普通高等教育“十一五”国家级规划教材

国家理科基地教材

实变函数教程

（第二版）

刘培德　编著

1
02

科学出版社

O174.1
L650.02

郑州大学 *04010778293+*

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

国家理科基地教材

实变函数教程

(第二版)

刘培德　编著

郑州大学图书馆
2012-06-22
藏书

科学出版社

北京

O174.1
L650.02

内 容 简 介

本书主要讲述Lebesgue测度与Lebesgue积分理论. 全书共分为6章, 第1章介绍Cantor关于集合的势论和n维欧氏空间中的点集拓扑知识; 第2、3两章讲述集合的测度与可测函数; 第4章讲解有限和无穷测度空间上的Lebesgue积分及其基本性质, 包括极限定理与Fubini定理; 第5章L^p空间是Lebesgue积分理论的延伸, 也是以公理方法处理数学问题的一个范例; 第6章叙述微分与积分的关系, 包括抽象测度的Radon-Nikodym定理. 本书沿用Lebesgue原始的途径引进可测性, 比较直观并具有启发性; 全书叙述既简洁又不降低理论的深度, 既重视理论的讲解又重视积分的实际计算. 正文之后设有3个附录, 包括Stieltjes积分简介, Fourier级数的点态收敛定理和习题选解.

本书可作为综合性大学、师范院校数学各专业本科生教材, 也可作为相关专业本科生以及研究生和有关教师的学习与教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数教程/刘培德编著. —2版. —北京: 科学出版社, 2012
普通高等教育"十一五"国家级规划教材·国家理科基地教材
ISBN 978-7-03-033760-3

I. ①实… II. ①刘… III. ①实变函数-高等学校-教材 IV. ①O174.1
中国版本图书馆CIP数据核字(2012) 第038744号

责任编辑: 姚莉丽 王胡权 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年8月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2012年4月第 二 版 印张: 12 1/2
2012年4月第三次印刷 字数: 250 000

定价: 25.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

"实变函数" 是大学本科阶段的一门基础课程, 中心内容是讲述 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分, 其基本理论产生于 19、20 世纪之交.

毫无疑问, 由 Newton 和 Leibniz 等人所开创, 后经 Cauchy、Riemann 加以规范的积分理论 ——Riemann 积分 (简称为 (R) 积分) 在微积分和科学技术发展的历史上具有划时代的意义. 我们知道 Newton 和 Leibniz 在微积分学中的最大贡献是发现了微分与积分是一对互逆的运算. 就微积分所面对的基本问题之一 —— 面积计算问题而言, (R) 积分的出现原则上确定了任何连续或逐段连续曲线所遮盖的下方图形有一个确定的面积, 从而任何连续曲线所包围的图形都有一个确定的面积, 并且只要曲线足够好, 面积的数值也可以具体求出来. 考虑到当时所说的函数就是指逐段可以用解析式表达的对象 (函数的现代定义是 19 世纪中期才确定下来的), 可以说 (R) 积分一举解决了当时 "所有" 曲线包围的曲边形的面积问题, 并且给出了计算面积的统一方法. 从这个意义上来说, (R) 积分的意义是不可估量的.

但是历史是发展的, 随着科学技术的进步, 自然科学对数学的要求越来越高, 理论上越来越精细、应用上越来越广泛, (R) 积分的不足之处也逐渐暴露出来. 以至于到了 19 世纪末, 数学家们已经认识到必须用一种新的积分代替 (R) 积分, 否则分析数学就难以取得新的进展.

(R) 积分首先限制了可积函数类, 它基本上只适用于连续函数类, 当不连续点过多时可积性就成了问题. 在应用积分处理函数序列的极限问题时 (R) 积分显得十分笨拙, 它对于收敛性的要求过高, 随着研究问题越来越复杂, 这些都成为致命的缺陷. 19 世纪末, 公理化和大规模地分类处理数学问题的方法蔚然成风, (R) 积分就更加不能适应.

