

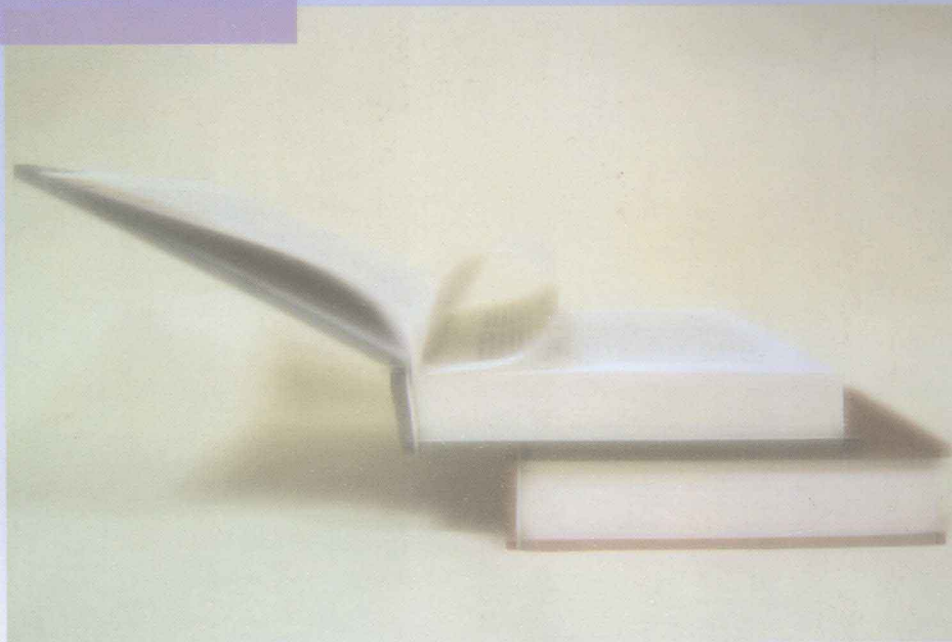


教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

SHUXUE SIXIANG FANGFA

数学思想方法

主 编 顾冷沅
副主编 朱成杰



中央广播电视大学出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

数学思想方法

主 编 顾冷沅

副主编 朱成杰

中央广播电视大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思想方法 / 顾冷沅主编. —北京: 中央广播电视大学出版社, 2004.8

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

ISBN 7-304-02742-8

I. 数… II. 顾… III. 数学—思想方法—电视大学—教材 IV. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 078182 号

版权所有, 翻印必究。

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

数学思想方法

主 编 顾冷沅

副主编 朱成杰

出版·发行: 中央广播电视大学出版社

电话: 发行部: 010-68519502 总编室: 010-68182524

网址: <http://www.crtvup.com.cn>

地址: 北京市海淀区西四环中路 45 号

邮编: 100039

经销: 新华书店北京发行所

策划编辑: 何勇军

责任编辑: 吴国艳

印刷: 北京密云胶印厂

印数: 0001-11000

版本: 2004 年 6 月第 1 版

2004 年 8 月第 1 次印刷

开本: B5 印张: 20.75

字数: 368 千字

书号: ISBN 7-304-02742-8/O·138

定价: 27.00 元

(如有缺页或倒装, 本社负责退换)

前 言

“数学思想方法”是研究数学思想方法及其教学的一门课程。随着现代科学技术的迅速发展和素质教育的全面实施，对科学思想、科学方法有着重要影响的数学思想方法的重要性日益凸现。鉴于数学思想方法在素质教育中的重要作用，“数学思想方法”被列为中央广播电视大学小学教育专业（本科）的一门重要的必修课。

全书共十三章，分为三个部分。第一章至第四章为上篇，主要介绍数学思想方法的两个源头、数学思想方法的几次重要转折、数学的真理性以及现代数学的发展趋势，从时间维度和宏观上用粗线条勾画出数学思想方法发展的概貌。其中第三章“数学的真理”对于了解现代数学观、确立现代数学教学观颇有帮助。但是，考虑到教学课时较紧以及某些地区小学教师的专业水平有限，将此列为选学内容。第五章至第十章为中篇，该篇分别对数学教学中常用的抽象与概括、猜想与反驳、演绎与化归、计算与算法、应用与模型、分类、数形结合、特殊化等数学思想方法进行了比较详细的介绍，旨在让读者能较好地掌握这些重要的数学思想方法，为在教学中加以应用打下扎实的基础。第十一至第十三章为下篇，该篇主要阐述了数学思想方法与素质教育之关系、数学思想方法教学的主要阶段及其教学原则，以及三个数学思想方法教学案例。希望这部分内容，能对在小学数学教学中加强数学思想方法教学起到一定的引领和促进作用。

