新世纪应用型高等教育
计算机类课程规划教材

离散数学及其应用

新世纪应用型高等教育教材编审委员会　组编

主编　何中胜　主审　李盘林

大连理工大学出版社

新世纪应用型高等教育
计算机类课程规划教材

离散数学及其应用

新世纪应用型高等教育教材编审委员会 组编
主编 何中胜
副主编 王刚 叶增炉
主审 李盘林

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学及其应用 / 何中胜主编. — 大连 : 大连理工大学出版社，2011.4

新世纪应用型高等教育计算机类课程规划教材

ISBN 978-7-5611-5971-2

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①何… Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 261484 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023

发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

丹东新东方彩色包装印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:17　字数:387 千字

印数:1~2000

2011 年 4 月第 1 版　2011 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑:潘弘喆　责任校对:云娇娇

封面设计:张　莹

ISBN 978-7-5611-5971-2　定　价:33.00 元

前　言

离散数学是研究离散数量关系和离散结构数学模型的数学分支的统称，是现代数学的一个重要分支，是计算机科学中基础理论的核心课程。它在各学科领域，特别在计算机科学与技术领域有着广泛的应用，如可计算性与计算复杂性理论、算法与数据结构、操作系统、数据库与信息检索系统、人工智能与机器人、网络、计算机图形学以及人机通信。作为一门重要的专业基础课，通过离散数学的教学，不仅能为学生的专业课学习及将来所从事的软、硬件开发和应用研究打下坚实的基础，同时也能培养他们的抽象思维能力和逻辑推理能力。

本教材是编者在十几年离散数学教学经验基础上，结合应用型本科高校人才培养规格及学生能力结构要求编写而成的，强调“有基础，强能力；重实践，强应用”，具有如下特色：

1. 内容体系严谨、重点突出、讲解详实，基本涵盖了计算机科学与技术专业离散结构的必修核心知识单元。

2. 例题的选材注重理论联系实际，例题分析注重解题思想和方法，从而使学生能够在较短的时间较好地掌握离散数学的基本概念、理论和方法，并得到较多的思维训练。

3. 对每一篇（章）知识的来龙去脉通过阅读材料的形式展现给学生，既增加了学生对知识领域的背景的了解，扩大了学生的知识面，又增强了学生的学习兴趣与积极性。

4. 针对与应用关系密切的知识设计编程实践项目，一方面加强学生对知识点的掌握，另一方面向学生灌输“离散数学不纯粹是数学”的理念，加深理解离散数学与计算机专业之间密切的联系。

5. 将同类且对比鲜明的概念或内容集中叙述，并通过典型的实例进行对比说明，使学生深刻理解它们的区别与联系。

本教材分 4 篇，共 7 章，第 1 篇是数理逻辑，内容包括命题逻辑和谓词逻辑；第 2 篇是集合论，内容包括集合、关系、映射、无限集合及其势；第 3 篇是代数系统，内容包括代数系统，半群、独异点及群，环、域，以及格与布尔代数；第 4 篇是图论。各章配有内容丰富的习题。本教材中加 * 号的章节为选修内容，可作

为计算机科学与技术及信息类本科专业的基础理论教材，也可供有关技术人员学习参考。

本教材由何中胜任主编，王刚和叶增炉任副主编，具体编写分工为：第1～4章、第6章及阅读材料由何中胜编写，第5章由叶增炉编写，第7章由王刚编写。全书由何中胜审阅并统稿。

在本教材的编写过程中，得到了众多专家学者、同行、同事的指导帮助。大连理工大学李盘林教授以渊博的专业理论和丰富的教学经验，对全书的内容进行了认真审阅，对应用型人才离散数学教材内容选取、章节安排提出了建设性意见；常州工学院庄燕滨教授则从应用型人才培养规格、人才能力结构方面提出了许多意见和建议。值此教材出版之际，一并向他们表示衷心感谢。

在本教材的编写过程中参阅了国内外许多前辈和同行编写的离散数学教材及专著，这里不能一一列出，在此对这些作者表示深深的感谢。

尽管我们在本教材的编写方面做了很多努力，但由于编者水平有限，书中难免会存在缺点与不足，恳请各位读者批评指正，并将意见和建议及时反馈给我们，以便下次修订时改进。

所有意见和建议请发往：dutpbk@163.com
欢迎访问我们的网站：http://www.dutpgz.cn
联系电话：0411-84707492　84706104

