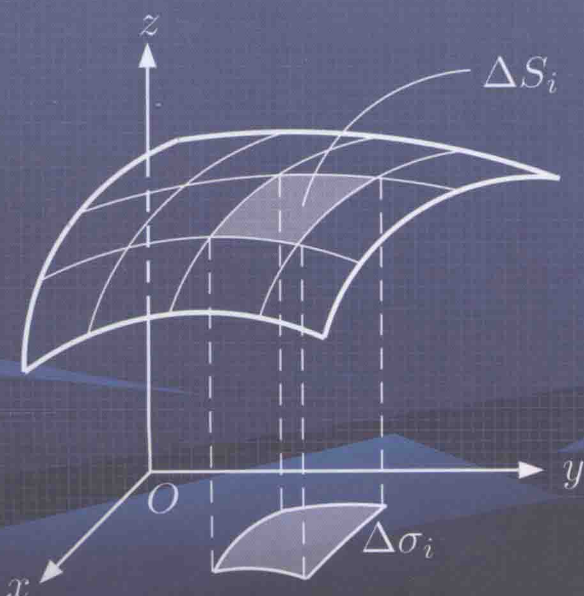
"十二五"江苏省高等学校重点教材

南京大学·大学数学系列

微积分 II（第二版）

张运清 廖良文 周国飞 邓卫兵 孔 敏 黄卫华 编



科学出版社

“十二五”江苏省高等学校重点教材(编号：2014-1-137)

南京大学·大学数学系列

微积分 II
(第二版)

张运清　廖良文　周国飞
邓卫兵　孔　敏　黄卫华　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本套书由《微积分 I（第二版）》、《微积分 II（第二版）》两本书组成.《微积分 I（第二版）》内容包括极限与函数的连续性、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、广义积分、向量代数与空间解析几何. 在附录中简介了行列式和矩阵的部分内容.《微积分 II（第二版）》内容包括多元函数微分学、二重积分、三重积分及其应用、曲线积分、曲面积分、场论初步、数项级数、幂级数、傅里叶级数、广义积分的敛散性的判别法、常微分方程初步等. 本套书继承了微积分的传统特色, 内容安排紧凑合理, 例题精练, 习题量适难易恰当.

本套书可供综合性大学、理工科大学、师范院校作为教材, 也可供相关专业的工程技术人员参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. Ⅱ/张运清等编. —2 版. —北京: 科学出版社, 2016.6

“十二五”江苏省高等学校重点教材. 南京大学・大学数学系列

ISBN 978-7-03-048412-3

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 117205 号

责任编辑: 黄 海 许 蕾 / 责任校对: 李 影
责任印制: 张 倩 / 封面设计: 许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 8 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2016 年 6 月第 二 版 印张: 19 3/4
2016 年 6 月第四次印刷 字数: 468 000

定价: 49.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

第二版前言

本书第一版在 2013 年 8 月正式出版, 2014 年被江苏省教育厅列入江苏省高等学校重点教材立项建设名单 (修订教材). 自 2013 年以来, 我们在南京大学 2013、2014、2015 级的本科生中使用了该教材, 在教学使用中取得了良好的效果. 在使用过程中, 我们也发现了第一版存在的一些问题和不足之处. 在多次倾听任课老师的建议以及学生的意见后, 根据这些建议和意见, 并根据教学实践中积累的经验, 我们对第一版进行了修订, 从而形成了本书的第二版.

在此次修订中, 我们保持了这套教材原有的编写思想与基本内容框架, 但对一些在教学过程中发现的不能适应课堂教学的部分进行了修改. 我们首先纠正了第一版中的一些排版错误, 更正了习题参考答案中的个别错误答案. 其次, 我们对部分知识点进行了重写 (如第 7 章两类曲线积分之间的关系, 第 10 章微分方程积分因子等), 修改了一些结论的证明 (如第 7 章格林公式的证明、第 8 章正项级数柯西积分判别法的证明等), 修改了一些例题的解法 (如第 6 章二重积分换元积分法部分的例题, 第 7 章格林公式部分的例题, 第 8 章幂级数部分的例题, 以及第 8 章广义积分敛散性判别法部分的例题等), 并对微积分 I 和微积分 II 的几乎所有章节都有针对性地增加了大量难度不同的习题, 删除了第一版中某些难度不合适的习题, 从而使本书更加适应于微积分课程的教学, 也更适合学生自学和自我检测.