学习指导部分设置了学习目标、学习重点、难点解析、回顾与思考、阅读资料等栏目，可帮助学员更好地理解和掌握课程内容。阅读资料所选材料是对相关教材内容的补充和拓宽，供学有余力的学员自学。

本教材由顾泠沅研究员任主编、朱成杰教授任副主编，并负责课程大纲的编制。俞耀明副教授编写第一章、第二章、第三章、第四章，朱晓鸽副教授编写第五章、第七章，朱成杰教授编写第六章、第八章、第九章、第十章，赵伟

老师编写第十一章、第十二章、第十三章，全书由朱成杰教授统稿。

关于数学思想方法及其教学的研究方兴未艾，尤其是小学数学思想方法教学尚处于起步阶段，需要进一步深入研究和探讨的问题很多。我们虽然做了很大努力，尽量反映最新研究成果，但是仍难免捉襟见肘，加上时间仓促和编者学识所限，不足之处一定存在，恳请读者指正。

编 者

2004 年 5 月

目 录

上 篇

第一章 数学思想方法的两个源头	(1)
第一节 希腊的《几何原本》	(1)
第二节 中国的《九章算术》	(6)
第二章 数学思想方法的几次突破	(12)
第一节 从算术到代数	(12)
第二节 从常量数学到变量数学	(16)
第三节 从确定数学到随机数学	(22)
第三章 数学的真理性	(28)
第一节 数学的证明和科学的证明	(28)
第二节 数学的公理化	(32)
第三节 第三次数学危机	(38)
第四节 哥德尔不完备性定理	(42)
第四章 现代数学的发展趋势	(46)
第一节 数学的统一性	(46)
第二节 数学应用日益广泛	(48)
第三节 计算机引发的数学革命	(52)

中 篇

第五章 抽象与概括	(59)
第一节 抽象方法	(59)
第二节 概括方法	(64)
第六章 猜想与反驳	(67)
第一节 归纳猜想	(67)
第二节 类比猜想	(75)
第三节 反例反驳	(81)
第四节 猜想能力的培养	(88)
第七章 演绎与化归	(94)
第一节 公理方法	(94)
第二节 化归方法	(102)
第八章 计算与算法	(113)
第一节 计 算	(113)
第二节 算 法	(120)
第九章 应用与建模	(129)
第一节 数学模型方法	(129)
第二节 数学模型的建立	(135)
第三节 数学模淹方法的教学	(138)
第四节 数学模型方法的现代应用	(145)
第十章 其他方法	(148)
第一节 分类方法	(148)
第二节 数形结合方法	(155)
第三节 特殊化方法	(164)

下 篇

第十一章	数学思想方法与素质教育	(177)
第一节	数学教育效益的思考	(177)
第二节	数学思想方法与素质教育	(182)
第三节	加强数学思想方法教学	(190)
第十二章	数学思想方法教学	(194)
第一节	数学思想方法频数分布的启示	(194)
第二节	数学思想方法教学的主要阶段	(197)
第三节	数学思想方法教学的原则及注意事项	(199)
第十三章	数学思想方法教学案例	(207)
第一节	化归方法教学案例	(208)
第二节	归纳猜想教学案例	(219)
第三节	数学模型方法教学案例	(230)
学习指导		(243)
参考文献		(322)

第一章 数学思想方法 的两个源头

学习提示

古代数学大体可分为两种不同的类型：一种是崇尚逻辑推理，以《几何原本》为代表；一种是长于计算和实际应用，以《九章算术》为典范。这两本著作对世界数学的发展都有着重大影响，在知道这两本著作产生的原因和基本内容的基础上，可以运用对照和比较的方法来加深理解它们思想方法的特点与意义，从而体会它们是数学思想方法的两个源头。

第一节 古希腊的《几何原本》

一、《几何原本》的产生

在数学中建立公理体系，最早的是几何学，而这方面的代表著作是古希腊学者欧几里得（Euclid）的《几何原本》（约前 300）。这是一本选择一些课题作为“要素”（“elements”，这里是指在一门学科中经常使用的一些重要的、关键性的定理，在证明其他几乎所有定理时，都需要用到它们）的论证性的学科教材。在论述一门学科时，选取一些命题作为“要素”，这要求作者具有高度