从 19 世纪后期开始, 不少数学家都致力于 (R) 积分的改造, 其中首先是关于集合的测度理论的改造, 包括 Stieltjes, Peano, Jordan, Borel, 而取得最大成功的是法国数学家 Lebesgue. 他在 1902 年发表的论文《积分、长度与面积》中提出了至今我们仍在沿用并且成为本书主题的测度与积分理论, 在以后的几年里又对它进行了完善和后续的工作. 甚至在这一理论取得成功之后, Vitali, Carathéodory, Riesz 等人还对它进行了补充和进一步的研究, 为之增色. 后来 Radon, Fréchet, Daniell 等又发展了抽象测度空间以及局部紧拓扑空间上的测度与积分理论, 这些理论都是在 Lebesgue 积分 (简称 (L) 积分) 理论的基础上建立和发展起来的.

(L) 积分比 (R) 积分有着明显的优越性, 它不仅把积分扩大到比连续函数大得多的一类函数上去而且使积分的极限运算更加便捷, 特别是凡 (R) 可积的函数一定是 (L) 可积的, 从而使得在老的积分体系下遇到的麻烦迎刃而解. (L) 积分理论

充满了新思想和新方法, 是对 (R) 积分的真正革新. 它的出现很好地适应了科学与技术、理论与应用发展的需要, 由此还推动了数学和自然科学中很多别的学科的进一步发展. 要罗列 20 世纪数学和自然科学中伴随 (L) 积分的出现产生或得到强劲发展的学科目录, 那将是一个长长的名单, 其中包括调和分析、概率论、泛函分析、微分方程、积分方程、逼近论与计算数学、动力系统理论、量子力学、理论物理, 等等. 因此说 (L) 积分理论的产生带动了 20 世纪数学的繁荣, 是一点也不过分的.

本书分 6 章讲述有关内容. 第 1 章叙述 Cantor 关于集合的势论和欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集拓扑知识; 第 2 章叙述集合的 (L) 测度; 第 3 章讲述函数的可测性与可测函数的构造, 包括函数序列几种收敛性之间的关系; 第 4 章讲述有限和无穷测度空间上的 Lebesgue 积分及其基本性质, 包括极限定理与 Fubini 定理; 第 5 章 L^p 空间是 (L) 积分理论的延伸, 也是以公理方法处理数学问题的一个范例; 第 6 章叙述微分与积分的关系, 包括抽象测度的 Radon-Nikodym 定理.

本书内容曾在武汉大学基础数学、概率统计、应用数学与计算数学各专业的本科生中讲授, 在编写本教材时我们注意了使学生既领会基本理论, 又掌握计算技能和解决问题的思想方法, 材料的选取尽可能适合数学各专业的需要. 在不降低理论深度的情况下, 内容尽可能简洁. 我们还采取了与一些其他教材不同的作法, 例如本书从具体讲解 $\mathbf{R}^n$ 中的测度入手, 以内外测度相等引入可测集. 这是 Lebesgue 原始的途径, 优点是直观和富有启发性. 在讲完了 $\mathbf{R}^n$ 中点集的测度之后, 又专开一节讲述几种引进方法的等价性, 并介绍了 σ 代数的知识. 本书还专设了 (L) 积分的"可逼近性、平均连续性和唯一性"以及"积分的计算"两节, 以突出 (L) 积分的特征及其优越性, 并希望能起到促进读者主动应用 (L) 积分的导向作用. 书中还精选了一定数量的习题, 其中一些是有一定难度的, 但通过解题对于充分理解与掌握该课程的思想方法是很有帮助的.

当然, 相对于经典分析, 实变函数充溢着新的创意, 它深邃的思想、缜密的方法以及各种技巧的综合运用使之比较以往的课程存在一定跨跃. 学生开始学习时往往会感到不易掌握. 然而它知识密集, 信息量大, 是进一步掌握现代数学理论, 开展理论和应用研究必不可少的基础, 相信深入进去一定会受益良多. 根据我们的实践, 如果每周 4 学时授课, 一学期完全可以讲完本书内容. 使用本书作为教材的教师也不必拘泥, 尽可在全面把握书中内容的基础上在繁简轻重上有所侧重和选择.

作者在此对于为本书写作提供过帮助的人们表示诚挚地感谢. 趁再版的机会, 作者改正了书中某些文字错漏, 改进了部分叙述, 特别是新增了 3 个附录, 即 Stieltjes 积分简介, Fourier 级数的点态收敛定理以及习题选解, 希望借此进一步扩展一些实变函数的知识并且为解题起到某些示范作用. 对于书中错漏, 作者再次诚恳欢迎读者给予批评指正.

