

水轮机数学模型

赵林明 等 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

水轮机数学模型

赵林明 等 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书深入浅出地介绍了应用水轮机理论,采用数据拟合、数值逼近、计算几何、人工神经网络、进化计算方法和多因素评价等数学手段,分析解决水轮机领域中部分问题的方法,将相应的计算过程和一些结果,定义为水轮机数学模型。

本书所建立的水轮机数学模型,可以供在水轮机设计、选择、制造、运行等领域工作的科技人员参考使用,对高等院校相关专业的师生也有重要的参考学习价值。另外,书中给出的各种数学方法和计算技巧,也可以供其他专业的科技人员学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

水轮机数学模型 / 赵林明等著. — 北京: 中国水利水电出版社, 2011.8
ISBN 978-7-5084-8883-7

I. ①水… II. ①赵… III. ①水轮机—数学模型
IV. ①TK73

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第156808号

书 名	水轮机数学模型
作 者	赵林明 等 著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	三河市鑫金马印装有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 8.75印张 207千字
版 次	2011年8月第1版 2011年8月第1次印刷
印 数	0001—2000册
定 价	26.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前言

随着计算机的普及，在水轮机领域工作的科技人员应用各种数学方法，解决水轮机领域的有关问题。例如，根据流体力学理论，应用偏微分方程建立描述水轮机内部水流运动规律的数学模型，然后使用差分方法等数值方法，计算和分析水轮机内部水流运动的规律，进而估算水轮机的能量特性和空蚀特性；同样，根据流体力学理论，应用偏微分方程建立描述水轮机过渡过程中相应的数学模型，采用特征线法等数值方法，计算水轮机过渡过程的有关参数值，为水轮机安全运行提供依据；还可以应用一些数学方法，研究水轮机调节系统的有关内容等。

本书根据作者工作实际和研究成果，深入浅出地介绍了应用水轮机理论，采用数据拟合、数值逼近、计算几何、人工神经网络、进化计算方法和多因素评价等数学手段，分析解决水轮机领域中部分问题的方法，将相应的计算过程和一些结果，定义为水轮机数学模型。所建立的水轮机数学模型，可以供在水轮机设计、选择、制造、运行等领域工作的科技人员参考使用，对高等院校相关专业的师生也有重要的参考学习价值。另外，书中给出的各种数学方法，也可以供其他专业的科技人员学习使用。

全书分为八章，每一章中不但给出了相关的内容，还在每章的最后，对所涉及的数学方法等作了总结，并提出了想进一步了解相关内容的途径等。

第一章主要介绍数据拟合方法，以及用这种方法建立反映水轮机工作参数间关系的经验公式的过程和技巧，可用于对水轮机工作参数的统计研究。第二章主要介绍数值逼近方法中的插值计算方法，以及应用插值方法引用水轮机各种特性曲线的计算过程和一些技巧，可用于设计水轮机计算及辅助选型设计软件，或是进行水电站中水轮机优化运行分析时使用。第三章针对应用数值计算方法进行水轮机过渡过程分析时缺少相应边界条件的问题，结合水轮机理论，应用数据拟合或插值计算方法，给出了估算水轮机小开度特性的数学模型，可以供水电站设计以及分析水轮机过渡过程时使用。第四章结合水轮机理论，提出近似计算水轮机转轮出口处绝对速度圆周分量的方法，在此基础上，建立了分析水轮机尾水管涡带振动特性的数学模型，可以用于指导水轮机的稳定运行。第五章主要介绍计算几何知识中的样条函数，以及使用样条函数建立描述水轮机过流部件，如水轮机转轮等几何形状的数学模

型，建立模型的方法，可以供水轮机设计和检修、水轮机计算机辅助加工时参考使用。第六章给出了一种具有明显特色的优化计算方法——进化计算方法，并主要介绍其中的遗传算法和进化规划方法，以及用这些方法进行水电站中水轮机优化运行分析的过程。第七章介绍了目前得到广泛应用的人工神经网络的基本知识，包括前向人工神经网络和自组织映射神经网络等，以及用人工神经网络建立诊断水轮机运行状态的数学模型的计算过程。第八章中针对水轮机选型设计方案评价问题，给出了一种多因素评价方法——层次分析法，可以供有关决策人员参考使用。