的技巧和判断力。在欧几里得以前，人们在选择“要素”方面已有过一些尝试，首先是公元前5世纪中期的希俄斯的希波克拉底（Hippocrates），其次是在柏拉图（Plato）和欧多克斯（Eudoxus）之间某一时期的勒俄（Leon）。马格尼西亚的修迪奥斯（Theudias）编写的一本教科书被看成是关于“要素”的一个出色汇集，曾在柏拉图学院中使用。欧几里得是柏拉图的学生，因此这本书是欧几里得《几何原本》的直接先导。

《几何原本》中的素材并非欧几里得所独创，大部分材料来自同他一起学习的柏拉图学派。根据5世纪的数学评注家普罗克洛斯（Proclus）说，欧几里得把欧多克斯的许多定理收入了《几何原本》，另外他还熟悉泰特托斯（Theatetus）的著作并且完善了其定理，因此欧几里得的工作在很大程度上是集前人工作之大成。

但是欧几里得在对“要素”特定的选择、把定理排列成一个逻辑上连贯的序列时所表现的惊人技巧，以及对前人只是马马虎虎证明的结果给予无懈可击的论证等方面的成就是无与伦比的。

欧几里得《几何原本》的出现，是数学史上一个伟大的里程碑，它不仅是几何学建立的标志，同时也是公理体系在具体学科中应用成功的标志。

二、《几何原本》的内容简介

欧几里得的《几何原本》是一本极具生命力的经典著作。全书共十三卷，总共有475个命题，包括5个公设（Postulate）和5个公理（Axiom）。除几何外，还包括初等数论、比例理论等内容。

第一篇有5个公设，5个公理和48个命题，讨论全等形、平行线、毕达哥拉斯（Pythagoras）定理、初等作图法、等价形（有等面积的图形）和平行四边形。所有图形都是由直线段组成的。

欧几里得在这篇中给出了23个定义，提出了点、线、面、圆和平行线等概念。接着是5个公设：①从任意一点到任意一点可作直线^①；②有限直线可以继续延长；③以任意一点为中心及任意的距离（为半径）可以画圆；④所有直角都相等；⑤同一平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角和小于两直角，则这两直线经无限延长后在这一侧相交。其中第5个公设

① 《几何原本》中的直线是指直线段。

称为欧几里得平行公设，简称第5公设。

公设之后是5个公理：①和同一量相等的诸量彼此相等；②等量加等量，总量仍相等；③等量减等量，余量仍相等；④可以重合的量，彼此相等；⑤整体大于部分。

现代数学把“公设”和“公理”看作同义词，使用时不加区别。但是欧几里得采纳了古希腊哲学家兼逻辑家亚里士多德（Aristotle）的观点，即公理是适用于一切研究领域的原始假设，而公设则仅仅是适用于正在考虑的这一特定学科的原始假设。

第二篇有14个命题，利用线段代替数来研究数运算的几何代数法。比如，两数的乘积变成两边长等于两数的矩形面积。

第三篇有37个命题，讨论圆以及与之有关的线和角等。

第四篇有16个命题，讨论圆的内接和外切多边形。

第五篇有25个命题，讨论量和量之比的比例理论。

第六篇有33个命题，利用比例理论讨论相似形。

第七、八、九篇共有102个命题，讲述数论，即讲述关于整数和整数之比的性质。本篇把数看成线段，但论证并不依赖于几何。

第十篇有115个命题，对于给定量不可公度的量进行分类。

第十一篇有39个命题，讨论空间直线与平面的各种位置关系。

第十二篇有18个命题，讨论面积和体积。

第十三篇有18个命题，主要讨论五种正多面体。

三、《几何原本》思想方法的特点

1. 封闭的演绎体系

《几何原本》是数学中最早形成的演绎体系。在形式上，它是以少数原始概念（不定义概念），如点、线、面（虽然《几何原本》中“定义”了这三个概念，但后来的推演中却没有利用这些定义，而且这些定义只是几何形象的直观描述，严格地说并不能算作定义。因此一般仍将这三个概念看作《几何原本》中的不定义概念）等等，和不证明的公设和公理为基础，运用亚里士多德所创立的逻辑学，把当时所知的几何学中的主要命题（定理）全部推演出来，从而形成一个井然有序的整体。