编 者

2012 年 1 月

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

符 号 表

$\mathbf{R}, \mathbf{R}^n$	实数域, n 维欧氏空间
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{Q}$	有理数域
$\mathbf{N}$	自然数全体
$\varnothing$	空集
$a \in A, a \overline{\in} A$	元素 a 属于 A, a 不属于 A
$A \cup B, A \backslash B, A \cap B$	集合 A, B 的并, 差, 交
A^c(或 $C_X A$)	集合 A 关于空间 X 的余集
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$	集合序列 A_n 的上限集, 下限集, 极限
$\varphi(A), \varphi^{-1}(A)$,	集合 A(在映射 φ 之下) 的象, 逆象
$A \sim B, \overline{\overline{A}}$	集合 A 与 B 对等, A 的势
a, c(作为势的符号)	可数集的势, 连续统的势
2^μ	势为 μ 的集合之幂集的势
$d(x, y)$	两点 x, y 之间的距离
$d(x, A)$, $d(A, B)$	x 到集合 A 的距离, 两集合 A, B 的距离
$O(x, r)$	以 x 为中心, r 为半径的球
$\overline{E}$, E°, E', ∂E	集合 E 的闭包，内部，导出集, 边界
P_0	Cantor 三分点集
$\sup\limits_{n\geqslant 1} f_n$, $\inf\limits_{n\geqslant 1} f_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$	函数序列 f_n 的上确界, 下确界函数, 极限
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$	函数序列 f_n 的上极限, 下极限函数
m^*E, m_*E, mE	集合 E 的外测度, 内测度, 测度
$(\Omega, \Sigma), (\Omega, \Sigma, \mu)$	可测空间, 测度空间
a.e.	几乎处处成立
$f_n \Longrightarrow f$	f_n 依测度收敛于 f
f^+, f^-	f 的正部，负部
$f_n \to f$, a.e.	f_n 几乎处处收敛于 f
$\omega(x)$	函数在一点 x 的振幅

$[f]_N$	f 的截断函数
$A \times B$	集合 A 与 B 的乘积
$G(E, f)$	函数 f 关于集合 E 的下方图形
E_x	集合 E 关于 x 的截面
L^p, $\\|f\\|_p$	p 方可积函数空间, f 的 L^p 范数
L^∞, $\\|f\\|_\infty$	本性有界函数空间, f 的 L^∞ 范数
$f_n \to f(L^p)$	f_n 依 L^p 范数收敛于 f
$f_n \xrightarrow{w} f$	f_n 弱收敛于 f
(f, g)	函数 f 与 g 的内积
$f \perp g$, $f \perp E$	函数 f 与 g 正交, 函数 f 与集合 E 正交
$E^\perp$	集合 E 的正交补空间
span E	集合 E 中元素的线性组合全体
$\Phi(f)$	空间 L^2 上的线性泛函
$D^+f(x)$, $D_+f(x)$	f 在 x 的右上导数, 右下导数
$D^-f(x)$, $D_-f(x)$	f 在 x 的左上导数, 左下导数
$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$	f 在 $[a, b]$ 上的全变差
$BV[a, b]$	$[a, b]$ 上的有界变差函数全体
$AC[a, b]$	$[a, b]$ 上的绝对连续函数全体
μ^+, μ^-	测度 μ 的正部, 负部
$\|\mu\|(\Omega)$	测度 μ 的全变差
$BV(\Omega, \Sigma)$	(Ω, Σ) 上有界变差有号测度全体
$\mu \perp \nu$, $\nu \ll \mu$	μ, ν 互相奇异, ν 关于 μ 绝对连续
$\dfrac{d\nu}{d\mu}$	ν 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数
$\exists$	存在量词
$\forall$	全称量词
$\Rightarrow$	蕴含
$\Leftrightarrow$	等价于

目　录

第1章 集 合 论

尽管在数学中很早就处理过有关集合的各种问题, 包括集合的计数问题, 但是对于集合深入的和富有成效的研究是从 19 世纪末德国数学家 Cantor 开始的. 自那时以来, "集合论"已经发展为独立的数学分支, 并且由于其成功、自觉地应用集合论的思想与方法已成为各门数学学科的潮流, 以至于成为现代数学的标志之一.