此次修订工作由张运清老师具体负责, 邓卫兵、黄卫华、孔敏、廖良文和周国飞老师提供了具体的修订意见, 并进行了审阅. 南京大学数学系主任秦厚荣教授、副主任朱晓胜教授对本书的再版提供了很多具体的支持和帮助, 很多任课教师也对本书的编写和修订提出了许多宝贵的意见和建议, 在此谨向他们致以诚挚的谢意. 编者特别感谢科学出版社黄海、许蕾等编辑和工作人员为本书的出版所付出的辛勤劳动.

由于编者水平有限, 书中错误和不足之处在所难免, 期盼广大读者批评指正.

编　者

2016 年 6 月

第一版前言

为了使大学数学的教学内容更加适应新形势的需要, 我们根据南京大学新的招生形式(按大类招生)、国际交流的需要以及 "三三制" 教学模式的要求, 在数学系和教务处的指导下, 对我校非数学系的外系科大学数学的教学进行了多次研讨, 确定了外系科大学数学的教学模式和教学大纲. 微积分是大学生必修的基础数学课, 学习微积分学可以培养学生的逻辑思维能力, 提高学生的数学素养, 对学生以后的发展起着重要的作用. 本教材是我们为南京大学理工科第一层次的一年级本科生 (包含物理、电子、计算机、软件工程、天文、工程管理、地球科学、大气科学、地理科学以及商学院等专业) 编写的大学数学教材. 南京大学理工科第一层次大学数学共开设两个学期, 总课时为 128 课时, 另加 64 课时的习题课. 整套教材分上、下两册, 上册主要包含极限, 一元函数微积分学, 空间解析几何与向量代数; 下册主要包含多元函数微积分学, 级数及常微分方程初步等.

在编写本教材的过程中, 我们参阅了国内外部分教材, 汲取其精华, 根据我们的理解和经验, 对教材作了现有的编排, 并配备了相当数量的习题. 其中黄卫华编写了第 1、4 章以及附录, 邓卫兵编写了第 2 章, 孔敏编写了第 3 章, 张运清编写了第 5、6 章, 廖良文编写了第 7、8、9 章, 周国飞编写了第 10 章. 张运清绘制了上、下册的大部分图形. 全书由黄卫华统稿, 周国飞对下册也作了部分统稿工作. 附录中, 我们给出了习题的参考答案. 但建议读者不要依赖参考答案, 尽量独立思考.

在本教材的编写过程中, 我们得到了系领导的关怀, 无论在资金还是时间上都得到了他们大力的支持, 在此表示衷心的感谢! 数学系党委书记秦厚荣教授、系主任尤建功教授、副系主任师维学教授、尹会成教授、朱晓胜教授、数学系陈仲教授、罗亚平教授、宋国柱教授、姚天行教授、姜东平教授、梅家强教授等对本教材进行了审阅并提出了非常宝贵的意见. 此外, 在本教材的试用阶段 (2010.9~2013.6), 邓建平、陆宏、潘灏、肖源明、耿建生、李军、吴婷、李春、崔小军、苗栋、王奕倩、程伟、谭亮、王伟、刘公祥、窦斗、石亚龙、杨俊峰、钱志、李耀文、陈学长等老师也提出了许多有益的建议, 在此表示感谢!

此外, 在 2009 年本教材获南京大学 "985 工程" 二期 "精品教材" 建设基金的支持, 在此表示由衷的感谢!

由于我们水平有限, 错误和缺点在所难免, 期盼读者批评指正.