本书第五章由石祥钟教授编写，第八章由莫异周高级工程师编写，第二章、第四章和第六章由徐抱朴高级工程师编写，赵林明教授编写了其余章节并统稿。本书在编写过程中得到了田新志、王海燕、王小红、蔡晓磊等研究生的帮助，在编辑和出版过程中得到了中国水利水电出版社的大力支持和帮助，书中参考了所列参考文献中的部分内容，在此一并表示感谢。

作者

2011年5月

目 录

前言

第一章 反映水轮机工作参数间关系的数学模型	1
第一节 数据拟合问题	1
第二节 线性函数数据拟合方法	2
第三节 非线性函数数据拟合方法	5
第四节 水轮机比转速的统计公式	9
参考文献	15
第二章 表示水轮机稳态特性的数学模型	16
第一节 一元插值计算方法	16
第二节 基于插值方法的水轮机特性数学模型	22
第三节 基于数据拟合方法的水轮机特性数学模型	24
第四节 描述水轮机 Suter 曲线的数学模型	30
参考文献	33
第三章 估算水轮机小开度特性的数学模型	34
第一节 等开度下水轮机的一个特性	34
第二节 水轮机高效率区域特性的扩展	36
第三节 水轮机小开度区域特性的估算方法	41
参考文献	46
第四章 分析水轮机振动特性的数学模型	47
第一节 水轮机尾水管中水力振动的特性	47
第二节 尾水管进口水流的分析	49
第三节 尾水管直锥段内水流的旋转角估算	51
第四节 混流式水轮机低频压力脉动特性的计算	54
参考文献	57
第五章 描述水轮机过流部件几何形状的数学模型	58
第一节 概述	58
第二节 B 样条曲线	61
第三节 反算 B 样条插值曲线的控制顶点	68
第四节 B 样条曲面	73

第五节 有理 B 样条曲线曲面..... 77

第六节 Pro/E 实体建模 84

参考文献 88

第六章 优化水轮机组合运行的数学模型 90

第一节 模型的建立 90

第二节 遗传算法 91

第三节 基于遗传算法的水电站水力发电机组优化运行的算例 94

第四节 基于进化规划原理的水电站水力发电机组优化运行算法 101

参考文献..... 103

第七章 预估水轮机运行状态的数学模型 104

第一节 人工神经网络综论 104

第二节 多层前向人工神经网络的基本原理 106

第三节 应用神经网络建立水轮机输入输出参数之间关系的数学模型 112

第四节 自组织映射人工神经网络及其在水轮机运行状态诊断中的应用 119

参考文献..... 124

第八章 评价水轮机设计方案的数学模型 125

第一节 层次分析法的基本分析过程 125

第二节 用层次分析法建立评价水轮机选型设计方案的数学模型 129

参考文献..... 132

第一章 反映水轮机工作参数 间关系的数学模型

在水轮机的水力设计和选型设计中，要了解和研究水轮机工作参数间的关系，比较典型的是要了解和研究水轮机的一些参数与水轮机比转速之间的关系。本章重点介绍如何通过数据拟合方法，建立水轮机工作参数间关系的一些方法和技巧。

第一节 数据拟合问题

在科学研究、工程技术问题和社会经济领域中，常常需要研究变量与变量之间的关系。由于各种复杂的原因，在许多情况下，变量之间的关系不能用准确的解析式描述，而是通过试验、观测，得到一些反映变量之间关系的数据，通过这些数据，找出变量之间的内在关系，同时，通过这些数据和一定的算法，求出一个解析式，用以近似地描述变量之间的关系，并供实际应用。

将通过数据求出近似地描述变量之间关系的解析式的方法，称为数据拟合方法。例如，经过试验，得到反映变量 x 、 y 之间关系的数据，如表 1-1 所示。

表 1-1 反映变量 x 、 y 之间关系的数据												
序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.20	0.21	0.22
y	42.0	43.5	45.0	45.5	45.0	47.5	49.0	53.0	50.0	55.0	55.0	60.0

应用数据拟合方法，可以建立拟合函数 $f(x)$ 近似反映变量 x 、 y 之间关系的解析式为

$$f(x) = 28.5340 + 130.6022x$$

(1-1)

这里，将解析式 (1-1) 称为拟合表 1-1 中所列数据的拟合函数，其中 28.5340 和 130.6022 称为拟合函数中拟合系数的值。

推广到一般，设已知数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, m$)，用函数 $f(x)=f(c_j, x)$ 对这些数据拟合，称函数 $f(x)=f(c_j, x)$ 为拟合函数，拟合函数中的系数 c_j ($j=0, 1, \dots, n$) 称为拟合系数。