本章将集中地介绍 Cantor 关于点集的势论, 特别地将着重于可数集和连续统的势. 本章的另一部分将叙述 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集拓扑, 它为后面各章提供了必要的基础.

1.1 集合与映射

正像几何学中的点一样, 集合是数学中的一个基本的研究对象, 不必借助于更基础的概念加以定义. 区间 $[a,b]$ 中的全体实数, 平面上三角形的全体, 素数的全体, $m\times n$ 阶实矩阵的全体等都可以看作集合的例子.

一个集合中的每个成员都称为它的元素. a 是集合 A 的元素记为 $a\in A$(读作 a 属于 A), a 不是集合 A 的元素记为 $a\bar{\in}A$(读作 a 不属于 A).

我们声称给定了一个集合就是指能够判定一个客观对象是或者不是这个集合的元素.

为了表示一个集合 A, 要么是列举 A 中的元素, 例如

$$A=\{a,b,c,d\},\qquad B=\{1,2,3,\cdots\};$$

要么给出 A 中元素满足的条件, 例如

$$A=\left\{x\in\mathbf{R}^1:0\leqslant x\leqslant 1\right\},\quad B=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:x^2+y^2<1\right\}$$

分别表示 $[0,1]$ 中的实数全体和平面上单位圆盘中的点的全体; 而

$$C=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n:\ a_i\in\mathbf{R},n\geqslant 1\right\}$$

则表示实系数多项式的全体, 等等.

对于两个集合 A 和 B, 当它们的元素完全相同时, 称为 A 与 B 相等, 记为 $A=B$. 称 A 是 B 的子集, 若 A 的每个元素都是 B 的元素, 即 $a\in A$ 时 $a\in B$, 记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B 或 B 包含 A). 明显地, $A=B$ 当且仅当 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$. 当 $A\subset B$, $A\neq B$ 时, 称 A 为 B 的真子集. 称不含任何元素的集合为空集, 记为 $\varnothing$. $\varnothing$ 是任何集合的子集.

1. 集合的运算

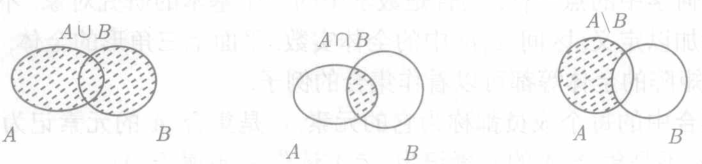
对于 A, B 两个集合, 由 A, B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \bigcup B$ (见图 1.1(a)). 同样地可以定义若干个集合 $A_1, \cdots, A_n$ 的并集 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, 或者一族集合 A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ 的并集 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, 它们是所有这些集合中的元素全体构成的集合. 由这个定义和前面所说的关于集合的表示方法我们知道

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x : \exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\}.$$

对于集合 A, B, 同时属于 A 与 B 的元素的全体称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \bigcap B$(见图 1.1(b)). 同样的可以定义若干个或一族集合的交, 例如 $A_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ 的交

$$\bigcap_{\lambda \in A} A_\lambda = \{x : \forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\}.$$

属于 A 而不属于 B 的元素全体称为 B 关于 A 的差集, 记为 $A \backslash B$(见图 1.1(c)). 有时候我们所讨论的集合都是某一个基本集合 X 的子集, 称这个基本集合是一个空间. 称集合 B 关于空间 X 的差为 B 的余集, 记为 $C_X B$ 或 B^c, 即 $B^c = X \backslash B$.



(a)　　(b)　　(c)

图 1.1

并、交、余是我们通常用到的关于集合的运算. 这些运算有以下规律: 首先是交换律和结合律,

$$A \bigcup B = B \bigcup A, \quad A \bigcap B = B \bigcap A,$$
$$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C, \quad A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C.$$

其次是分配律,

$$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C),$$
$$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$$

对于差和余, 还有

$$A \bigcup B = A \bigcup (B \backslash A), \quad A \bigcap (B \backslash A) = \varnothing.$$

当 $A, B \subset X$ 时,

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$A\backslash B = A\bigcap B^c.$$

特别地, 若 $A \subset B \subset X$, 则

$$B^c \subset A^c.$$

此外,

$$A\bigcap A = A\bigcup A = A, \quad A\bigcup\varnothing = A, \quad A\bigcap\varnothing = \varnothing,$$
$$A\bigcup A^c = X, \quad A\bigcap A^c = \varnothing.$$

这些都可以根据定义实际验证. 现在让我们证明下面的运算律.