编　者

2011年4月

目　录

第1篇　数理逻辑

第 2 篇　集合论

第3篇 代数系统

第 4 篇 图 论

第1篇 数理逻辑

逻辑学是一门研究思维形式及思维规律的科学，分为辩证逻辑与形式逻辑两种。前者是以辩证法认识论的世界观为基础的逻辑学，而后者主要是对思维的形式结构和规律进行研究的类似于语法的一门工具性学科。思维的形式结构包括了概念、判断和推理之间的结构和联系，其中概念是思维的基本单位，通过概念对事物是否具有某种属性进行肯定或否定的回答就是判断；由一个或几个判断推出另一个判断的思维形式，就是推理。研究推理有很多方法，用数学方法来研究推理的规律称为数理逻辑。目前数理逻辑已成为计算机学科中的重要分支，由于它使用一套符号简洁地表达出各种推理的逻辑关系，因此数理逻辑又称为符号逻辑或理论逻辑。

大家公认的数理逻辑起源于公元17世纪。19世纪英国的德·摩根(De Morgan)和乔治·布尔(George Boole)发展了逻辑代数，20世纪30年代数理逻辑进入了成熟时期，其基本内容(命题逻辑和谓词逻辑)有了明确的理论基础，成为数学的一个重要分支，同时也是电子元件设计和性质分析的工具。基于理论研究和实践，冯·诺伊曼(Von Neumann)、图灵(Turing)、克林(Kleene)等人研究了逻辑与计算的关系。随着1946年第一台通用电子数字计算机的诞生和近代科学的发展，计算技术中出现了大量的逻辑问题，而逻辑程序设计语言的研制，更促进了数理逻辑的发展。除古典二值(真，假)逻辑外，人们还研究了多值逻辑、模态逻辑、概率逻辑、模糊逻辑和非单调逻辑等。逻辑不仅有演绎逻辑，还有归纳逻辑。计算机科学中还专门研究了计算逻辑、程序逻辑和时序逻辑等。现代数理逻辑分为四论：证明论、递归论(它们与形式语言的语法有关)、模型论和公理化集合论(它们与形式语言的语义有关)。

在传统的形式逻辑中，先讨论概念，后讨论判断(即命题)，再讨论推理，这是因为概念组成判断，判断又组成推理。但是，这未必是一种好的次序安排。事实上，如果我们把推理作为研究的根本目标，先忽略判断的细节——概念，把判断看做不可分的整体——命题来讨论，也就是以命题演算入手，那将更便于对推理规律进行分析；在此基础上，再引入概念的形式表示——谓词，讨论概念、关系的理论——谓词演算，把推理的研究引向更加深刻的层次，其内容编排就显得格外顺理成章。本篇的阐述正是遵循这一次序，第1章讨论命题、命题演算及其推理形式，第2章讨论谓词、谓词演算及其推理形式。

第1章

命题逻辑

数理逻辑是用数学方法来研究推理规律的学科。数理逻辑与数学的其他分支、计算机科学技术、人工智能和语言学等学科均有密切联系。数理逻辑最基本的内容是命题逻辑和谓词逻辑。这里，我们先介绍命题逻辑。

命题逻辑研究的是以原子命题为基本单位的推理演算，其特征在于研究和考查逻辑形式时，我们只把一个命题分析到其所含的原子命题成分为止。通过这样的分析可以显示出一些重要的逻辑形式，这种形式和有关的逻辑规律就属于命题逻辑。

1.1 命题及其表示

1.1.1 命题的基本概念

语言的单位是句子。句子可以分为疑问句、祈使句、感叹句与陈述句等，其中只有陈述句能判断真假，其他类型的句子无所谓真假。在命题逻辑中，对命题的组成部分不再进一步细分。

定义 1.1.1 能够判断真假的陈述句称为命题(Proposition)。命题的判断结果称为命题的真值，常用 1(或大写字母 T)表示真，用 0(或大写字母 F)表示假。凡是与事实相符的陈述句，即真值为真的命题称为真命题；而与事实不符的陈述句，即真值为假的命题称为假命题。

从定义 1.1.1 可以看出命题要同时具有两层含义：

(1)命题是陈述句。其他的语句，如疑问句、祈使句、感叹句等均不是命题。

(2)陈述句表示的内容可以分辨真假，而且不是真就是假，不能不真也不假，也不能既真又假。

【例 1-1】 判断下列语句是否为命题，若是则指出其真值。

(1)北京是中国的首都。

(2)2 是偶数且 3 也是偶数。

(3)$2+2=5$。

(4)请勿吸烟!

