普通高校“十二五”规划教材

公共基础课系列

线性代数

李 展 主编

崔艳丽 郭淑妹 副主编

清华大学出版社

普通高校“十二五”规划教材
公共基础课系列

线性代数

李　展　主　编
崔艳丽　郭淑妹　副主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要内容分为：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型共5章，在主要概念上力求自然引入，其中矩阵作为一个重要的研究对象和研究工具一直贯穿全书.本书选编的教学例题和习题题型比较丰富，习题量适度，并且选用了一些实际应用的例子，在学习难度上注重循序渐进性，各节均配有一定数量的习题，章末还配有总习题，其中有些选自研究生入学考试的试题，书末附有习题答案，供大家参考.

本书加强基础、重点突出，可作为高等院校非数学专业学生的线性代数教材，也可用作自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李展主编. —北京：清华大学出版社，2011.11

(普通高校"十二五"规划教材·公共基础课系列)

ISBN 978-7-302-27120-8

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第222692号

责任编辑：梁云慈
责任校对：王凤芝
责任印制：杨　艳
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：9.75　**字　数**：274千字
版　　次：2011年11月第1版　**印　　次**：2011年11月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：20.00元

产品编号：044336-01

前言

线性代数是高等学校理工科和经济管理等专业的一门重要基础课程，除了作为各门学科的重要工具以外，还对提高学生的数学素质起着重要的作用．通过线性代数的学习，不仅使学生能够全面系统地掌握线性代数的基本知识，而且能够领会处理代数问题的思想方法，培养和提高学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和计算能力．

本书可作为普通高等院校经济管理类和文史类本科学生和高职高专学生的教学用书．

全书内容分为行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量与二次型共5章，其中矩阵作为一个重要的研究对象和研究工具一直贯穿全书，同学们必须熟练掌握．各节均配有一定数量的习题，各章还配有总习题，其中有些选自研究生入学考试的试题，书末附有习题答案，供大家参考．需要强调指出的是，同学们在做习题时必须独立解答而不能先看答案，这样才能达到巩固所学知识的目的．

讲授本书大约需要50个学时，在编写过程中，我们力求做到论述清晰，推证严谨，深入浅出，通俗易懂，便于教学和学生自学．

本书由李展主编，崔艳丽、郭淑妹任副主编．具体分工为：任晔（第1章）、崔艳丽（第2章的前5节）、李展（第3章）、郭淑妹（第4章）、丁艳凤（第5章与第2章的第6节）．由于编者水平有限，书中必定有疏漏和不妥之处，恳请各位专家和读者批评指正．

编　者

2011年7月

目录

第 1 章

行　列　式

行列式是线性代数中的一个基本概念,也是讨论许多问题的一个基本工具.本章通过经济数学模型引入二阶和三阶行列式的定义,进而归纳出 n 阶行列式的定义,并讨论其性质及计算方法,最后给出应用行列式解线性方程组的克莱姆法则.

1.1　行列式的概念

一、引例

1. 货物交换

假设在一个经济系统中包括甲、乙、丙三个生产部门,三部门之间进行实物交易,实物交易系统如表 1-1 所示.

表　1-1

	甲	乙	丙
甲	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
乙	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$
丙	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$

表中所示表明,甲将产品的$\frac{1}{4}$留给自己,并分别拿出$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{4}$给乙和丙;而乙将产品的$\frac{1}{5}$留给自己,分别分配甲和丙$\frac{2}{5}$;丙将$\frac{1}{6}$留给自己,分别拿出$\frac{2}{3}$,$\frac{1}{6}$给乙和丙.

假设甲、乙、丙三个生产部门持有实物的单位价值分别为 x_1,x_2,x_3,那么由表 1-1 的第一行,甲生产的价值应等于他们交换到的产品(包括留给自己的)价值,即有 $x_1=\frac{1}{4}x_1+$

$\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{4}x_3$，同理可得，乙和丙生产与交换的价值方程为

$$x_2=\frac{1}{5}x_1+\frac{2}{5}x_2+\frac{2}{5}x_3,x_3=\frac{1}{6}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{6}x_3$$

整理后可得

$$\begin{cases}-\frac{3}{4}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{4}x_3=0\\ \frac{1}{5}x_1-\frac{3}{5}x_2+\frac{2}{5}x_3=0\\ \frac{1}{6}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{5}{6}x_3=0\end{cases}$$

由此，货物交换问题归结为三元一次线性方程组的求解问题.

2. 费用分摊

在一个经济系统中有 2 个生产部门和 3 个管理部门，在一个生产周期内，每个管理部门的费用由生产部门及其他管理部门分摊，分摊的比例由服务量决定. 现已知分摊费用比例以及各管理部门自身耗用费用如表 1-2 所示

表 1-2

管理部门	分摊比例					自身费用/万元
	部门					
	M_1	M_2	M_3	P_1	P_2	
M_1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2
M_2	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	3
M_3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	4

试确定每个管理部门的总费用(自身费用加上承担其他部门的费用).