定理 1.1.1(De Morgan) 若 $A, B \subset X$, 则

$$(A\bigcup B)^c = A^c\bigcap B^c, \qquad (A\bigcap B)^c = A^c\bigcup B^c. \tag{1.1.1}$$

证明 这里仅证第一式. 实际上, 若 $x \in (A\bigcup B)^c$, 即 $x \in X\backslash(A\bigcup B)$, 由定义 $x \in X$ 但 $x \bar{\in} A\bigcup B$. 此时明显地 $x \bar{\in} A$ 同时 $x \bar{\in} B$. 于是 $x \in A^c$ 同时 $x \in B^c$, 即 $x \in A^c\bigcap B^c$. 所以 $(A\bigcup B)^c \subset A^c\bigcap B^c$.

反过来, 若 $x \in A^c\bigcap B^c$, 则 $x \bar{\in} A$ 同时 $x \bar{\in} B$, 故 $x \bar{\in} A\bigcup B$. 于是 $x \in (A\bigcup B)^c$. 这说明 $A^c\bigcap B^c \subset (A\bigcup B)^c$. 总之, $(A\bigcup B)^c = A^c\bigcap B^c$.

上述的分配律和De Morgan 公式实际上对于任意一族集合都成立, 即若 $A, B_\lambda \subset X$, 则

$$A\bigcap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\bigcap B_\lambda), \quad A\bigcup\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A\bigcup B_\lambda),$$
$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda^c, \qquad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda^c.$$

读者不妨自行证明之.

例 1.1.1 设 $A_i = \left\{x:\ -1+\dfrac{1}{i} \leqslant x \leqslant 1-\dfrac{1}{i}\right\}$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = (-1, 1)$.

例 1.1.2 设 $B_i = \left\{x:\ -1-\dfrac{1}{i} < x < 1+\dfrac{1}{i}\right\}$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i = [-1, 1]$.

2. 集合序列的极限

设 $\{A_n\}$ 是一列集合, 属于无穷多个 A_n 的元素全体称为 $\{A_n\}$ 的上限集, 记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 至多不在有限个 A_n 中的元素全体称为 $\{A_n\}$ 的下限集, 记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 换句话说

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x:\ \exists\, n_k,\ n_k \uparrow \infty,\ x \in A_{n_k}\},$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x:\ \exists\, n_0,\ \forall n \geqslant n_0\,,\ x \in A_n\}.$$

若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 称此集合为 $\{A_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

定理 1.1.2　设 $\{A_n\}$ 是任一集合序列, 则

(1) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. (1.1.2)

证明　(1) 直接由定义得出, 现证 (2) 的第一式. 第二个式子可以类似地证明.

设 $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 故 $\exists n_k$, $n_k \uparrow \infty$, $x \in A_{n_k}$. 于是对于每个 n, 当 $n_k \geqslant n$ 时, $x \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 由 n 的任意性, $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

反之, 若 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 则 $\forall n$, $x \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 对于 $n=1$, 由 $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $\exists n_1 \geqslant 1$, 使得 $x \in A_{n_1}$. 又 $x \in \bigcup\limits_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists n_2 > n_1$ 使得 $x \in A_{n_2}, \cdots$. 如此下去得到 $n_k \uparrow \infty$, $x \in A_{n_k}$. 这说明 $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 于是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 总之第一式成立.

例 1.1.3　设 $A_{2n-1} = \left(0,\ 2+\dfrac{1}{n}\right)$, $A_{2n} = \left(-1-\dfrac{1}{n},\ 1\right)$, $n \geqslant 1$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [-1, 2], \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (0, 1).$$

称集合序列 $\{A_n\}$ 是单调递增的, 若 $A_n \subset A_{n+1}, n \geqslant 1$. 称 $\{A_n\}$ 是单调递减的, 若 $A_n \supset A_{n+1}, n \geqslant 1$.

定理 1.1.3　对于单调递增的集合序列 $\{A_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 对于单调递减的集合序列 $\{A_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

实际上在递增情况下, $\forall n \geqslant 1$, $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, 于是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 另一方面显然 $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, 故 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 递减的情况可类似证明.

