年丰富教学经验的教授、副教授及讲师组成。他们对线性代数的教学内容和方法进行了深入研讨，充分总结了教学经验，力求把多年教学实践中的经验和体会都融入书中，以帮助读者学好这门重要的基础课。

本书力求在较短的时间内，用不多的篇幅，帮助同学们搞清基本概念，掌握基本理论和公式，弄清重点、难点与知识结合点。一方面，通过对典型例题的分析与评注，帮助同学们梳理解题的思路，熟悉常用的方法和技巧；另一方面，精编适量的练习题和考研真题，帮助同学们更好地理解和掌握基本内容、基本解题方法，达到巩固与提高的目的。

全书共分五章，每章分内容小结、知识框架、知识要点与典型例题、考研真题、习题、练习以及相关详细分析解答与答案。本书在章节的顺序安排和内容取舍上与教材略有不同，主要是为了方便学生总结归纳，以及更好地掌握知识间的相互渗透与转换，提高运用基础知识的能力。

本书初稿第一章（行列式）和第二章（矩阵及其运算）由邹杰涛、解加芳执笔，第三章（向量组的线性相关性与线性方程组）和第五章（线性空间与线性变换）由张杰、刘波执笔，第四章（相似矩阵与二次型）由张建国、刘波执笔。全书初稿由解加芳、刘波校对，最后由邹杰涛负责统稿，对初稿的内容进行了适当的删减或补充。内容确定后，由团队总负责人张杰教授对全书进行了统

校。总之，希望本书能对同学们学习线性代数和复习备考有更大的帮助。

由于编者水平有限，本书疏漏错误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

2011 年 7 月于北方工业大学

目录 mu lu

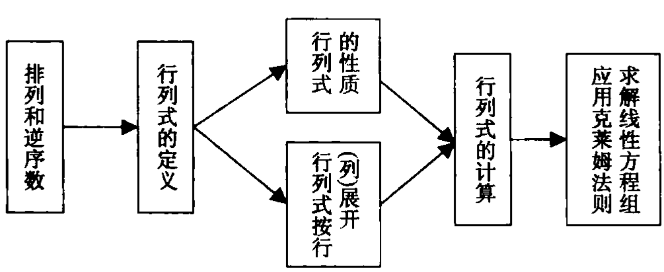
第一章

行 列 式

一、内 容 小 结

本章的核心内容是行列式的计算问题．具体要求是：了解行列式的概念，掌握行列式的性质；会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式；会根据行列式的不同特点采用不同的数学方法（比如递推法，数学归纳法，利用范德蒙行列式结论等）计算行列式；会利用克莱姆法则求解线性方程组．

二、知 识 框 架



三、知识要点与典型例题

(一) 知识要点

1. 排列和逆序数

这部分知识是引入行列式定义的预备，也是定义行列式的理论基础.

(1) 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列. 在一个排列中，如果某一个较大的数码排在较小的数码之前，就称这两个数码构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数，叫做这个排列的逆序数. 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列成为奇排列.

(2) 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 阶排列共有 $n!$ 个. 奇排列和偶排列的个数相等，均为 $\frac{n!}{2}$ 个.

(3) 对换改变排列的奇偶性. 奇排列调成标准排列的对换次数是奇数，偶排列调成标准排列的对换次数是偶数.

2. 行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

n 阶行列式是所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，它由 $n!$ 项组成，其中带正号与带负号的项各占一半，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

3. 行列式的性质

行列式的性质是计算行列式的重要依据，利用行列式的性质可把行列式化为“三角形行列式”后进行计算.

(1) 行列式与它的转置行列式的值相等.

(2) 互换行列式的其中两行（列），行列式改变符号.

(3) 行列式中某一行（列）所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 如果行列式的某一行（列）元素都是两个数之和，那么可以把行列式表示成两个行列式的和.

(5) 把行列式某一行（列）的元素同乘以数 k，加到另一行（列）对应元素上去，行列式的值不变.

(6) 如果行列式中有两行（列）的元素对应成比例，那么行列式的值等于零；

(7) 如果行列式中某一行（列）所有元素全为0，那么行列式的值等于零.

4. 行列式按行（列）展开定理

(1) 如果行列式 D 中第 i 行元素除 a_{ij} 外其他都为零，那么行列式 D 等于 a_{ij} 与它的代数

余子式 A_{ij} 的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

（2）利用行列式的性质将某一行（列）化为只有一个元素非零，再按行（列）展开，行列式就由 n 阶降为 $n-1$ 阶，这就是计算行列式的降阶法.

（3）按行（列）展开法：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 n 阶行列式 $D=\Delta_n(a_{ij})$ 中 a_{ij} 的代数余子式，余子式 M_{ij} 是在 n 阶行列式 $D=\Delta_n(a_{ij})$ 中，去掉第 i 行和第 j 列后的 $n-1$ 阶行列式.