编 者

目　　录

第 5 章　多元函数微分学

在前面几章中, 我们讨论的函数是只有一个自变量的函数, 即一元函数, 研究的是一元函数的微积分. 但在现实问题中, 常常出现一个变量依赖于两个或两个以上变量的情形, 这就是多元函数. 因此, 将一元函数的微积分推广到多元函数的微积分是必要的, 也是自然的. 本章讨论多元函数及其微分学, 多元函数的积分学则留到下面的章节讨论.

5.1　多元函数的极限与连续性

5.1.1　点集基本知识

为了讨论多元函数, 我们需要先介绍 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中点集的基本知识. 首先我们把距离及邻域的概念推广到 n 维空间.

设 $P_1(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $P_2(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, 我们用

$$\rho(P_1, P_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}$$

表示两点 P_1, P_2 间的**距离**.

定义 5.1.1 (邻域)　设 $P_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, 点集

$$N_\delta(P_0) = \{ P \mid P \in \mathbb{R}^n,\ \rho(P, P_0) < \delta \}$$

称为点 P_0 的δ **邻域**, 简称**邻域**. 点集

$$\overset{\circ}{N}_\delta(P_0) = N_\delta(P_0) \backslash \{P_0\}$$

称为点 P_0 的**去心** δ **邻域**, 简称**去心邻域**.

下面我们给出 n 维空间中内点、外点、边界点、聚点以及开集和闭集的概念.

定义 5.1.2 (内点, 外点, 边界点, 聚点)　设 $G \subseteq \mathbb{R}^n$,

(1) 若 $P_0 \in G$, 且存在 $\delta > 0$, 使得 $N_\delta(P_0) \subset G$, 则称 P_0 是 G 的**内点**. G 的内点的集合称为 G 的**内部**, 记为 G°.

(2) 若 $P_0 \notin G$, 且存在 $\delta > 0$, 使得 $N_\delta(P_0) \bigcap G = \varnothing$, 则称 P_0 是 G 的**外点**. G 的外点的集合称为 G 的**外部**.

(3) 若 $P_0 \in \mathbb{R}^n$, 且对任意的 $\delta > 0$, $N_\delta(P_0)$ 中既有点属于 G, 又有点不属于 G, 则称 P_0 是 G 的**边界点**. G 的全部边界点的集合称为 G 的**边界**, 记为 ∂G.

(4) 若 $P_0 \in \mathbb{R}^n$, 且对任意的 $\delta > 0$, $\overset{\circ}{N}_\delta(P_0)$ 中总有点属于 G, 则称 P_0 是 G 的**聚点**.

定义 5.1.3 (开集, 闭集)　设 $G \subseteq \mathbb{R}^n$,

(1) 若 G 的所有点都是 G 的内点, 即 $G = G^\circ$, 则称 G 为**开集**.

(2) 若 G 关于全集 $\mathbb{R}^n$ 的补集 (即 $\mathbb{R}^n \setminus G$) 为开集, 则称 G 为**闭集**.

(3) 如果点集 G 内任意两点, 都可用曲线连接起来, 且该曲线上的点都属于 G, 则称 G 为**连通集**.

(4) 若 G 是开集, 又是连通集, 则称 G 为**开区域**.

(5) 若存在非空开区域 A, 使得 $G = A \bigcup \partial A$, 则称 G 为**闭区域**.

(6) 开区域与闭区域统称**区域**.

我们规定, 空集 $\varnothing$ 既是开集又是闭集, 因而全空间 $\mathbb{R}^n$ 既是开集又是闭集. 除此之外, $\mathbb{R}^n$ 的任何非空真子集都不可能既是开集又是闭集.

定义 5.1.4 (有界集)　设 $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \mathbb{R}^n$. 若存在 $k \in \mathbb{R}$, 使得 $G \subset N_k(P_0)$, 则称 G 为**有界集**, 此时称

$$d(G) = \sup\{\rho(P_1, P_2) \mid \forall P_1, P_2 \in G\}$$

为 G 的**直径**. 否则, 称 G 为**无界集**.