3. 映射与对等

设 X, Y 是两个集合, 若对于每个 $x \in X$, 存在唯一的 $y \in Y$ 使得 y 与 x 对应, 称这个对应是 X 到 Y 中的映射, 记为 $\varphi: X \to Y$, 并且记 $y = \varphi(x)$.

设 φ 是从 X 到 Y 中的映射, 若 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ 时必有 $x_1 = x_2$, 则称 φ 是一一对应 (单射). 若 $\forall y \in Y$, 都存在 $x \in X$ 使得 $y = \varphi(x)$, 则称 φ 是 X 到 Y 上的映射 (满射). 一一的到上的映射又称为双射.

对于映射 $\varphi: X \to Y$, 若 $A \subset X, B \subset Y$, 今后记

$$\varphi(A) = \{y \in Y : y = \varphi(x), \forall x \in A\},$$

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \in X : \exists y \in B, \varphi(x) = y\}.$$

称 $\varphi(A)$ 为 A 的象, $\varphi^{-1}(B)$ 为 B 的原象. 注意这里 $\varphi^{-1}(B)$ 仅是一个记号, 并不以下面将要提到的逆映射的存在为前提. 对于集合的交与并的运算容易直接验证:

$$\varphi\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi(A_\lambda), \quad \varphi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi^{-1}(B_\lambda), \tag{1.1.3}$$

但是

$$\varphi\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \varphi(A_\lambda), \quad \varphi^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \varphi^{-1}(B_\lambda). \tag{1.1.4}$$

若 $\varphi: X \to Y$ 是映射, 称 $\varphi(X)$ 是 φ 的值域. 若 φ 是一一的, 则可以定义映射 $\varphi^{-1}: \varphi(X) \to X$, 使得当 $\varphi(x)=y$ 时, $\varphi^{-1}(y)=x$. 称 φ^{-1} 是 φ 的逆映射. 若 φ 还是到上的, 则 φ^{-1} 是从 Y 到 X 上的映射.

定义 1.1.1 若两个集合 A, B 之间存在着一一的到上的映射, 则称 A 与 B 是对等的, 记为 $A \sim B$. 此时也称 A 与 B 等势或者有相同的基数, 记为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

例 1.1.4 设

$$A = \{1, 2, 3, \cdots\}, \quad B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\},$$

$$C = \{2, 4, 6, \cdots\}, \quad D = \{1, 4, 9, \cdots\}.$$

则 A, B, C, D 彼此都是对等的.

实际上容易验证下面映射都是双射:

$$\varphi_1 : A \to B, \ \varphi_1(n) = \frac{1}{n};$$

$$\varphi_2 : A \to C, \ \varphi_2(n) = 2n;$$

$$\varphi_3 : A \to D, \ \varphi_3(n) = n^2, \quad \forall n \geqslant 1.$$

例 1.1.5 任何两个圆周是对等的, 任何两个线段也是对等的.

实际上, 不妨设两个圆是同心的, 让从圆心出发的同一射线上的两个点彼此对应, 则此对应是两圆之间的双射 (图 1.2). 又设两线段 A, B 如图 1.3 放置, O 是它们的公共端点, 让 ab 是平行于另外两个端点连线的线段, a 对应于 b, 则此映射是 A 到 B 的双射.

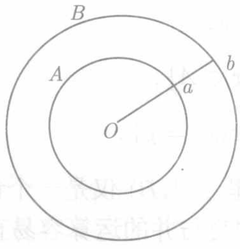


图 1.2

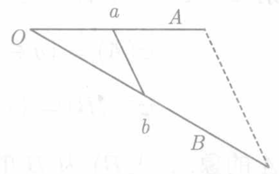


图 1.3

定理 1.1.4　设 $p>1$ 是某个自然数, 则对于 $[0,1]$ 中的每个实数 t, 对应有一列整数 $\{t_n:\ 0\leqslant t_n<p, n\geqslant 1\}$, 使得

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n}{p^n} \quad \text{或} \quad t=0.t_1t_2\cdots, \tag{1.1.5}$$

并且这种表达式除去形如 qp^{-n} 的数 (其中 q 是整数) 之外是唯一的.

