Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学
历届真题
考点与题型
分类精解（数学一）

清华大学　王　欢
北京大学　王德军
首都师范大学　童　武
主编

由多 …… 专家亲自编写，内容系统、权威

集结历届真题，覆盖所有考点

赠送MP3盘

考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

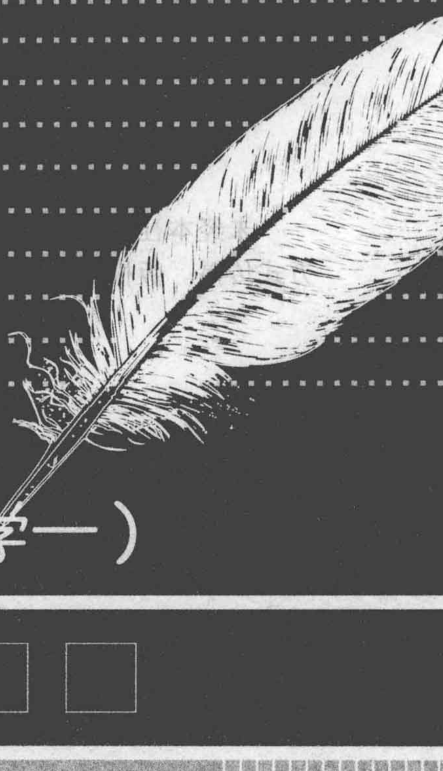
中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan

燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学
历届真题
考点与题型
分类精解（数学一）



清华大学 王　欢

北京大学 王德军　**主编**

首都师范大学 童　武

由多 专家亲自编写，内容系统、权威

集结历届真题，覆盖所有考点

赠送MP3盘　考研名师童武教授　考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历届真题考点与题型分类精解. 数学一 / 王欢,王德军,童武主编. —北京:中国石化出版社,2012.2

ISBN 978-7-5114-1371-0

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… ②王… ③童… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 011609 号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销

*

787×1092 毫米 16 开本 16 印张 400 千字
2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷
定价:30.00 元(赠送 MP3 盘)

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济

类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲,反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上,力求反映最新考试要求,紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧,高效突破难关

本书精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,为考生全程领航和理性分析,引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔,编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作,积累了丰富的教学辅导经验,对历年考试情况比较了解,对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序,力求达到完美,但限于时间和水平,仍可能存在不足,纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

第一篇　1997 ~ 2012 年考研数学一试题分类解析

第一部分　高等数学 …………………………………………… (3)

第一章　函数、极限、连续 …………………………………… (3)

第二章　一元函数微分学 …………………………………… (13)

第三章　一元函数积分学 …………………………………… (29)

第四章　向量代数与空间解析几何 ………………………… (43)

第五章　多元函数微分学 …………………………………… (45)

第六章　重积分 …………………………………………… (60)

第七章　曲线、曲面积分 …………………………………… (69)

第八章　无穷级数 ………………………………………… (91)

第九章　常微分方程 ……………………………………… (107)

第二部分　线性代数 …………………………………………… (115)

第一章　行列式 …………………………………………… (115)

第二章　矩阵 ……………………………………………… (117)

第三章　向量 ……………………………………………… (124)

第四章　线性方程组 ……………………………………… (130)

第五章　特征值与特征向量 ………………………………… (145)

第六章　二次型 …………………………………………… (158)

第三部分　概率论与数理统计 ………………………………… (166)

第一章　随机事件与概率 …………………………………… (166)

第二章　随机变量及其分布 ………………………………… (170)

第三章　多维随机变量及其分布 …………………………… (176)

第四章　随机变量的数字特征 ……………………………… (188)

第五章　大数定律和中心极限定理 ………………………… (196)

第六章　数理统计的基本概念 ……………………………… (197)

第七章　参数估计 ………………………………………… (203)

第八章　假设检验 ………………………………………… (212)

第二篇　2003 ~ 2012 年考研数学一试题

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………（215）
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………（218）
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………（221）
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………（225）
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………（228）
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………（232）
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………（235）
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………（239）
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………（242）
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …………………………（245）