在这个整体中，除了推导时所需要的逻辑规则外，每个定理的证明所采用

的论据均是公设、公理或前面已经证明过的定理，并且引入的概念（除原始概念）也基本上是符合逻辑上对概念下定义的要求，原则上不再依赖其他东西。

因此，《几何原本》是一个封闭的体系。当然，《几何原本》在证明某些命题时确实运用了除公设、公理和逻辑之外的“直观”。但是那只是个别现象，并不影响整个体系。

另外，从《几何原本》与当时的社会生产、生活的关系看，它的理论体系回避任何与社会生产现实生活有关的应用问题，因此对于社会生活的各个领域来说，它也是封闭的。

所以，《几何原本》是一个比较完整的、相对封闭的演绎体系。

2. 抽象化的内容

希腊人在研究几何方面的功绩之一是把数学变成抽象化的科学。他们竭力主张寻找事物的普遍性，想从自然界和人的思想的千变万化的过程中，分离抽象出某些共同点，这对数学方法和科学方法是非常重要的。他们追求理性、讲究逻辑的哲学思想对使数学形成一门科学有着巨大的影响，从而使几何不再停留在经验的数量变化上，而逐步提高到理性阶段，使对数学的认识从感性阶段提高到理性阶段。

因此，《几何原本》中研究的都是一般的、抽象的概念和命题，它所探讨的是这些概念和命题之间的逻辑关系，从一些给定的概念和命题出发演绎出另一些概念和命题。它不讨论这些概念和命题与社会生活之间的关系，也不考察产生这些数学模型的现实原型。在《几何原本》中研究了所有的矩形（即抽象的矩形概念）的性质，但是从未讨论一个具体的矩形实物的大小。《几何原本》探讨了数（自然数）的若干性质，却不涉及具体的数的计算及其应用。它排斥各种理论的实际应用，但对抽象的尺规（无刻度的直尺和圆规）作图却推崇备至。重视抽象理论、而不注重数学理论的现实原型及其具体应用，乃是该著作的显著特点。

3. 公理化的方法

古希腊时期的数学主要是研究几何。他们不仅把几何形成了系统的理论，而且创造了研究数学的方法。作为现代数学的一种基本表述方法和发展方式的公理化方法，在数学上就是以欧几里得《几何原本》为开端的。

根据亚里士多德的想法，一个完整的理论体系应该是一种演绎体系的结构，知识都是从初始原理中演绎出的结论。欧几里得的《几何原本》恰恰体现了这一想法，欧几里得用尽可能少的原始概念和一组不证自明的命题（公设和

公理), 利用逻辑推理法则, 对当时的几何知识重新组织, 建成一个演绎系统。

具体地看, 在第一篇中开头的 5 个公设和 5 个公理, 是全书其他命题证明的基本前提, 接着给出 23 个定义, 然后再逐步引入和证明定理。定理的引入是有序的, 在一个定理的证明中, 允许采用的论据只有公设和公理与前面已经证明过的定理。以后各篇除了不再给出公设和公理外也都照此处理。

这种处理知识体系与表述方法就是公理化方法。

四、《几何原本》思想方法的深远意义

欧几里得的《几何原本》几乎概括了古希腊当时所有理论的数论及几何学, 成为近代西方数学的主要源泉。

希腊人根据几何材料的内在联系, 用概念作为判断和推理的基础逐步形成了数学证明的观念, 这是对数学认识的一个质的飞跃。

《几何原本》是古希腊数学思想的集中表现, 它把古希腊数学的特点、数学思想方法的特点发扬光大了, 可以说是古希腊数学的最高成就。《几何原本》的思想方法使得数学理论成为一个严谨的系统性理论。它使得人们能够在一定程度上超越当时的实践, 充分发挥自己的主观能动性, 得到意义深远的理论结果, 再利用这些成果指导人们的实践, 提高人们认识世界、改造世界的能力。

《几何原本》的成功是希腊数学的成功, 是公理演绎体系的成功。它被奉为数学教育的依据, 人们正是从这本书里认识到数学是什么, 证明是什么。有志于数学的人更把它作为必修经典, 从中吸收丰富的营养得到莫大的效益和鼓舞。

《几何原本》自成书之后, 在数学界产生巨大而深远的影响。正如斯威克(J. Swick)所说: “《几何原本》对于职业数学家, 常常有着一种不可逃避的迷惑力, 而它的逻辑结构大概比世界上任何其他著作更大地影响了科学思想。”它曾经统治几何学的学习, 在世界各地以各种不同的文字, 共出了千余版, 仅次于《圣经》, 大约成为西方世界历史中翻版和研究最广的书, 称得上是世界上最杰出的课本。我国在明清两代也有过译本。