证明　将 $[0,1)$ 分成 $[0,p^{-1}), [p^{-1},2p^{-1}), \cdots, [(p-1)p^{-1},1)$ 共 p 个半开半闭区间, 得到 $[0,1)$ 中每个实数 t 的第一个数字 t_1. 即 $[0,p^{-1})$ 中的每个 t 的 $t_1=0$, $[p^{-1},2p^{-1})$ 中的每个 t 的 $t_1=1,\cdots,[(p-1)p^{-1},1)$ 中的每个 t 的 $t_1=p-1$. 然后将这 p 个区间各自再等分成 p 个更小的区间, 由此得出 $[0,1)$ 中的每个 t 的 t_2, 例如在

$$[ip^{-1}+jp^{-2},\ ip^{-1}+(j+1)p^{-2})$$

$(0\leqslant i,j<p)$ 中的 t 对应的 $t_2=j,\cdots$. 如此下去, 每个 $[0,1)$ 中的点唯一对应于一个数列 $\{t_n:\ 0\leqslant t_n<p, n\geqslant 1\}$.

反过来, 对于每个数列 $\{t_n:\ 0\leqslant t_n<p, n\geqslant 1\}$, 级数 (1.1.5) 收敛于 $[0,1]$ 中的一个数. 但对于 qp^{-n} 这样的数, 会有两个不同的级数收敛于它. 这就是某个 t_{n_0} 之后每个 $t_n=0$ 的级数 (称之为 t 的有限表示) 和 t_{n_0-1} 之后每个 $t_n=p-1$ 的级数 (称之为 t 的无限表示).

注意 0 有唯一的表示 $0.00\cdots$; 1 可以表示为小数点后面每个位置上都是 $p-1$ 的数字或者 $1.00\cdots$.

称 $t\in[0,1]$ 对应的整数列 $\{t_n:\ 0\leqslant t_n<p, n\geqslant 1\}$ 是 t 的 p 进位表示, 由此我们知道下面的结论成立.

例 1.1.6　设 $p>1$ 是整数, 则 $[0,1]$ 中的全体实数与其 p 进位表示 (当有两种表示时, 都取有限表示或都取无限表示) 之间存在一一的到上的映射.

容易验证, 对等的关系具有如下性质:

(1) $A\sim A$.

(2) 若 $A\sim B$, 则 $B\sim A$.

(3) 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

若 A, B 是两个集合, A 与 B 的子集对等, 则称 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$. 若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 并且 A 不与 B 对等, 则称 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

称与 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 对等的集合 A 的势是 n. 称 A 是有限集, 若存在某个自然数 n, A 的势为 n. 不是有限集的集合称为无限集. 可以证明有限集不可能与它的任一真子集对等. 而例 1.1.4 表明, 无限集可以与它的真子集对等.

让我们证明一个有重要意义的定理.

定理 1.1.5 若 $A_0 \supset A_1 \supset A_2$ 并且 $A_0 \sim A_2$, 则 $A_0 \sim A_1 \sim A_2$.

证明 设 $\varphi: A_0 \to A_2$ 是双射, 在映射 φ 之下, 作为 A_0 的子集, A_1 必对应有 A_2 的子集 A_3 使得 $A_1 \sim A_3$. 同样地又存在 $A_4 \subset A_3$ 使得 $A_2 \sim A_4, \cdots$. 依次做下去得到一列集合 A_n, 并且

$$A_0 \sim A_2 \sim A_4 \cdots,$$
$$A_1 \sim A_3 \sim A_5 \cdots,$$
$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \cdots,$$

此时由于 φ 是确定的, 故必有 $A_0 \backslash A_1 \sim A_2 \backslash A_3$, $A_2 \backslash A_3 \sim A_4 \backslash A_5, \cdots$. 不难证明

$$A_0 = (A_0 \backslash A_1) \bigcup (A_1 \backslash A_2) \bigcup (A_2 \backslash A_3) \bigcup \cdots \bigcup D,$$
$$A_1 = (A_1 \backslash A_2) \bigcup (A_2 \backslash A_3) \bigcup (A_3 \backslash A_4) \bigcup \cdots \bigcup D'.$$

这里 $D = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, $D' = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 由于 A_n 是单调下降的, 故 $D' = D$. 注意 A_0, A_1 的表达式中的各项互不相交. 可以将两表达式的项对应起来, 例如 A_0 的奇数项依次对等于 A_1 的偶数项, 而 A_0 的偶数项依次与 A_1 的奇数项相同. 最后必有 $A_0 \sim A_1$. 证毕.