设管理部门 M_1,M_2,M_3 发生的总费用分别为 x_1 万元，x_2 万元，x_3 万元，由表 1-2 可知，对管理部门，有如下等式：

$$\begin{cases}2+\frac{1}{8}x_2+\frac{1}{8}x_3=x_1\\ 3+\frac{1}{8}x_1+\frac{1}{8}x_3=x_2\\ 4+\frac{1}{8}x_1+\frac{1}{8}x_2=x_3\end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_3 = 2 \\ \frac{1}{8}x_1 - x_2 + \frac{1}{8}x_3 = -3 \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

由此费用分摊问题归结为三元一次线性方程组的求解问题.

大量的社会经济现象的研究最终都可以归结为形如上述的 n 个方程 n 个未知数的齐次线性方程组(右边常数项全为零)或非齐次线性方程组(右边常数项至少有一个非零)的求解,因此对此类方程组的求解就显得十分重要而有意义.

二、行列式的定义

1. 二阶、三阶行列式

中学学过解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

为求上述方程组的解,可利用加减消元得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,则方程组有惟一解:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

上式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得. 为便于记忆,引进如下记号 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,称为二阶行列式,并规定 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,因此,解中的分子可分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \quad 当\ D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0\ 时,$$

方程组的解可表示为: $x_1=\dfrac{D_1}{D}, x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是一个数, $a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为行列式的元素,横排的称为行,竖排的称为列. 如果把 a_{11}, a_{22} 的连线称为主对角线,把 a_{21}, a_{12} 的连线称为副对角线,如图 1-1 所示,则二阶行列式的值就等于主对角线上元素之积减副对角线上元素之积. 这种算法称为二阶行

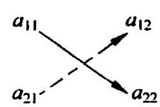

图 1-1

列式的对角线法则.

行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为方程组的系数行列式，行列式 D_1，D_2 分别是将 D 的第 1 列，第 2 列换为常数项 b_1，b_2 得到的.

例 1.1 用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 5x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-4}{-12} = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{8}{-12} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

同样，在解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

时，类似于二元线性方程组(1.1)的求解，则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

引进记号 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

称 D 为三阶行列式.

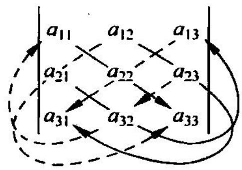

图 1-2

根据上式，三阶行列式还可以按图 1-2 的规则来计算. 即三条实线上的三个数乘积之和减去三条虚线上的三个数乘积之和. 这种计算三阶行列式的方法叫做沙路法.

引入三阶行列式后，三元线性方程组(1.2)当 $D\neq 0$ 时有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

行列式 D 称为方程组的系数行列式，而行列式 D_1,D_2,D_3 分别是将 D 中的第 1,2,3 列换成常数项 b_1,b_2,b_3 得到的.

例 1.2　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

解　由沙路法计算可得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= 2\times 3\times 4+4\times 1\times 3+6\times 1\times 2-2\times 1\times 2-4\times 1\times 4-6\times 3\times 3 \\ &= -26\end{aligned}$$

2. 全排列

简要复习中学的全排列定义与计算公式，导入这里的全排列. 现在讲的排列是中学所讲排列的特殊情况：

(1) 参与全排列的元素就是 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数；

(2) 排列是指全排列而不含中学的选排列.

定义 1.1　将 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数排成一列，称为这 n 个自然数的一个 n 级排列，也可简称排列. 记作 $i_1i_2\cdots i_n$.

显然，所有 n 级排列的总数为 $n!$，是偶数. 如果 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数按自然顺序排列，即 $i_1i_2\cdots i_n=123\cdots n$，则称这个排列为自然排列.

在一个排列中，如果某两个数的排列次序与自然排列不同，则称这两个数构成一个逆序.

定义 1.2 一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的所有逆序的总数称为这个排列的逆序数，记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

下面给出一个计算排列逆序数的方法.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数一个排列，考虑 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的数有 τ_i 个，就说 p_i 的逆序数是 τ_i. 全体数码的逆序数的总和 $\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i$ 就是这个排列的逆序数.

例如排列 32514，3 排在首位，逆序数为 0；2 的前面比 2 大的数只有一个 3，故逆序数为 1；5 的前面没有比 5 大的数，其逆序数为 0；1 的前面比 1 大的数有 3 个，故逆序数为 3；4 的前面比 4 大的数有 1 个，故逆序数为 1. 于是排列 32514 的逆序数为 $\tau(32541)=3+1+0+1+0=5$.

定义 1.3 在排列中，将某两个元素交换位置其余元素的位置不变得到新的排列的变换称为对换. 将相邻两个元素的对换称为相邻对换.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换，排列的奇、偶性要发生改变，即奇排列变为偶排列，偶排列变为奇排列.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$. 显然 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m$ 的逆序数经过对换并不改变，而当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后的 a 逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$，把它做 m 次相邻对换，变为 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_mc_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变为 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$. 即经过 $2m+1$ 次相邻对换，$a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 排列变为排列 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

一个 n 级排列如果不是奇排列就一定是偶排列，不是偶排列就一定是奇排列，这二者必居其一且只居其一. 因此，奇、偶排列数相同.