（4）行列式中某一行（列）的所有元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j).$$

5. 克莱姆法则

（1）若线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

的系数行列式 D 不等于零，即 $D\neq0$，那么，方程组存在唯一解，且

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中行列式 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把 D 的第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后得到的 n 阶行列式；

（2）如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$，则方程组只有零解；

（3）齐次线性方程组有非零解的充要条件是 $D=0$.

（二）典型例题

1. 题型分析

题型 1：求排列的逆序数，判定排列的奇偶性

解题思路： 求 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，就是对于元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，计算出排在 p_i 前面比 p_i 大的元素个数 $t_i(i=1,2,\cdots,n)$，则元素 p_i 的逆序数为 t_i. 从而，该排列的逆序数为：

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_2+t_3+\cdots+t_n.$$

例 1.1.1 求下列排列的逆序数，从而确定它们的奇偶性.

（1）1347265；（2）$n(n-1)\cdots21$.

解 （1）$\tau(1347265)=0+0+0+0+3+1+2=6$，所以为偶排列；

（2）$\tau[n(n-1)\cdots21]=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

所以，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$为偶数，故此时排列为偶排列；

当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$为奇数，故此时排列为奇排列.

题型 2：利用行列式的定义计算行列式

解题思路：对含零元素较多的行列式，可直接用定义计算．因如果行列式中的项有一元素为零时，该项的值为零，故只须求出所有非零项即可．为求出所有非零项，将行标按标准顺序排列，再讨论列标所有可能的取值．具体做法是：对一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，先由第 1 行的非零元素及其位置，写出 j_1 可能取的数码，再由第 $2,3,\cdots,n$ 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2,j_3,\cdots,j_n$ 可能取的数码，进而求出 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 的所有 n 阶排列，该 n 阶排列的个数即为所有非零项的项数（如例 1.2.1）．如果这样的非零项一个也没有，则该行列式的值为零（如例 1.2.2）．此外，若一个 n 阶行列式中零元素的个数大于 n^2-n，则此行列式等于零.

例 1.2.1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2009 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2010 \end{vmatrix}$.

解 D 中第一行的非零元素只有 $a_{1,\ 2009}$，因而 j_1 只能取 2009，同理，由第 2，3，…，2010 行知，$j_2=2008$，$j_3=2007$，…，$j_{2009}=1$，$j_{2010}=2010$. 于是 j_1，j_2，…，j_{2010}在可能取的数码中，只能组成一个 2010 阶排列

$$(2009)(2008)\cdots321(2010),$$

即 D 中非零项只有一项，故

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau((2009)\cdots 2\ \ 1\ \ (2010))}a_{1,2009}a_{2,2008}\cdots a_{2009,1}a_{2010,2010} \\ &= (-1)^{0+1+2+\cdots+2008+0}1\times2\times\cdots\times2009\times2010 \\ &= (-1)^{\frac{2008\times2009}{2}}2010!\ =2010!. \end{aligned}$$

例 1.2.2 用行列式定义计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 D 中第一行的非零元素为 a_{12},a_{13}，所以 $j_1=2,3$，同理可求出 $j_2=1,2,3,4,5$ $j_3=1,2,3,4,5$ $j_4=2,3$ $j_5=2,3$，因而行列式的非零项乘积的列标 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 不能组成任何的 5 阶排列，即行列式没有非零项，因此 $D=0$.

题型 3：化行列式为三角形行列式进行计算

解题思路：利用行列式的性质，可逐步将所给行列式化为三角形行列式．化零时一般尽量选含有 1 的行（列）及含零较多的行（列）（如例 1.3.1）．若没有 1，则可适当选取便于化为零的数，或利用行列式的性质将某行（列）中的某数化为 1（如例 1.3.2）；若所给行列式中元素间具有某些特征，则应充分利用这些特征，常见的有：

(1) 行列式所有行（或列）全部元素化为 1（如例 1.3.3）.

(2) 对爪形（三线型）行列式，可通过将其余各行（或列）的某一倍数加到第 1 行（或列）而化为三角形行列式（如例 1.3.4）.

(3) 若行列式的各行（或列）之间差别不大，可采用逐行（或列）相加（或减）的方法，将其化简后进行计算（如例 1.3.5）.

(4) 对某些行列式，可在原行列式中增加一行一列，且保持原行列式不变，使其具有某种特征，便于计算．一般称此法为加边法（例 1.3.6）.

总之，掌握行列式的特征是计算行列式的关键，在此基础上，充分利用行列式的性质，灵活选用方法．值得注意的是，同一个行列式有时会有不同的求解方法（例 1.3.7），我们可选取相对较简单的方法或自己最熟悉的方法.

例 1.3.1 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$.

解 将第一行分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行，有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n!\ .$$

例 1.3.2 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

解 将第二行乘(-1)加到第一行，再将第四行乘(-1)加到第三行，有

$$D = \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$= xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

例 1.3.3 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$.