在数据拟合方法中，主要解决两个方面的问题，一个问题是如何根据针对数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, m$)，选择拟合函数 $f(x)=f(c_j, x)$ 的具体形式；另一个问题是如何确定拟合函数中拟合系数 c_j ($j=0, 1, \dots, n$) 的值。



第二节 线性函数数据拟合方法

一、线性函数数据拟合问题

设已知数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, m$), 如果可以用广义形式的函数

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) \quad (1-2)$$

对这些数据拟合, 则称为线性函数数据拟合问题。

拟合函数式 (1-2) 中, $\varphi_j(x)$ ($j=0, 1, \dots, n$) 称为拟合基函数, 且彼此线性无关。 c_j ($j=0, 1, \dots, n$) 为拟合系数。

例如, 在第一节例子中, 拟合函数式 (1-2) 中的拟合基函数分别是

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x$$

拟合系数 $c_0 = 28.5340$, $c_1 = 130.6022$ 。由于拟合函数式 (1-2) 是一个线性式子, 可以采用较为简单的方法, 确定拟合系数 c_j ($j=0, 1, \dots, n$) 的值。

二、最小二乘法确定拟合系数的计算原理

在选定拟合基函数 $\varphi_j(x)$ ($j=0, 1, \dots, n$) 以后, 可以通过最小二乘法确定拟合系数 c_j ($j=0, 1, \dots, n$) 的值, 具体计算原理如下。

设用拟合函数式 (1-2) 对数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, m$) 进行拟合, 拟合值是 $f(x_i)$, 定义拟合误差为

$$\delta_i = y_i - f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1-3)$$

确定拟合函数式 (1-2) 中的拟合系数 c_j ($j=0, 1, \dots, n$), 使拟合误差 δ_i 的平方和为最小, 即使

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^m \delta_i^2 = \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^m [y_i - c_0\varphi_0(x) - c_1\varphi_1(x) - \dots - c_n\varphi_n(x)]^2 \end{aligned} \quad (1-4)$$

为最小。

由式 (1-4) 可以看出, 在选定拟合基函数 $\varphi_j(x)$ ($j=0, 1, \dots, n$) 以后, 有

$$I = f(c_0, c_1, \dots, c_n) \quad (1-5)$$

根据多元函数极值原理, 为使 I 最小, 应该有

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (1-6)$$

成立。

将式 (1-4) 代入式 (1-6) 中, 得出

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c_j} &= -2 \sum_{i=1}^m [y_i - c_0\varphi_0(x) - c_1\varphi_1(x) \\ &\quad - \dots - c_n\varphi_n(x)] \varphi_j(x) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1-7)$$



对式 (1-7) 进行整理, 得到求出拟合系数 $c_j (j=0, 1, \dots, n)$ 的方程组为

$$A \cdot C = B \quad (1-8)$$

其中, 矩阵

$$A = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m \varphi_0(x_i) \varphi_0(x_i) & \sum_{i=1}^m \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^m \varphi_0(x_i) \varphi_n(x_i) \\ \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_i) \varphi_0(x_i) & \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_i) \varphi_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_i) \varphi_n(x_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^m \varphi_n(x_i) \varphi_0(x_i) & \sum_{i=1}^m \varphi_n(x_i) \varphi_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^m \varphi_n(x_i) \varphi_n(x_i) \end{vmatrix} \quad (1-9)$$

列向量

$$C = (c_0, c_1, \dots, c_n)^T \quad (1-10)$$

以及

$$B = \left[\sum_{i=1}^m \varphi_0(x_i) y_i, \sum_{i=1}^m \varphi_1(x_i) y_i, \dots, \sum_{i=1}^m \varphi_n(x_i) y_i \right]^T \quad (1-11)$$

方程组式 (1-8) 是一个线性代数方程组, 一般称为法方程。由于矩阵 A 是一个对称正定的矩阵, 因此法方程有唯一的解, 可以采用主元素高斯消去法解法方程。

三、拟合过程

在已知数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, m)$ 以后, 选定拟合函数中的基函数 $\varphi_j(x) (j=0, 1, \dots, n)$, 将数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, m)$ 代入式 (1-9) 和式 (1-11) 中, 求得矩阵 A 和列向量 B , 然后解法方程式 (1-8), 求出拟合系数 $c_j (j=0, 1, \dots, n)$, 这样就得到了拟合函数式 (1-2)。