例 5.1.1　设 $\mathbb{R}^3$ 中的点集

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\},$$

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\},$$

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

则由定义可得下列结论:

(1) $A^\circ = B^\circ = A, C^\circ = \varnothing$;

(2) $\partial A = \partial B = \partial C = C$;

(3) 集合 A, B 的聚点的集合都是 B, C 的聚点的集合是 C;

(4) A, B, C 都是连通集, 也是有界集, 直径都是 2;

(5) A 是开集也是开区域, B 是闭集也是闭区域, C 是闭集但不是闭区域.

例 5.1.2　设 $\mathbb{R}^2$ 中的点集 $G = \left\{(x, y) \middle| x = \dfrac{1}{n}, y = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, 则由定义可得下列结论:

(1) $G^\circ = \varnothing$;

(2) $\partial G = G \bigcup \{(0, 0)\}$;

(3) 集合 G 有唯一的聚点 $(0, 0)$;

(4) G 不是连通集, 不是开集, 也不是闭集;

(5) G 是有界集且 $d(G) = \sqrt{2}$.

5.1.2　多元函数的概念

定义 5.1.5 (n 元函数)　设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 我们称映射

$$f: \ D \to \mathbb{R}$$

为定义在 D 上的 n **元函数**. n 元函数也常常记为

$$y = f(P), \quad P \in D,$$

或

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D.$$

变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为**自变量**, y 称为**因变量**, D 称为函数 f 的**定义域**, 记为 $D(f)$.

$$f(D) = \{ f(P) | P \in D(f) \}$$

称为函数 f 的**值域**.

在记号上, 我们常将二元函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$ 记为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D;$$

将三元函数 $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^3)$ 记为

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D.$$

二元函数和二元以上的函数统称为**多元函数**.

与一元函数类似, 对于由解析表达式给出的多元函数, 常常并不明确表明定义域, 此时多元函数的定义域理解为其自然定义域, 也就是使这个解析表达式有意义时自变量所容许变化的范围. 例如, 二元函数 $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, 其自然定义域为 $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$.

与一元函数类似, 我们可以定义多元隐函数, 多元复合函数, 多元初等函数, 以及多元有界函数, 在此不赘述.

例 5.1.3　讨论下列函数的定义域.

(1) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$;

(2) $z = \arcsin(x + y)$;

(3) $u = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$;

(4) $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$.

解　(1) $D(z) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$;

(2) $D(z) = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x + y \leqslant 1\}$;

(3) $D(u) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$;

(4) $D(u) = \{(x, y, z) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9\}$. □

我们知道, 一元函数 $y = f(x)$ 的图形是所有满足等式 $y = f(x)$ 的点 (x, y) 的集合, 通常是平面上的曲线. 类似地, 二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形是所有满足等式 $z = f(x, y)$ 的点 (x, y, z) 的集合, 通常是空间曲面. 例如函数 $z = 2x + 3y + 4$ 的图形是空间中一平面, 而函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的图形是圆锥面.

5.1.3 多元函数的极限

极限的概念是研究函数性态的重要工具. 下面我们以二元函数为例来叙述多元函数极限的定义.

一、二重极限

定义 5.1.6(二重极限) 设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上有定义, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 若存在常数 A, 使得对于任意给定的正数 ε, 总存在正数 δ, 当 $P(x,y)\in D$ 且 $0<\rho(P,P_0)<\delta$ 时, 恒有

$$|f(P)-A| = |f(x,y)-A| < \varepsilon,$$

则称**函数** $f(x,y)$ **在** $P\to P_0$ **时以** A **为极限**, 记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A \quad \text{或} \quad f(P)\to A \ \ (P\to P_0),$$

也记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \text{ 或 } f(x,y)\to A \ \ \big((x,y)\to(x_0,y_0)\big).$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A.$$

这个极限也称为**二重极限**.

简单地说, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时, 恒有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

以上关于二元函数的二重极限的概念, 可相应地推广到 n 元函数的 n 重极限, 读者可以自行完成.

例 5.1.4 试用定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (2x+4y) = 10$.