多少年来, 千千万万人通过欧几里得几何的学习得到了逻辑的训练, 从而步入科学的殿堂。《几何原本》所开创的公理化方法不仅成为一种数学陈述模式而且还被移植到其他学科, 并且促进它们的发展。物理学家兼数学家牛顿(I. Newton)在其名著《自然哲学之数学原理》的序中写道: “从那么少的几条

外来的原理就能够取得那么多的成果，这是几何学的光荣”。斯宾诺莎（B. Spinoza）的《伦理学》也采用了《几何原本》的体例。

第二节 中国的《九章算术》

一、《九章算术》的产生

秦始皇建立统一的封建帝国之后，统一了文字和度量衡制度；到了西汉，社会经济和文化得到迅速发展，因此有必要，也有可能对先秦时期已经积累起来的、丰富的数学知识，进行较为系统的整理，形成专门的数学理论。据史书记载，秦时掌管过国家图书的张仓，西汉时的大司农耿寿昌以及许商、杜忠等人都编写过或校订过算书。他们大多是执管天文历法、农业、水利等方面的官员，所编的算书也大多为了培养行政官吏或教习官家子弟。因此，这些算书都是采取问题集的形式，对提出的问题，给出一种具体算法和答案。虽然秦和西汉时的算书大多失传，但从《算数书》中仍可以看到一个大概情形。

《算数书》是1983年在湖北江陵张家山出土的西汉早年（约前180）的竹简算书，无具名。它已初具问题集形式，并按算法将问题分类。分类的小标题为“分乘”、“增减分”等60多个，其中大部分算法术语，都出现在以后的《九章算术》之中，它很可能是《九章算术》的取材来源之一。

《九章算术》就是在这些算书的基础上，系统总结了先秦和东汉初年我国的数学成就，经历代名家补充、修改、增订而逐步形成的。在1世纪时，已有了现传本的内容。现传世的《九章算术》是三国时魏晋数学家刘徽于263年注释的版本。

二、《九章算术》的内容简介

《九章算术》是中国古代的一本著名数学著作。“算”指算筹，“术”指解题的方法，因而“算术”是指用筹演算的原理和方法，包括现在所说的算术、代数和几何的各种算法。又因其分九章，故由此得名。

《九章算术》每一章都包括若干道问题，数目不等，大致从简到繁排列。全书共有246道题，每道问题后给出答案，一些问题后还给出“术”。现将各

章内容简介如下：

第一章“方田”，列题 38 个，立术 21 条，着重介绍各种形状地亩面积的计算与分数的运算。“方”有单位面积的意思，“方田”则是计算一块田含多少个单位面积的方法。分数的运算包括分数的四则运算、约分、大小比较和求几个分数的算术平均数等。

第二章“粟米”，列题 46 个，立术 33 条，讨论各种粮食之间互相兑换的问题。“粟”是谷类。这类问题都通过比例来解决。

第三章“衰分”，列题 20 个，立术 22 条，涉及的内容比较杂，其算法大体上多属于比例配分问题。“衰（音崔 cui）”是按比例，“分”是分配。

第四章“少广”，列题 24 个，立术 16 条，专讲开平方、开立方问题。“少”是多少，“广”是宽广。“少广”是由已知面（体）积，求其一边的宽广是多少的问题。本章给出了“开方术”、“开圆术”、“开立方术”和“开立圆术”这四种重要算法。

第五章“商功”，列题 28 个，立术 24 条，专讲各种土木工程中所提出的各类几何体体积的求解。“商”是商量或度量，“功”是工程。

第六章“均输”，列题 28 个，立术 28 条，主要讲处理行程和合理解决征税的问题。

第七章“盈不足”，列题 20 个，立术 17 条，主要讲运用“盈不足术”解应用问题，涉及的内容多与商业有关。

第八章“方程”，列题 18 个，立术 19 条，专讲线性方程组的解法。“方”就是把一个算题用算筹列成方阵的形式，“程”是度量总名，程式之意。另外本章还提出了正负数的不同表示法和加减运算法则。

第九章“勾股”，列题 24 个，立术 19 条，主要研究勾股定理及其应用。本章继承和发展了商高提出的勾股定理，并且开创了直角三角形相似法和出入相补原理。

三、《九章算术》思想方法的特点

1. 开放的归纳体系

从《九章算术》的内容可以看出，它是以应用问题解法集成的体例编纂而成的书，因此它是一个与社会实践紧密联系的开放体系。从篇章的名称来看，方田、粟米、衰分、少广、商功、均输各章都属当时社会生产和生活方面需要