求得拟合函数以后, 通过计算拟合误差式 (1-3), 来检验拟合精度, 一般不仅要计算拟合误差的最大值, 还要计算拟合误差的平均值, 以判断拟合函数的实际应用价值。

在一般情况下, 可以选用幂函数系列, 作为拟合函数式 (1-2) 中的拟合基函数, 即选取

$$\varphi_j(x) = x^j (j=0, 1, \dots, n) \quad (1-12)$$

这样, 法方程式 (1-8) 中的矩阵 A 和列向量 B 变为

$$A = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m 1 & \sum_{i=1}^m x_i & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^n \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{2n} \end{vmatrix} \quad (1-13)$$



和

$$B = \left[\sum_{i=1}^m y_i, \sum_{i=1}^m x_i y_i, \dots, \sum_{i=1}^m x_i^n y_i \right]^T \quad (1-14)$$

四、算例

经查 ZZ560—46 水轮机的模型综合特性曲线, 得最优单位转速下水轮机空蚀系数与单位流量关系的数据, 如表 1-2 所示。

表 1-2 ZZ560—46 水轮机最优单位转速下空蚀系数与单位流量关系的数据

序号 i	1	2	3	4	5	6
单位流量 Q_{11i}	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
空蚀系数 σ_i	0.300	0.321	0.374	0.446	0.531	0.630

用拟合函数

$$f(Q_{11}) = c_0 + c_1 Q_{11} + c_2 Q_{11}^2 \quad (1-15)$$

对表 1-2 中的数据 (Q_{11i}, σ_i) 进行拟合。取 Q_{11} 为 x , σ 为 y , 经计算, 法方程中由式 (1-13) 定义的矩阵 A 为

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 7.8 & 10.84 \\ 7.8 & 10.84 & 15.912 \\ 10.84 & 15.912 & 24.3760 \end{vmatrix} \quad (1-16)$$

由式 (1-14) 定义的列向量 B 为

$$B = (2.602, 3.6178, 5.32628)^T \quad (1-17)$$

将式 (1-16) 和式 (1-17) 代入法方程中, 解得拟合系数是 $c_0 = 0.36070$, $c_1 = -0.26525$, $c_2 = 0.23125$ 。最后得到拟合函数为

$$f(Q_{11}) = 0.36070 - 0.26525 Q_{11} + 0.23125 Q_{11}^2 \quad (1-18)$$

该拟合函数的拟合值以及拟合误差如表 1-3 所示。

表 1-3 ZZ560—46 水轮机最优单位转速下空蚀系数拟合结果

序号 i	1	2	3	4	5	6
原空蚀系数值 σ_i	0.300	0.321	0.374	0.446	0.531	0.630
拟合值 $f(Q_{11i})$	0.297	0.327	0.375	0.443	0.528	0.633
拟合误差 δ_i	0.003	-0.006	-0.001	0.003	0.003	-0.003

从表 1-3 中数据可以看出, 用拟合函数式 (1-18) 反映表 1-2 中数据 (Q_{11i}, σ_i) 所表示的 ZZ560—46 水轮机, 在最优单位转速下的空蚀系数与单位流量之间的关系是可行的。

线性函数数据拟合方法在工程实际中得到了广泛的应用, 在某些情况下, 线性函数数据拟合方法又是非线性函数数据拟合方法的基础。



第三节 非线性函数数据拟合方法

一、非线性函数数据拟合问题

在线性函数数据拟合方法中, 采用线性函数式 (1-2) 作为拟合函数, 拟合数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, m$), 但在许多情况下, 数据 (x_i, y_i) 所反映的变量 y 和 x 之间的关系是非线性的, 这时必须用非线性函数, 如

$$f(x) = c_0 + c_1 x^{c_2} \quad (1-19)$$

等, 作为拟合函数, 对相应数据进行拟合。选用非线性函数作为拟合函数的数据拟合问题, 称为非线性函数数据拟合问题。

由于非线性拟合函数中, 含有一些非线性拟合系数, 如式 (1-19) 中的 c_2 , 导致求拟合系数的计算过程比较复杂。结合水轮机领域中的实际应用, 本节只给出一些简单的非线性函数数据拟合方法, 比较复杂的方法, 可以参考有关专著。