定理 1.2 $n\geqslant 2$ 时，在 $n!$ 个 n 阶排列中，奇偶排列各占一半，即各为$\frac{n!}{2}$个.

3. n 阶行列式的定义

下面可用全排列的方式改写二阶、三阶行列式.

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}$$

其中：①p_1p_2 是 1,2 的全排列；②τ 是 p_1p_2 的逆序数；③ $\sum$ 是对所有 1,2 的全排列共 2! 项的代数和.

三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= \sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中：①$p_1p_2p_3$ 是 1,2,3 的全排列；②τ 是 $p_1p_2p_3$ 的逆序数；③ $\sum$ 是对所有 1,2,3 的全排列共 3! 项的代数和.

推而广之，可以定义 n 阶行列式.

定义 1.4　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和. 各项的符号是：当这一项的行指标取成标准排列后，如果对应的列指标是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 因此，n 阶行列式的一般项可写为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

式中：①$p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的全排列；②τ 是 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数；③ $\sum$ 是对所有 $1,2,\cdots,n$ 的全排列求和. n 阶行列式有时简记为 $D=|a_{ij}|$.

特别规定一阶行列式 $|a|=a$.

由上述定义可知，当 a_{ij} 均为数时，行列式 D 为一个数. 如果 $a_{ij}\in P(i,j=1,2,\cdots,n)$，这里 P 是一个数域，则 $D\in P$. 当 a_{ij} 中含有变量时，行列式 D 是此变量的多项式. 故计算或求行列式就是把这个数或多项式求出来.

例 1.3 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 由行列式定义知

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，其中 a_{nj_n} 取自 D 的第 n 行，而第 n 行除 a_{nn} 外，其余元素全为零. 故当 $j_n\neq n$ 时，对应的行列式展开式中的那一项一定为零，求和时该项可不记，因此只需考虑 $j_n=n$ 的项. 同样第 $n-1$ 行中只需考虑 $j_{n-1}=n-1$ 的项. 依此类推，D 的 $n!$ 项中除了列指标 $j_1j_2\cdots j_n=12\cdots n$ 对应的项外，其余的项均为零，又因 $\tau(12\cdots n)=0$，故 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

上面形式的行列式称为上三角行列式.

同理可得下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

特别地，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$. 这种行列式称为对角行列式.

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线.

以上三种情况可简单记为：三角行列式及对角行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

习题 1-1

1. 填空题

(1) 若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{5j}a_{44}$ 是五阶行列式中带正号的一项，则 $i=$________，$j=$________；

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$________；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\,009 \end{vmatrix}=$________；

(4) 用二阶行列式解方程组 $\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=2 \end{cases}$ 时，必有 $D=$________，$D_1=$________，$D_2=$________.

2. 利用对角线法则，计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x-1 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$

3. 用行列式的定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & x_2 \\ a_2 & 0 & x_3 & 0 \\ a_3 & x_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　(2) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

4. 试用行列式定义证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

1.2 行列式的基本性质

对于零元素个数较多或阶数较低(二、三阶)的行列式,用定义计算比较容易,但对一般的高阶($n\geqslant4$)行列式,直接用定义计算会很困难或几乎不可能. 因而需要讨论行列式的性质,以简化其计算.

定义 1.5 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式,称为 D 的转置行列式,记为 D^{T}. 即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证 记 $D^{\mathrm{T}}=\mathrm{Det}(b_{ij})$,则

$$b_{ij}=a_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

所以

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}=D$$

由此可知,行与列具有同等地位. 关于行的性质,对列也同样成立,反之亦然.

例 1.4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}$.

解 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}=-D$

由 $D=D^{\mathrm{T}}$,$D^{\mathrm{T}}=-D$,所以 $D=0$.

性质 1.2 行列式互换两行(列),行列式的值反号.

例 1.5 $D=\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,则将第 1 行与第 2 行互换后得

$$\begin{vmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$$

推论 1.1　行列式有两行(列)相同,则此行列式为零.

证　将行列式 D 中具有相同元素的两行互换,其结果仍为 D,而由性质 1.2 可知其结果应为 $-D$,因此 $D=-D$,所以 $D=0$.

性质 1.3　行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k,等于用数 k 乘以该行列式. 换言之,行列式某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD$$

推论 1.2　如果行列式中有一行(列) 的元素全为零,那么此行列式等于零.

证　此即性质 1.3 中 $k=0$ 的情况.

性质 1.4　行列式中有两行(列)的元素对应成比例,则此行列式为零.

证　由性质 1.3 可将这两行(列)的比例系数提到行列式外面,则余下的行列式中有两行(列)的对应元素相同,由推论 1.1 可知此行列式等于零,所以原行列式等于零.

性质 1.5　若行列式某一行(列)的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两个行列式的和. 这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列)的元素与原行列式相同.

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　$D = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$

$$= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

例 1.6　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & 3a_1 & b_1 \\ a_2+b_2 & 3a_2 & b_2 \\ a_3+b_3 & 3a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.