解 因为

$$\begin{aligned}\big|(2x+4y)-10\big| &= \big|2(x-1)+4(y-2)\big|\\ &\leqslant 2|x-1|+4|y-2|\\ &\leqslant 6\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2},\end{aligned}$$

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{6}$, 则当 $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ 时, 恒有

$$\big|(2x+4y)-10\big| < \varepsilon,$$

由定义可知

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (2x+4y) = 10. \qquad \square$$

二重极限的定义与一元函数极限的定义在形式上并无多大差异, 因此, 一元函数极限的运算法则 (如四则运算法则, 无穷小的运算法则) 与有关性质 (如极限的唯一性, 局部有界性,

夹逼准则) 等都可以推广到二重极限中来. 但由于变量的增多, 二元函数的定义域是平面点集, 二重极限的复杂性在于点 $P(x,y)$ 在平面上趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式是多种多样的, 而二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$ 是指点 $P(x,y)$ 在定义域中以任何方式趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 都趋向于同一个常数 A. 因此, 如果 $P(x,y)$ 在定义域中以某一特殊的方式 (如沿着某条确定的直线或某条确定的曲线) 趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 趋向于某一常数, 我们并不能由此断定二重极限存在. 但是, 如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 趋向于不同的值, 那么我们就可以断定函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限不存在.

例 5.1.5　试求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　方法 1: 因为

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=2\varepsilon$, 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 恒有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon.$$

由定义可知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

方法 2: $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=x\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, x 是无穷小, $\left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$ 是有界变量, 无穷小与有界变量的积是无穷小, 所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

方法 3: 记 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 则

$$(x,y)\to(0,0)\Longleftrightarrow \rho\to 0^+,\qquad f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho\cos\theta\sin\theta,$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0^+}\rho\cos\theta\sin\theta=0.$$

□

例 5.1.6　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 2}} \dfrac{\sin xy^2}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x+y}$.

解　(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 2}} \dfrac{\sin xy^2}{x}=\lim\limits_{\substack{u\to 0\\y\to 2}} y^2\dfrac{\sin u}{u}=4$;

(2) $0<\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x+y}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+y}$, 而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+y}=0$, 由夹逼准则可知

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x+y}=0. \qquad \square$$

例 5.1.7 试证 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时无极限.

解 方法 1: 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=0$ 趋向于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{y=0\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,0)=\lim_{x\to0}0=0,$$

当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{y=x\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

由此可知, 当 (x,y) 以不同方式趋向于 $(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 趋向于不同的值, 所以 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时无极限.

方法 2: 令 $x=\rho\cos\theta_0, y=\rho\sin\theta_0$, θ_0 为常数, 且 $0\leqslant\theta_0<2\pi$, 则

$$(x,y)\to(0,0)\Longleftrightarrow\rho\to0^+,$$

$$f(x,y)=f(\rho\cos\theta_0,\rho\sin\theta_0)=\cos\theta_0\sin\theta_0,$$

由于点 P 沿着直线 $L:x=\rho\cos\theta_0, y=\rho\sin\theta_0$ 趋向于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\in L\\(x,y)\to(0,0)}}f(x,y)=\lim_{\rho\to0^+}\cos\theta_0\sin\theta_0=\cos\theta_0\sin\theta_0,$$

其极限值随着 θ_0 的变化 (即随着直线 L 的变化) 而取不同的值, 所以函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时无极限. $\square$

二、累次极限

上面介绍的二重极限, 是当函数的两个自变量 (如果是 n 元函数, 就是 n 个自变量) 同时趋于各自的极限时所得出的. 除此之外, 有时我们还会遇到函数的两个自变量按先后次序分别趋于各自的极限的情形, 这就是累次极限.

对于二元函数 $f(x,y)$, 先把变量 y 固定 (视 y 为参数), 这时 $f(x,y)$ 只是 x 的一元函数, 如果对于一切固定的 y, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 存在, 则这个极限是与 y 有关的函数, 记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y).$$

然后再让 $y\to y_0$, 考虑 $\varphi(y)$ 的变化, 若 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$ 也存在, 设为 A, 即

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A,$$

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**先对 x 后对 y 的累次极限**, 记为

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A.$$

类似地, 可定义函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**先对 y 后对 x 的累次极限**

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

例 5.1.8 求函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处的两个累次极限.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0} 0=0.$

同理可知 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0.$ □

例 5.1.9 讨论函数 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$ 在点 $(0,0)$ 处的二重极限和累次极限.