二、基于线性函数数据拟合方法的非线性函数数据拟合方法

(一) 一维优化拟合方法的拟合原理

这里以选用函数式 (1-19) 作为拟合函数为例, 给出一种基于线性函数数据拟合方法的非线性函数数据拟合方法, 一维优化拟合方法。

假设已经给出了 c_2 的值, 并作变量变换

$$x^{c_2} \rightarrow t \quad (1-20)$$

则函数式 (1-19) 转化为线性函数

$$f(t) = c_0 + c_1 t \quad (1-21)$$

对给出的数据 (x_i, y_i) , 也采用式 (1-20) 的变换, 转化为数据 (t_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, m$)。用线性函数式 (1-21) 对数据 (t_i, y_i) 进行拟合, 根据本章第二节给出的线性函数数据拟合方法, 可以写出确定拟合系数 c_0 、 c_1 的法方程为

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m 1 & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m t_i y_i \end{vmatrix} \quad (1-22)$$

解该方程, 可以方便地求出拟合系数 c_0 和 c_1 。

当拟合系数 c_0 、 c_1 和 c_2 确定以后, 也就确定了拟合函数式 (1-19), 另外定义拟合的相对误差为

$$\bar{\delta} = \frac{f(x) - y}{y} \quad (1-23)$$

对于已知的 m 组数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, m$), 平均相对误差为

$$\Delta = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\bar{\delta}_i| = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left| \frac{f(x_i) - y_i}{y_i} \right| \quad (1-24)$$



这样,就可以用式(1-24)定义的平均相对误差 Δ 来评价拟合函数式(1-19)的拟合精度。由式(1-23)和式(1-24)不难看出, Δ 越小,拟合精度越高。而从上述拟合过程也可以看出, Δ 依赖于 c_2 的值。不同的 c_2 值,有不同的 Δ 值相对应,因此,有关系式 $\Delta=f(c_2)$ 存在。可以取不同的 c_2 值进行拟合计算,然后从多个 c_2 所对应的拟合结果中,选取 Δ 最小者,作为最终的拟合结果。这样就把一个非线性数据拟合问题,转化为一个一维优化计算过程,因此,将上述方法称为一维优化拟合方法,下面给出一个例子。

已知数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, 11$), 如表1-4所示, 用拟合函数式(1-19)对这些数据进行拟合。

表 1-4		已 知 数 据									
序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
y_i	1.737	2.183	2.534	2.792	3.043	3.314	3.441	3.704	3.885	4.040	4.130

当取 $c_2=0.35$ 时, 法方程式(1-22)为

$$\begin{vmatrix} 11 & 15.4988 \\ 15.5 & 22.9166 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34.8053 \\ 51.6148 \end{vmatrix}$$

解该方程组, 求得 $c_0=-0.1978$, $c_1=2.3861$, 相应的平均相对误差 $\Delta=0.01181$ 。

取不同的 c_2 值, 经过类似于取 $c_2=0.35$ 时的拟合计算, 求得各 c_2 下, 拟合值的平均相对误差 Δ 值, 如表1-5所示。

表 1-5		一维优化拟合计算过程							
c_2	-0.15	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	1.05
Δ	0.0534	0.0275	0.0192	0.0118	0.0073	0.0087	0.0148	0.0209	0.0411

比较表1-5中的 Δ 值, 发现当取 $c_2=0.45$ 时, 平均相对误差最小, 因此, 将 $c_2=0.45$ 作为优化计算的最优值, 相应的有 $c_0=0.4652$, $c_1=1.7205$, 最后得到拟合表1-4中数据的拟合函数式

$$f(x) = 0.4652 + 1.7205x^{0.45}$$

相应的拟合值以及相对拟合误差列如表1-6所示, 表中数据表明, 拟合结果是比较理想的。

表 1-6		拟合结果及拟合误差分析				
序号 i	1	2	3	4	5	6
y_i	1.737	2.183	2.534	2.792	3.043	3.314
$f(x_i)$	1.725	2.186	2.530	2.815	3.064	3.286
相对误差 (%)	-0.69	0.14	-0.16	0.82	0.69	-0.84
序号 i	7	8	9	10	11	
y_i	3.441	3.704	3.885	4.040	4.130	
$f(x_i)$	3.488	3.676	3.850	4.015	4.170	
相对误差 (%)	1.37	-0.76	-0.90	-0.62	0.96	