(5)乌鸦是黑色的吗?

(6)这个小男孩多勇敢啊!

(7)地球外的星球上存在生物。

(8)1+101=110。

(9)$x+y=5$。

(10)我正在说谎。

解析:(1)~(3)是命题,其中(1)是真命题,(2),(3)是假命题。值得注意的是,像 2+2=5 这样的数学公式也是一个命题。事实上,一个完整的数学公式与一个完整的陈述句并没有什么本质的差异。(4)是祈使句,(5)是疑问句,(6)是感叹句,因而这 3 个句子都不是命题。(7)是命题,虽然目前我们无法确定其真值,但它的真值客观存在,而且是唯一的,随着科技的发展,在不久的将来就会知道其真值。因此,一个语句本身是否能分辨真假与我们是否知道它的真假是两回事。也就是说,对于一个句子,有时我们可能无法判定它的真假,但它本身却是有真假的,那么这个语句就是命题,否则就不是命题。(8)也是命题,但它的真假意义通常和上下文有关,当作为二进制的加法时,它是真命题,否则为假命题。(9)不是命题,虽然是陈述句,但没有确定的真值,其真假随 x、y 取值的不同而不同。(10)不是命题,若(10)的真值为真,即"我正在说谎"为真,则(10)的真值应为假;反之,若(10)的真值为假,即"我正在说谎"为假,也就是"我正在说真话"为真,则又推出(10)的真值应为真。可见(10)的真值无法确定,它显然不是命题,像(10)这样由真推出假,又由假推出真的语句称为悖论,凡是悖论都不是命题。

1.1.2 命题分类

语言中陈述句按其结构可分为简单语句与复合语句,复合语句由若干个简单语句通过连词连接构成。相应地,命题按结构也可以分为两类,一类是原子命题,一类是复合命题。

定义 1.1.2 不能被分解为更简单的陈述语句的命题称为原子命题(Simple Proposition)。由两个或两个以上原子命题通过联结词组合而成的命题称为复合命题(Compound Proposition)。

例如,例 1-1 中的命题(1)(3)(7)(8)为原子命题,而命题(2)是复合命题(由"2 是偶数"与"3 是偶数"两个原子命题由联结词"且"组成),该命题的真值不仅依赖于这两个组成它的命题,而且还依赖于这个联结词的意义。像这样的联结词称为逻辑联结词(Logical Connectives)。

1.1.3 命题标识符

为了对命题进行逻辑演算,我们对原子命题进行符号化(形式化),约定用大写字母 P,Q,R,S 等表示原子命题(为了避免与真值 T 及 F 混淆,建议不用 T 及 F 表示原子命题)。例如,用 P 表示"北京是中国的首都",Q 表示"5 可以被 2 整除"等。

定义 1.1.3 表示原子命题的符号称为命题标识符(Identifier)。

命题标识符依据表示命题的情况,分为命题常元和命题变元。一个表示确定命题的标识符称为命题常元(Propositional Constant),也称为命题常项;没有指定具体内容的命题标识符称为命题变元(Propositional Variable),也称为命题变项。命题变元的真值情

况不确定，因而命题变元不是命题。只有当给命题变元 P 一具体的命题取代，P 有了确定的真值时，才成为命题。

定义 1.1.4 用一个确定的命题代入一个命题标识符（如 P），称为对 P 进行指派（赋值或解释）。

如果命题标识符 P 代表命题常元则意味着它是某个具体原子命题的符号化，如果 P 代表命题变元则意味着它可指代任何具体原子命题。本书中如果没有特别指明，命题标识符 P 等就是指命题变元，可指代任何原子命题。

1.2 逻辑联结词

自然语言里常常使用下面的一些联结词，例如："非"、"不"、"没有"、"无"、"并非"、"并不"等来表示否定；"并且"、"同时"、"以及"、"而（且）"、"不但…而且…"、"既…又…"、"尽管…仍然"、"和"、"也"、"同"、"与"等来表示同时；"虽然…也…"、"可能…可能…"、"或许…或许…"等和"或（者）"的意义一样；"若…则…"、"当…则…"与"如果…那么…"的意义相同；"充分必要"、"等同"、"一样"、"相同"与"当且仅当"的意义一样。也就是说在自然语言中，这些逻辑联结词的作用一般是同义的。在数理逻辑中将这些同义的联结词也统一用符号表示，以便书写、推演和讨论。