解决的数学问题。书中所涉及的具体问题，如，田亩测量、工程建设、交通运输、税收商业等，几乎包括了当时社会生产和生活的各个领域。通过这些篇章中给出的算法，解决了当时社会生产和生活所提出的各种计算问题。盈不足、方程、勾股三章，则分别研究了三种常用的数学模型及其用法，是为在以上各个领域中的应用服务的。因此，《九章算术》的全部理论是以寻求各种应用问题的普遍解法为中心的，是一个具有浓厚的“应用数学”色彩的开放性理论体系，这与《几何原本》追求逻辑的完美形成了鲜明的对照。

另外，《九章算术》的表述体系是按照由个别到一般的推导方式建立起来的。书中通常是先举出某一社会生活领域中的一个或几个个别问题，从中归纳出某一类问题的一般解法，即算法（术）；再把各类算法综合起来，得到解决该领域中各种问题的方法，从而构成一章；最后，把解决社会生产生活各领域中问题的数学方法全部综合起来，就得到整个《九章算术》。该书的归纳特点还有另一层含意，即按照解决问题的不同数学方法进行归纳。许多不同领域的实际问题可能需用相同的计算方法，从这些方法中提炼出数学模型，最后再以数学模型立章写入《九章算术》。盈不足、方程、勾股三章就是如此。

因此，综观全书，《九章算术》是一个开放的归纳体系。

2. 算法化的内容

《九章算术》在每一章内先列举若干个实际问题，并对每个问题都给出答案，然后再给出“术”，作为一类问题的共同解法。以后遇到其他同类问题，只要按“术”给出的程序去做就一定求出问题的答案。历代数学家受到追求实用、讲究算法的传统思想的影响，使他们对《九章算术》的注、校，主要集中在对“术”进行研究，即不断改进算法。因此我们说，内容的算法化是《九章算术》思想方法上的特点之一。

以下列举《九章算术》中的约分术加以说明。

约分术（第一章中的一个算法）是在假设读者已具备正整数四则运算方法的基础上展开的，其术文是：

“可半者半之，不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也，以等数约之。”

这也就是说：分母、分子若都是偶数，先同被2除；若不都是偶数，则用“更相减损”术求其“等数”，即最大公约数，再用最大公约数去同除分母、分子。

所谓“更相减损”就是辗转相减，与辗转相除原理相同。如《九章算术》

第一章中第6题，有九十一分之四十九，问约之得几何？此问题关键是求91与49的最大公约数（等数），其方法如下：

91	49
(91 - 49 =) 42	7 (= 49 - 42)
(42 - 7 =) 35	
(35 - 7 =) 28	
(28 - 7 =) 21	
(21 - 7 =) 14	
(14 - 7 =) 7	

于是

$$\frac{49 \div 7}{91 \div 7} = \frac{7}{13}$$

《九章算术》中的多数“术”都与“约分术”相似，它们是这部著作的主要内容，问题是为了引出术或作为术的应用而给出的。由于《九章算术》的主要内容是算法，因而促进了对各种算法的研究，取得了诸如方程术、正负术、开方术、割圆术等著名算法和一大批与之有关的数学成果。

3. 模型化的方法

从数学方法论的角度看，《九章算术》普遍使用了数学模型方法。各章都是先从相应的社会实践中选择具有典型意义的现实原型，并把它们表述成问题，然后通过“术”使其转化成数学模型。当然有的章采取的是由数学模型到原型的过程，即先给出数学模型，然后再提出可以应用的原型，例如，“勾股”、“方程”等章，其标题就是数学模型的名称。

四、《九章算术》思想方法的重大影响

《九章算术》从问世起，人们便由它来学习数学。隋唐时期开始建立国立学校，其中有算学科，该书被列为重要的教科书。在民间此书也广泛流传，所以，《九章算术》及其思想方法对后世的影响非常巨大而深远。古代研究数学的人大多是从《九章算术》开始，有些人正是通过对它的研究取得重要成就，而成为历史上杰出的数学家，其中最著名的有刘徽、祖冲之父子、贾宪等。也就是说，《九章算术》不但在普及数学知识方面起过巨大作用，而且还在培养和造就数学家方面起到了促进作用。《九章算术》在我国的影响还表现在著作