可以采用一些一维优化的方法，如经典的 0.618 法、近代的趋化算法等，指导对非线性拟合系数的寻优过程，下面给出趋化算法用于一维优化拟合的计算步骤。

(二) 趋化算法用于一维优化拟合的计算步骤

趋化算法模拟了细菌的趋化性，是一种启发性的智能算法，针对上述非线性函数数据拟合问题，下面给出具体的拟合计算步骤。

(1) 取变量 $t=0$ ，给出非线性拟合系数 c_2 的初值，解法方程式 (1-22)，求出拟合系数 c_0 、 c_1 的值，进而求出式 (1-24) 定义的 Δ 值，并记为 Δ_0 。

(2) 如果 $t < t_{\max}$ ，产生一个随机增量 Δc_2 (Δc_2 是一个可正可负的小数)，执行第 (3) 步；否则，转向第 (5) 步。

(3) 将 Δc_2 叠加到 c_2 上，即取 $c_2 + \Delta c_2 \rightarrow c_2$ ，同样解法方程式 (1-22)，求出拟合系数 c_0 、 c_1 的值，进而求出式 (1-24) 定义的 Δ 值，并记为 Δ_1 。

(4) 如果 $\Delta_1 < \Delta_0$ ，取 $\Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ ， $t=0$ ，转向第 (3) 步继续计算；否则，取 $t+1 \rightarrow t$ ，转向第 (2) 步。

(5) 取最后保留的 Δ_0 相应的拟合系数 c_0 、 c_1 和 c_2 的值，作为最终的拟合结果。

上述计算过程，是一个启发计算的过程，其中的参数 $t_{\max}$ 是一个比较大的数，如 100 等，在计算过程中，如果连续产生 $t_{\max}$ 个 Δc_2 ，仍然不能满足 $\Delta_1 < \Delta_0$ ，说明已经求得了最优的 c_2 值。

以上计算步骤相应的计算工作量比较大，应编制程序在计算机上完成计算过程。下面给出一个应用趋化算法，建立反映水轮机工作参数间关系的经验公式的计算例子。

从水轮机型谱上，查取混流式模型水轮机在最优工况下的有关参数，如表 1-7 所示。

表 1-7 混流式模型水轮机在最优工况下的有关参数

序号	1	2	3	4	5	6	7
机型	HL100	HL120	HL160	HL180	HL200	HL220	HL240
特征比转速 n_s	100	120	160	180	200	220	240
单位流量 Q_{11}	0.248	0.352	0.638	0.792	0.880	1.100	1.210
单位转速 n_{11}	61.5	62.5	67.5	67.0	68.0	70.0	72.0
空蚀系数 σ	0.022	0.053	0.059	0.078	0.085	0.129	0.195

选取形式为

$$f(\bar{n}_s) = c_0 + c_1 e^{c_2 \bar{n}_s}$$

的拟合函数，分别拟合表 1-7 中数据所反映的关系 $Q_{11} = f(n_s)$ 、 $n_{11} = f(n_s)$ 和 $\sigma = f(n_s)$ ，其中，为了计算方便，取 $\bar{n}_s = n_s/100$ 。应用趋化算法，求出拟合系数 c_0 、 c_1 和 c_2 的值，如表 1-8 所示。

表 1-8 拟合系数值

拟合系数	c_0	c_1	c_2
拟合单位流量与比转速之间的关系 $Q_{11} = f(n_s)$	-2.036179	1.769073	0.255557
拟合单位转速与比转速之间的关系 $n_{11} = f(n_s)$	46.08044	11.12525	0.352453
拟合空蚀系数与比转速之间的关系 $\sigma = f(n_s)$	0.00407622	0.00541229	1.452