定理 1.1.6 (Bernstein) 设 α, β 是两个势, $\alpha \leqslant \beta$ 并且 $\beta \leqslant \alpha$, 则 $\alpha = \beta$.

证明 不妨设 $\overline{\overline{A}} = \alpha$, $\overline{\overline{B}} = \beta$. 由定义, 当 $\beta \leqslant \alpha$ 时, 存在 $A' \subset A$ 使得 $A' \sim B$; 当 $\alpha \leqslant \beta$ 时, 存在 $B' \subset B$ 使得 $B' \sim A$. 于是又有 $A'' \subset A'$ 使得 $A'' \sim B'$, 此时 $A \supset A' \supset A''$, $A \sim B' \sim A''$. 由定理 1.1.5 知 $A \sim A' \sim B$. 即 $\alpha = \beta$. 证毕.

1.2 可数集的势

定义 1.2.1 与自然数集对等的集合称为可数集或可列集.

由此我们知道, 一个集合是可数的当且仅当它的元素可以排成一列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

可数集的势记为 a.

定理 1.2.1 任何无限集都包含有可数子集.

证明　设 A 是无限集, 从 A 中取出元素 a_1, 则 $A\backslash\{a_1\}$ 不会是空集, 否则 $A=\{a_1\}$ 是有限集. 再从 $A\backslash\{a_1\}$ 中取出 a_2, 同样理由 $A\backslash\{a_1,a_2\}$ 不是空集. 于是又可取出 $a_3\in A\backslash\{a_1,a_2\},\cdots$, 如此下去即得到集合 $B=\{a_n:n\geqslant 1\}$. B 是可数集并且 $B\subset A$.

定理 1.2.1 表明可数集的势是无限集中最小的. 注意在例 1.1.4 中集合 C,D 都是 A 的真子集, 它们都和 A 对等, 现在我们有如下定理.

定理 1.2.2　每个可数集都可以和它的某个真子集对等. 任何无限集都可以和它的某个真子集对等.

证明　设 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$ 是可数集, 则 $A'=\{a_2,a_3,\cdots\}$ 是 A 的真子集. 令 A 中的 a_n 对应于 A' 中的 a_{n+1}, 即 $a_n\mapsto a_{n+1}$, $n\geqslant 1$, 这种对应是一一的到上的, 从而 $A\sim A'$.

若 C 是无限集, 由定理 1.2.1, 存在可数集 $A\subset C$. 现在设 A' 是 A 的真子集, $A\sim A'$, 其中 $a\mapsto a'$. 令 $C'=(C\backslash A)\bigcup A'$, 则 C' 是 C 的真子集. 定义 $\varphi:C\to C'$ 使得

$$\varphi(a)=\begin{cases}a', & 若\ a\in A,\\ a, & 若\ a\in C\backslash A,\end{cases}$$

则 φ 是一一的到上的对应. 故 $C\sim C'$.

从证明过程不难知道, 其中的子集 C' 和映射 φ 都不是唯一的. 另一方面, 有限集不可能与它的真子集对等, 所以定理 1.1.2 和例 1.1.4 说明: 一个集合 A 是无限的, 当且仅当 A 可以与它的某个真子集对等.

定理 1.2.3　有限个或可数无穷多个可数集的并集可数.

证明　设 $A_1,\cdots,A_n$ 是有限个可数集, 不妨设

$$\begin{aligned}&A_1=(a_{11},a_{12},a_{13},\cdots),\\&A_2=(a_{21},a_{22},a_{23},\cdots),\\&A_3=(a_{31},a_{32},a_{33},\cdots),\\&\cdots\cdots\\&A_n=(a_{n1},a_{n2},a_{n3},\cdots).\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

将 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 中的元素排成如下一列,

$$a_{11},a_{21},a_{12},a_{31},a_{22},a_{13},a_{41},\cdots.$$

如果 $A_1,\cdots,A_n$ 中存在公共元素, 在做上面的排列时, 凡是与前面某个元素相同的元素都不列入, 最后仍旧得到一列元素, 由此可知 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 是可数集.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com