第一篇

1997～2012 年考研数学一试题分类解析

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

考点1　函数的概念及其特征

1.（2005年试题，8）设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，"$M \Longleftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N"，则必有（　　）．

（A）$F(x)$ 是偶函数 $\Longleftrightarrow f(x)$ 是奇函数

（B）$F(x)$ 是奇函数 $\Longleftrightarrow f(x)$ 是偶函数

（C）$F(x)$ 是周期函数 $\Longleftrightarrow f(x)$ 是周期函数

（D）$F(x)$ 是单调函数 $\Longleftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【考点】 奇函数，偶函数，原函数

【解析一】 由题意可知

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\tau$$

$f(x)$ 为奇函数 $\Longrightarrow \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 为偶函数 $\Longrightarrow f(x)$ 的全体原函数为偶函数；

$F(x)$ 为偶函数 $\Longrightarrow F(-x)=F(x)$，则 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即 $f(-x)=-f(x)$ $\Longrightarrow F'(x)=f(x)$ 为奇函数，所以选（A）．

【解析二】 排除法，通过举反例来判断

令 $f(x)=6$，则可取 $F(x)=6x+1$，排除（B）和（C）；

令 $f(x)=6x$，则可取 $F(x)=3x^2$，排除（D），故综上选（A）．

【评注】 对于函数的另一大性质有界性，原函数与函数的关系如何？

2.（1999年试题，1）设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则（　　）．

（A）当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数

（B）当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数

（C）当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数

（D）当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数

【考点】 原函数性质

【解析一】 首先将原函数 $F(x)$ 表示成 $f(x)$ 变上限的定积分，即

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C$$

则 $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t+C$,再令 $t=-u$,则 $F(-x)=-\int_0^{x}f(-u)\mathrm{d}u+C$

如果$f(x)$是奇函数,则 $F(-x)=\int_0^{x}f(u)\mathrm{d}u+C=F(x)$,因此$F(x)$是偶函数,从而知(A)是正确的.

下面分析(B),(C),(D)的错误之处.

若$f(x)$是偶函数,则 $F(-x)=-\int_0^{x}f(u)\mathrm{d}u+C$,不能保证 $F(-x)=F(x)$,(B) 错误;

关于(C),(D),可通过举一些简单反例来说明,如设$f(x)=\sin x+1$,则 $F(x)=x-\cos x+C$,并非周期函数,因此排除(C);又设$f(x)=x$,则 $F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$,并非单调增函数,(D)也排除.

综上,选(A).

【解析二】 特殊取值排除法

令$f(x)=\cos x+1$,则 $F(x)=\sin x+x+1$ 时,选项(B),(C)和(D)均可排除,故应选(A).

【评注】 奇偶性、周期性、单调性和有界性是函数的四个基本特征. 本题可以延伸考查函数$f(x)$与原函数 $F(x)$的性质之间的关系,对于常见的结论或反例考生应予以掌握.

考点2 极限的概念与性质

(2003 年试题,二)设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$则必有(　　).

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

【考点】 数列的极限

【解析】 取 $a_n=\frac{2}{n}$,$b_n=1$,$c_n=\frac{1}{3}n(n=1,2,\cdots)$,可易排除(A)、(B)、(C),故(D).

考点3 函数极限的计算

一、利用左、右极限求函数极限

1. (2000 年试题,三)求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.

【考点】 极限

【解析】 原式中两项单独的极限都不存在,但它们的左右极限都存在,只是不相等,因此应分别求原式的左极限与右极限,因为

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

所以原极限为1.

【评注】 形如$|f(x)|$，$\min\{f(x),g(x)\}$本质上是分段函数，在求极限时应分段讨论，在求导数和积分时亦是如此. 此外，要注意$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$均不存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$可能存在.

考生的典型错误是将$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$分成两个极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$和$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}$去讨论，而这两个极限都不存在，就答原题的极限不存在. 要注意，$\lim\limits_{x\to a}f(x)$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$均不存在，但$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$可能存在.

二、求未定式$\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^{\infty},0^0,\infty^0\right)$的极限

1.（2011年试题，三）求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

【考点】 极限的计算

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}\right]^{\frac{1}{e^x-1}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

2.（2010年试题，1）极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$等于（　　）.