表 1-8 中所列拟合系数 c_0 、 c_1 、 c_2 对应的拟合曲线绘制在图 1-1~图 1-3 中。

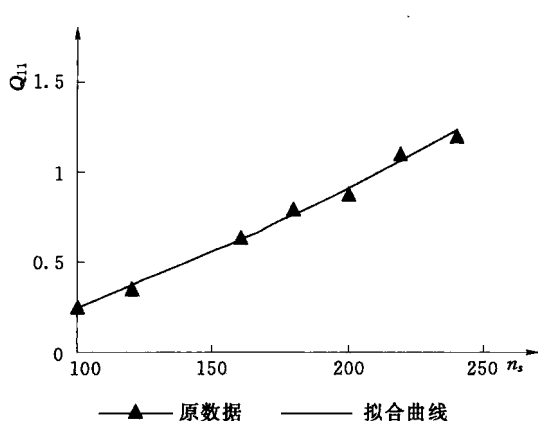


图 1-1 对 $Q_{11}=f(n_s)$ 的拟合曲线

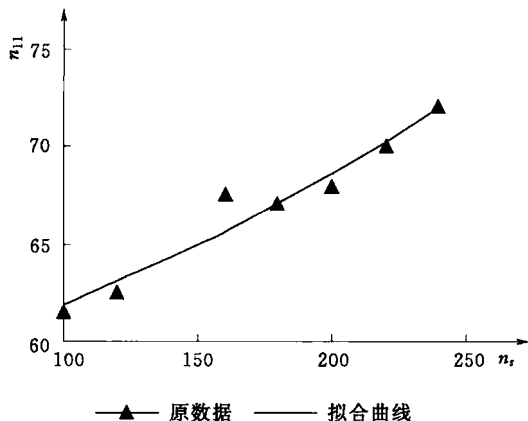


图 1-2 对 $Q_{11}=f(n_s)$ 的拟合曲线

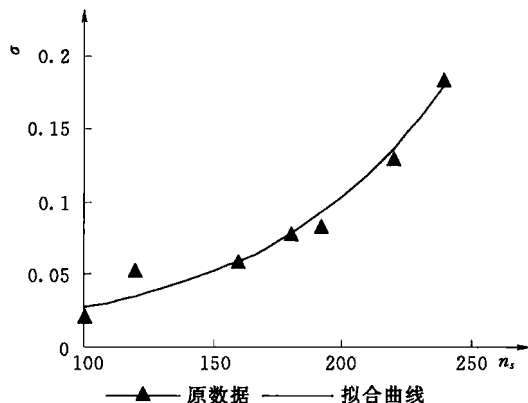


图 1-3 对 $\sigma=f(n_s)$ 的拟合曲线

(三) 转化为线性函数数据拟合的非线性拟合方法

当选用的非线性拟合函数比较简单的时候,可以通过适当的变换,将非线性拟合问题转化为线性函数数据拟合过程。下面仍然通过一个具体例子,给出具体拟合计算过程。

已知列在表 1-9 中测试数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, 11$),用非线性拟合函数

$$f(x) = c_0 e^{c_1 x} \quad (1-25)$$

对这些数据进行拟合。

表 1-9

已知测试数据

序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
y_i	2.21	2.72	3.41	4.21	5.29	6.73	8.26	10.52	13.17	16.46	20.47

对式 (1-25) 两边取自然对数,且设 $F(x) = \ln f(x)$,则式 (1-25) 转化为线性函数



$$F(x) = a + c_1 x \quad (1-26)$$

其中, $a = \ln(c_0)$ 。用同样的变换方式, 使数据 y_i 转换为新的数据 Y_i , 也就是取 $Y_i = \ln(y_i)$, 这样就将数据 (x_i, y_i) 转换为新的数据 (x_i, Y_i) ($i=1, 2, \dots, 11$)。用线性拟合函数式 (1-26) 对数据 (x_i, Y_i) 进行拟合, 由于是线性拟合问题, 可以容易地求出确定拟合函数式 (1-26) 中拟合系数 a, c_1 的法方程是

$$\begin{vmatrix} 11 & 33 \\ 33 & 126.5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a \\ c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20.89223 \\ 75.00675 \end{vmatrix}$$

解法方程, 求得 $a=0.5542$, $c_1=0.4484$ 。取 $a=\ln c_0$ 的逆变换, 有

$$c_0 = e^a = e^{0.5542} = 1.7405$$

最后得出拟合函数式 (1-25) 的具体形式为

$$f(x) = 1.7405e^{0.4484x}$$

该拟合函数的拟合值如表 1-10 所示, 拟合值的平均相对误差为 0.006868。

表 1-10

拟合结果比较

序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
y_i	2.21	2.72	3.41	4.21	5.29	6.73	8.26	10.52	13.17	16.46	20.47
$f(x_i)$	2.18	2.73	3.41	4.27	5.34	6.68	8.36	10.46	13.09	16.38	20.50