本节主要介绍 5 种常用的逻辑联结词，分别是"非"（否定联结词）、"与"（合取联结词）、"或"（析取联结词）、"若…则…"（条件联结词）和"…当且仅当…"（双条件联结词），通过这些联结词可以把多个原子命题复合成一个复合命题。

1.2.1 否定联结词

定义 1.2.1 设 P 表示一个命题，则 P 的否定（Negation）是一个新的命题，记为 $\neg P$（读做非 P）。规定若 P 为 1，则 $\neg P$ 为 0；若 P 为 0，则 $\neg P$ 为 1。

$\neg P$ 的取值情况依赖于 P 的取值情况，真值情况见表 1-1。

表 1-1 $\neg P$ 的真值表

P	$\neg P$
1	0
0	1

日常用语中的"非"，"不"，"无"，"没有"，"并非"等均可用否定词表示。但要注意，否定词是否定命题的全部，而不是部分，它是一个一元运算符。

【例 1-2】 （1）设 P 表示命题"雪是白的"，则 $\neg P$ 表示"并非雪是白的"、"雪不是白的"，此时 $\neg P$ 为假，因为 P 为真。

（2）设 P 表示"我们都是好学生"时，则 $\neg P$ 表示"并非我们都是好学生"或"我们不都是好学生"，而不是"我们都不是好学生"。

1.2.2 合取联结词

定义 1.2.2 设 P，Q 为两个命题，P 和 Q 的合取（Conjunction）是一个复合命题，记

为 $P\wedge Q$(读做 P 与 Q)，称为 P 与 Q 的合取式。规定 P 与 Q 同时为 1 时，$P\wedge Q$ 为 1，其余情况下，$P\wedge Q$ 均为 0，如表 1-2 所示。

表 1-2　　$P\wedge Q$ 的真值表

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

日常用语中的“与”、“和”、“也”、“并且”、“而且”、“既…又…”、“一面…一面…”等可用合取词表示。

【例 1-3】 (1)设 P 表示命题“你去了学校”，Q 表示命题“我去了工厂”，则 $P\wedge Q$ 表示命题“你去了学校并且我去了工厂”。$P\wedge Q$ 为真，当且仅当你、我分别去了学校和工厂。

(2)设 P:今天下雨，Q:今天刮风，则 $P\wedge Q$ 表示命题“今天下雨又刮风”。

(3)设 P:猫吃鱼，Q:太阳从西方升起，则 $P\wedge Q$ 表示命题“猫吃鱼且太阳从西方升起”。在自然语言中，(3)中命题 $P\wedge Q$ 是没有实际意义的，因为 P 与 Q 两个命题是互不相干的，但在数理逻辑中是允许的，数理逻辑中只关注复合命题的真值情况，并不关心原子命题之间是否存在着内在联系。

需要注意的是，并非命题中所有出现的“与”或“和”就一定是合取词，而是要看它在命题中的含义。例如，“张三和李四是同学”就不是一个复合命题，虽然命题中也使用了联结词“和”，但这个联结词“和”是联结该句主语的，整个句子仍是简单命题，因此只能用一个命题变元表示。

合取联结词“$\wedge$”甚至可以将两个互为否定的命题联结在一起，形如 $P\wedge\neg P$，显然它的真值永远是假，称为矛盾式。合取联结词“$\wedge$”是一个二元运算符。

1.2.3　析取联结词

定义 1.2.3　设 P、Q 为两个命题，P 和 Q 的析取(Disjunction)是一个复合命题，记为 $P\vee Q$(读做 P 或 Q)，称为 P 与 Q 的析取式。规定当且仅当 P 与 Q 同时为 0 时，$P\vee Q$ 为 0，否则 $P\vee Q$ 均为 1，如表 1-3 所示。

表 1-3　　$P\vee Q$ 的真值表

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

日常用语中的“或”，“要么…要么…”等可用析取词表示。

【例 1-4】 设 P、Q 分别表示“今晚我看书”和“今晚我去看电影”，则 $P\vee Q$ 表示“今晚我看书或者去看电影”。当我今晚看了书，或者看了电影，或者既看了书又看了电影时，