(A) 1　　(B) e　　(C) e^{a-b}　　(D) e^{b-a}

【考点】 函数的极限

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{(a-b)x^2+abx}{(x-a)(x+b)}}=e^{a-b}$，故正确答案为(C).

3.（2008年试题，15）求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【考点】 求极限

【解析一】 这是“$\dfrac{0}{0}$”型不定式

$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\cos x\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cos x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to0}\cos x\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

【解析二】 $x\to0$时$x\sim\sin x$，用等价无穷小因子替换得

$$I=\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4x}$$

作变量替换 $t=\sin x$ 后再用洛必达法则得

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}$$

【解析三】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$，且 $\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)$，所以原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\left[\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)\right]}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}$.

【评注】 有的考生这样做：

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2 x}{x^4}-\frac{\sin(\sin x)\sin x}{x^4}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

这说明有的考生对最基本的极限运算法则和性质掌握不够.

还有的考生这样做：

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\cdots=\frac{1}{6}$$

这里用 $x-\sin x$ 代替 $\sin x-\sin(\sin x)$ 结论是正确的，但要计算出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{\frac{1}{2}x^2}=1 \text{ 才行；}$$

如果当 $x\to 0$ 时 $\sin x\sim x,\sin(\sin x)\sim\sin x$，则 $\sin x-\sin(\sin x)\sim x-\sin x$ 是错误的.

4. (2006 年试题，1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$__________.

【考点】 求极限

【解析】 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，利用等价无穷小因子替换得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

【评注】 对于"$\frac{0}{0}$"型未定式极限的求解，利用等价无穷小等价代换求解最为简单.

5. (2003 年试题，1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$__________.

【考点】 极限，等价无穷小

【解析一】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right\}=e^{-\frac{1}{2}}$$

【解析二】 用求指数型极限的一般方法，即

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}-\frac{\sin x}{2x\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

【评注】 对于“1^{∞}”型未定式 $\lim f(x)^{g(x)}$ 的极限，可借助于重要极限简化求解，或通过取自然对数的方法转为求 $g(x)\ln f(x)$ 的极限.

6.（1999 年试题，1）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$__________.

【考点】 洛必达法则和等价无穷小

【解析一】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}\cdot\dfrac{x}{\tan x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sec^2x\tan x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\sec^2x=\frac{1}{3}$$

【解析二】 直接运用洛必达法则，

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{3x}=\dfrac{1}{3}$

【评注】 求解此类问题，应先用等价无穷小作等价代换，简化问题，然后再用洛必达法则求解. 代换时须注意是“整体”代换，即乘除项可直接代换，加减项则不能.

7.（1998 年试题，1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$__________.

【考点】 等价无穷小，洛必达法则

【解析一】 求极限有多种方法，应在分析表达式的基础上灵活选取，本题最直接的方法是采用洛必达法则，即

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}=-\frac{1}{4}$$

【解析二】

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{4x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2}-4}{4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(-x^2)}{2x^2}=-\frac{1}{4}$$

【解析三】 将原表达式中的 $\sqrt{1+x}$ 和 $\sqrt{1-x}$ 进行麦克劳林级数展开,也可得出同样结果,即

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{8}\right)x^2+o(x^2)$$

则

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{4}$$

【评注】 当分母(或分子)中为 x^n 时,可考虑将分子(或分母)用麦克劳林级数展开到 x^n,再求极限时就非常简单了.

8.(1997 年试题,1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ______.

【考点】 等价无穷小,洛必达法则

【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{2\ln(1+x)}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{2\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x}{\frac{2}{1+x}}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$

【评注】 当 $x\to 0$ 时,若待求极限的表达式中含有 $\sin\frac{1}{x}$,$\cos\frac{1}{x}$ 等时,洛必达法则往往失效,此时改用无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量来求解是最佳选择.

考点 4 函数极限的逆问题

(2002 年试题,三)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数,且 $f(0)\neq 0$,$f'(0)\neq 0$,若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小,试确定 a,b 的值.