解 由无穷小与有界函数的乘积是无穷小易知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}=\lim_{y\to 0} 0=0.$$

但当 $x\neq 0$ 时, $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在. □

这两个例子说明二元函数的二重极限与累次极限是两个不同的概念, 二重极限存在并不能得出累次极限存在; 反过来, 二元函数的两个累次极限都存在且相等也不能得出二重极限存在. 在计算两种不同次序的累次极限时, 要注意不能随便交换极限次序, 而在求二重极限时, 也要注意不能用累次极限代替二重极限, 否则可能得出错误的结论.

5.1.4 多元函数的连续性

一、多元连续函数的定义

定义 5.1.7(连续性) 设 $G\subseteq\mathbb{R}^n$, 函数 f 在 G 上有定义, P_0 是 G 的聚点且 $P_0\in G$. 若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 f 在 P_0 处**连续**. 如果 G 内的每一点都是聚点, 且 f 在 G 的每一点都连续, 则称 f 在 G 上**连续**. 如果函数 f 在 P_0 处不连续, 则称函数 f 在 P_0 处**间断**, 并称 P_0 是函数 f 的**间断点**.

由定义可知,

f 在 P_0 连续 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $P\in G$ 且 $\rho(P,P_0)<\delta$ 时, 恒有 $|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$.

另外, 如果 f 是二元函数 $z=f(x,y)$, 记

$$\Delta x=x-x_0,\qquad \Delta y=y-y_0,$$

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0),$$

分别称 Δx 和 Δy 为自变量 x 和 y 的增量, Δz 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**全增量**, 于是

$$f(x,y) \text{ 在点 } (x_0,y_0) \text{ 处连续} \iff \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0.$$

与一元函数类似, 有限个多元连续函数的和、差、积、商 (分母不为零) 仍是连续函数. 多元连续函数的复合函数仍是连续函数, 多元初等函数在其定义域上每一点连续.

例 5.1.10 设

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } xy = 0, \\ 0, & \text{当 } xy \neq 0. \end{cases}$$

试证明函数 $f(x,y)$ 在原点处关于自变量 x 或 y 分别是连续的, 但该函数在原点处不连续.

解 当固定 $x=0$ 或 $y=0$ 时, 有 $f(0,y)=f(x,0)=1$, 所以

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = f(0,0) = 1, \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = f(0,0) = 1,$$

因而函数 $f(x,y)$ 在原点处关于自变量 x 或 y 分别是连续的. 但容易看出 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在, 所以函数 $f(x,y)$ 在原点处并不连续. □

例 5.1.11 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{x+y}{x^2y^2}$.

解 函数 $\dfrac{x+y}{x^2y^2}$ 是二元初等函数, 在点 $(1,1)$ 处有定义, 故在点 $(1,1)$ 处连续. 所以

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{x+y}{x^2y^2} = \frac{1+1}{1} = 2.$$ □

二、有界闭区域上连续函数的性质

与一元函数类似, 定义在有界闭区域上的连续函数有如下重要性质 (我们略去定理的证明):

定理 5.1.1 (零点定理) *设 $G\subseteq \mathbb{R}^n$ 为有界闭区域, 函数 f 在 G 上连续, 若 $P_1, P_2 \in G$, 且*

$$f(P_1)f(P_2) < 0,$$

则存在 $P_0 \in G$, 使得 $f(P_0)=0$.

定理 5.1.2 (介值定理) *设 $G\subseteq \mathbb{R}^n$ 为有界闭区域, 函数 f 在 G 上连续, $P_1, P_2 \in G$, 且 $f(P_1)\neq f(P_2)$. 设 μ 为满足不等式*

$$f(P_1) < \mu < f(P_2) \qquad (\text{或 } f(P_2) < \mu < f(P_1))$$

的任意实数, 则存在 $P_0\in G$, 使得 $f(P_0)=\mu$.