解 注意到所有各行元素相加后均等于 $b+\sum_{i=1}^{n}a_i$，将第 2 至第 n 列对应元素加到第一列，然后提出公因子 $b+\sum_{i=1}^{n}a_i$，即

$$D_n=\begin{vmatrix} b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

再将第 1 行的(-1)倍加到其余各行，得

$$D_n=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)b^{n-1}.$$

例 1.3.4 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$， $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n.$

解 将第 $i+1(i=1,2,\cdots,n)$列的 $-\frac{c_i}{a_i}$倍加到第 1 列，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}).$$

例 1.3.5 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

解 后一行减去前一行，再将第一列乘(-1)加到其余各列，则有

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&0&0&\cdots&0&-n\\1&0&0&\cdots&-n&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&-n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=n^{n-1}\begin{vmatrix}1&\frac{1}{n}&\frac{2}{n}&\cdots&\frac{n-2}{n}&\frac{n-1}{n}\\1&0&0&\cdots&0&-1\\1&0&0&\cdots&-1&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&-1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=n^{n-1}\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}&\frac{1}{n}&\frac{2}{n}&\cdots&\frac{n-2}{n}&\frac{n-1}{n}\\0&0&0&\cdots&0&-1\\0&0&0&\cdots&-1&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&-1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=n^{n-1}\left[1+\frac{1}{n}\frac{1}{2}(n-1)n\right](-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^{n-1}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

例 1.3.6 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x_1^2+1&x_1x_2&\cdots&x_1x_n\\x_2x_1&x_2^2+1&\cdots&x_2x_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_nx_1&x_nx_2&\cdots&x_n^2+1\end{vmatrix}$.

解 利用“加边法”，有

$$D_n=\begin{vmatrix}1&x_1&x_2&\cdots&x_n\\0&x_1^2+1&x_1x_2&\cdots&x_1x_n\\0&x_2x_1&x_2^2+1&\cdots&x_2x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&x_nx_1&x_nx_2&\cdots&x_n^2+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x_1&x_2&\cdots&x_n\\-x_1&1&0&\cdots&0\\-x_2&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-x_n&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+\sum_{j=1}^{n}x_j^2&x_1&x_2&\cdots&x_n\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1+\sum_{j=1}^{n}x_j^2.$$

例 1.3.7 当 $n\geqslant 2$ 时，计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}3&2&2&\cdots&2\\2&3&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&2&\cdots&3\end{vmatrix}$.

解法一 利用“加边法”，有

$$D_n=\begin{vmatrix}1&-2&-2&-2&\cdots&-2\\0&3&2&2&\cdots&2\\0&2&3&2&\cdots&2\\0&2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&2&2&2&\cdots&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&-2&-2&\cdots&-2\\1&1&0&0&\cdots&0\\1&0&1&0&\cdots&0\\1&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+2n&0&0&0&\cdots&0\\1&1&0&0&\cdots&0\\1&0&1&0&\cdots&0\\1&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1+2n.$$

解法二 将第一行乘(-1)加到其余各行，仿例 1.3.4，有

$$D_n=\begin{vmatrix}3&2&2&\cdots&2\\-1&1&0&\cdots&0\\-1&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-1&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3+2(n-1)&2&2&\cdots&2\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=2n+1.$$

解法三 注意到所有各行元素的和均为 $3+2(n-1)$，仿例 1.3.3 即可.

题型 4：利用行列式性质和展开定理计算行列式

解题思路： 利用行列式的性质和按行（列）展开定理计算行列式，一般总是先利用行列式的性质，把行列式的某行（列）的元素转化为尽可能多的零，然后再按此行（列）展开以达到降低行列式阶数，将行列式转化为较低阶行列式来计算的目的，此即所谓的降阶法.

计算中，对具体的问题应具体分析，注意所给行列式的特征（如例 1.4.1，1.4.2）；通常情况下，如果所求行列式的某一行（或某一列）至多只有两个非零元素，一般可按此行（或此列）展开降阶计算（如例 1.4.3）.

例 1.4.1 计算 $D_4=\begin{vmatrix}1823&823&23&3\\1549&549&49&9\\1667&667&67&7\\1986&986&86&6\end{vmatrix}$.

解 $$D_4=\begin{vmatrix}1823&823&23&3\\1549&549&49&9\\1667&667&67&7\\1986&986&86&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1000&800&20&3\\1000&500&40&9\\1000&600&60&7\\1000&900&80&6\end{vmatrix}$$

$$=10^6\begin{vmatrix}1&8&2&3\\1&5&4&9\\1&6&6&7\\1&9&8&6\end{vmatrix}=10^6\begin{vmatrix}1&8&2&3\\0&-3&2&6\\0&-2&4&4\\0&1&6&3\end{vmatrix}$$