【考点】 无穷小量的阶

【解析一】 由题意知,$h\to 0$ 时 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 是比 h 高阶的无穷小,因而

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0,$$

由此可知

$$\lim_{h\to 0}\frac{a[f(h)-f(0)]+b[f(2h)-f(0)]+(a+b-1)f(0)}{h}=0,$$

结合 $f'(0)\neq 0$ 但存在的事实,有 $(a+b-1)f(0)=0$,从而 $a+b=1$,又根据 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近某邻域内具有一阶连续导数,则由洛必达法则

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}(af'(h)+2bf'(2h))=(a+2b)f'(0),$$

因此 $a+2b=0$，所以 $a=2,b=-1$.

【解析二】 本题还可应用麦克劳林级数展开式，即

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+o(h),\quad f(2h)=f(0)+f'(0)2h+o(h),$$

则

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o(h),$$

由已知 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 是比 h 高阶的无穷小，因此有

$$\begin{cases}a+b-1=0\\ a+2b=0\end{cases}\quad 同样可解得\ a=2,b=-1$$

【评注】 若“函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数‘换成’函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导”，则【解析一】中的洛必达法则不可用.

考点 5　数列的极限

1.（2008 年试题，4）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（　　）.

（A）若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　（B）若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

（C）若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　（D）若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

【考点】 函数与数列的收敛性

【解析一】 因为 $f(x)$ 在实数域内单调有界. 若 $\{x_n\}$ 也单调，则 $\{f(x_n)\}$ 单调有界，从而 $\{f(x_n)\}$ 是收敛的，(B) 选项正确.

【解析二】 若 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，$f(x)$ 是单调有界的，且 $\{x_n\}$ 是收敛于 0 的，但 $\{f(x_n)\}$ 的数值总是在 1 和 -1 之间来回变化，是不收敛的，(A) 选项错误；若 $f(x)=\arctan x$，$x_n=n$，满足 (C)，(D) 选项的条件，但与结果相矛盾，(C)，(D) 选项均错误. 故应选 (B).

2.（2007 年试题，5）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)=1,2,\cdots,n$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　（B）若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

（C）若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　（D）若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

【考点】 数列的敛散性

【解析一】 因 $f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 若 $u_1<u_2$，则 $\dfrac{u_2-u_1}{2-1}=f'(c)$ $(c\in[1,2])>0$. 即 $n>2$ 时，必有 $f'(n)>f'(c)>0$，$u_n=f(n)$ 也单调递增，且随 n 的增大，$f'(n)$ 增大，故 $f(n)$ 增大更快，故应选 (D)，即 $\{u_n\}$ 必发散.

【解析二】 举反例排除法

设 $f(x)=-\ln x$，满足题意，且 $u_1>u_2$，但 $\{u_n\}=\{-\ln n\}$ 发散，排除选项 (A)；

设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，满足题意，且 $u_1>u_2$，但 $\{u_n\}=\{\dfrac{1}{n}\}$ 收敛，排除选项 (B)；

设 $f(x)=x^2$，满足题意，且 $u_1<u_2$，但 $\{u_n\}=\{n^2\}$ 发散，排除选项 (C)；故应选 (D).

3.(2006 年试题,16)设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;

(Ⅱ)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【考点】 数列极限与函数极限的计算

【解析】 (Ⅰ)因为数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$(已知),所以

$$0<x_2=\sin x_1<\frac{\pi}{2},\quad x_2=\sin x_1<x_1,\quad 0<x_3=\sin x_2<x_2<\frac{\pi}{2}$$

同理可得

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n$$

即 x_n 单调下降有下界 $\Longrightarrow$ 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

对方程 $x_{n+1}=\sin x_n$ 取极限,令 $n\to+\infty$ 可得

$$a=\sin a\Longrightarrow a=0$$

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{x_n^2}\ln\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)}$

又

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{\sin x_n}{x_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\left(\frac{\sin x_n}{x_n}-1+1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\text{(数列极限转化为函数极限)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$

4.(1998 年试题,七)求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

【考点】 夹逼定理的应用,定积分的定义

【解析】 因为

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n}{n}\pi}{n+\frac{1}{n}}<\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$

而由定积分的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$$

又由

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n}{n}\pi}{n+\frac{1}{n}}>\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right)$$