通过以上例子可以看出,在将一些简单的非线性函数数据拟合问题转化为线性函数数据拟合问题的过程中,首先要通过适当的数学变换,将非线性拟合函数转化为线性拟合函数,同时对被拟合的数据也要做同样的数学变换,然后通过线性函数数据拟合方法,求出拟合系数,最后,作必要的逆变换,求出原非线性拟合函数。

这种将非线性函数数据拟合问题线性化的方法，也有明显的不足，主要是求出的拟合结果，不是最佳的。因为是在线性化以后，以式（1-4）定义的误差平方和为最小作为出发点，求拟合系数，并不是以原来的拟合函数所对应的误差平方和为最小作为出发点。因此，将非线性函数数据拟合问题转化为线性函数数据拟合问题的处理方法，只适用于一般对拟合精度要求不高的场合。

以上针对水轮机领域的问题,给出了一些简单的数据拟合方法,其中重点介绍了求取拟合系数的计算原理和计算过程。在具体应用数据拟合方法时,还应该对所拟合的数据进行了解和检查,必要时剔除个别异常的数据,以保证拟合结果尽可能地能够反映实际问题的内在规律。

第四节 水轮机比转速的统计公式

一、反映水轮机工作参数间关系的统计公式

在水轮机的水力设计，或是在确定新建水电站中水轮机的基本参数的时候，必须使用反映水轮机工作参数间关系的一些统计公式。这些统计公式中，比较典型的是反映水轮机



比转速与水轮机额定工作水头间关系的公式，因此，本节以建立基本的水轮机比转速统计公式为例，给出建立反映水轮机工作参数间关系的有关公式的方法。

二、建立水轮机比转速统计公式的方法

比转速 n_s 是水轮机的一个基本特征参数，它综合反映了水轮机的能量、空蚀、效率等特性，也反映了不同国家、地区，不同年代的水轮机设计制造水平。一般要收集大量已经建成或正在建设的水电站的工作参数，找出其中水轮机比转速 n_s 与水轮机额定工作水头 H_r 的对应数据，然后选择一个合适的拟合函数，对这些数据进行拟合，从而得到水轮机比转速的统计公式。

经收集，得到我国和国外一些国家以及一些公司提出的混流式水轮机比转速统计公式，如表 1-11 所示。

表 1-11 混流式水轮机比转速统计公式

序号	国家或者公司名称	比转速统计公式的具体形式
1	20 世纪 80 年代国际先进水平	$n_s = 2250 H_r^{-0.5}$
2	日本 JEC—68	$n_s = \frac{20000}{H_r + 20} + 30$
3	美国垦务局 1976 年	$n_s = 2000 H_r^{-0.5}$
4	瑞典 KMW 公司	$n_s = 2000 H_r^{-0.5}$
5	意大利 Siervo 统计值	$n_s = 3470 H_r^{-0.625}$
6	中国某文献中给出	$n_s = 3912 H_r^{-0.659}$
7	法国奈而尔皮克统计值	$n_s = 2200 H_r^{-0.5}$
8	俄罗斯 AM3 推荐	$n_s = 2300 H_r^{-0.5}$
9	日立公司推荐	$n_s = 2881.5 H_r^{-0.5}$
10	哈尔滨大电机研究所推荐公式	$n_s = 2357 H_r^{-0.538}$

从 50m 到 550m，中间间隔 25m，取 21 个水轮机额定工作水头 H_r 的值，分别代入表 1-11 中所列的各个比转速统计公式中，计算出相应的比转速，取其平均值，如表 1-12 所示。表中所列数据，从比转速角度，基本上代表了目前国内外混流式水轮机生产制造的平均水平。根据这些数据，建立一个混流式水轮机比转速的统计公式，对于混流式水轮机的选型设计是有意义的。下面采用非线性函数数据拟合方法，建立混流式水轮机比转速的统计公式。

表 1-12 混流式水轮机比转速的数据

序号 i	1	2	3	4	5	6	7
水头 H_r (m)	55	75	100	125	150	175	200
比转速 n_s	312.87	250.65	214.09	189.48	171.52	157.71	146.67
序号 i	8	9	10	11	12	13	14
水头 H_r (m)	225	250	275	300	325	350	375
比转速 n_s	137.61	130.00	123.49	117.85	112.90	108.51	104.59