高等学校试用教材

微分方程数值解法

李荣华　冯果忱　编

高等教育出版社

高等学校试用教材

微分方程数值解法

李荣华　冯果忱

高等教育出版社

内容提要

本书内容包括常微分方程初值问题的数值解法、变分原理、椭圆型方程的差分法、椭圆型方程的有限元法、离散方程的解法、抛物型方程及双曲型方程的差分解法等七章. 书中侧重介绍有限差分法和有限元法的计算及有关基本理论. 选取的方法较通用、典型, 基本概念的叙述也比较严格精确. 本书可作为综合大学计算数学专业的试用教材, 也可供研究生及广大从事计算机应用的计算数学工作者、工程技术人员使用.

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复“高等教育出版社”。本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校试用教材

微分方程数值解法

李荣华 冯果忱 编

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海群众印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 13.25 页 字数 320,000

1980年1月第1版 1984年2月第4次印刷

印数 25,201—32,200

书号 13010·0417 定价 0.96 元

前　言

在 1977 年 10 月上海理科数学教材会议上，有关院校的代表商定为综合大学计算数学专业学生编写四种专业教材，这就是后来由人民教育出版社出版的**线性代数**(蒋尔雄、高坤敏、吴景琨等编)、**数值逼近**(李岳生、黄友谦等编)、**数值代数**(包括曹志浩、张玉德、李瑞遐等编的**矩阵计算和方程求根**及王德人编的**非线性方程组解法与最优化方法**)以及本书：**微分方程数值解法**.

本书第一章为常微分方程初值问题的数值解法，包括 Euler 法、线性多步法、予估-校正算法、Runge-Kutta 法及有关的稳定性、收敛性理论，最后介绍刚性问题的数值解法. 从第二章起，我们开始讨论偏微分方程的数值解法，主要是有限差分法和有限元法. 对椭圆型方程，以有限元法为主(第四章)，同时介绍有限差分法(第三章). 第二章的变分原理，是有限元法和差分法的理论基础. 对抛物型方程，以有限差分法为主，同时介绍有限元法(第六章). 对双曲型方程，则仅介绍有限差分法(第七章). 我们这样处理，主要是为了避免叙述上的重复；同时也在一定程度上考虑到这两类方法当前应用的最后介绍刚性问题的数值解法性微分方程，最后都归结为线性代综合大学计算数学常微分方程用一章（第五章)讨论离散方程的解.

大家知道，自从数字电子计算机问世以来，微分方程数值解法得到很大发展，在数值分析中占有极其重要的地位. 但是作为一门基础课教材，不可能也不必要面面俱到，包罗万象. 我们觉得重要的是通过一些典型、通用的数值方法，去阐明构造方法的基本思

想和技巧,使学生达到举一反三的功效．其次,对数值方法中一些基本概念和基本理论(如稳定性、收敛性、误差估计等)的叙述,应尽可能严格精确,培养学生具有一定的理论分析能力．鉴于微分方程数值解法在近廿多年来发展迅速,提出了许多新方法、新思想,因此在选材时我们也注意了推陈出新,适当反映这门学科的新成就．

按照我们的设想,本教材讲授时间大约需要110学时左右．但是考虑到不同学校和不同学生的实际情况,我们从整个内容中分出基本部分和选学部分(打星号的节),教师可酌情删减选学部分的一部或全部,这不会影响本课程的基本要求．第一章和后六章有相对独立性,读者可越过第一章直接阅读后六章,这不会遇到实质性困难．各章配备了少量习题,显然这是很不够的．为了使学生更好地消化课程内容,特别是培养学生的实际解题能力,我们认为还应结合本教材适当安排一些实习题目,让学生运用学到的数值方法在计算机上算出数值结果．

在编写过程中参考的主要书目都列在各章末尾．这里特别提一下的是,除所列参考书目外,我们还参考了吉林大学计算数学教研室黄明游、李岳生及编者过去所写的讲义．本书初稿写成后,由北京大学胡祖炽(主审)及复旦大学、上海科技大学的同志负责审查,对本书提出许多宝贵意见和建议,谨此向他们表示衷心感谢．

本书第二、三、四、七章由李荣华执笔,第一、五、六章由冯果忱执笔．由于我们水平所限,又缺乏教学实践经验,时间也很匆忙,一定有很多疏漏、错误的地方,敬请读者批评指正．

编　者

1979年12月

目　录

第一章　常微分方程初值问题

第二章　变分原理

第三章　椭圆型方程——有限差分法

第四章　椭圆型方程——有限元法

第五章　离散方程的解法

第六章　抛物型方程

第七章　双曲型方程

第一章 常微分方程初值问题

§1 引 论

在自然科学的很多领域中，都会遇到常微分方程初值问题，然而，我们知道，只有少数十分简单的微分方程能够用初等方法求得它们的解，多数情形只能利用近似方法求解. 在常微分方程教材中已经熟悉的级数解法、逐步逼近法等就是近似解法. 这些方法可以给出解的近似表达式，通常称为近似解析方法. 还有一类近似方法称为数值方法，它可以给出解在一些离散点上的近似值. 利用电子计算机解微分方程主要使用数值方法.

本章研究常微分方程初值问题主要的数值解法以及与之相关的理论问题.

为了今后的需要，首先简要回忆一下常微分方程初值问题的若干理论结果.

考虑常微分方程的初值问题:

$$\frac{du}{dt}=f(t,u), \tag{1.1}$$

$$u(0)=u_0, \tag{1.2}$$

其中 f 为 t、u 的已知函数，u_0 为给定的初始值.

定理 1 若 $f(t,u)$ 在区域 G: $0\leqslant t<T$, $|u|<\infty$ 内连续，且关于 u 满足 Lipschitz（李普希兹）条件：存在常数 L，使

$$|f(t,u_1)-f(t,u_2)|\leqslant L|u_1-u_2|, \tag{1.3}$$

对所有 $0\leqslant t<T$ 及任何 u_1、u_2 均成立，则初值问题(1.1)，(1.2)有连续可微的解存在并且唯一.

许多实际问题，初始值 u_0 以及右端 $f(t,u)$ 常常是通过测量得到的，难免产生误差，所以必须考虑初始值 u_0 及微分方程右端 $f(t,u)$ 有微小变化时，引起微分方程解的变化问题. 我们只考虑解连续地依赖于初始值及右端的情形. 对近似求解过程来说，这种性质更是十分重要的，因为在近似求解过程中误差总是难免的.

下述定义刻划了这种连续相依关系.

定义 1 称初值问题(1.1), (1.2)对初始值 u_0 **是适定的**，如果存在正常数 K、η，使得对任何 $\varepsilon\leqslant\eta$，当

$$|u_0-\tilde{u}_0|<\varepsilon, \tag{1.4}$$

$$|f(t,u)-\tilde{f}(t,u)|<\varepsilon,\ \ 0<t<T,\ \ |u|<\infty \tag{1.5}$$

时，初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}=\tilde{f}(t,v),\\ v(0)=\tilde{u}_0\end{cases} \tag{1.6}$$

有解 $v(t)$ 存在，并且满足

$$|u(t)-v(t)|\leqslant K\varepsilon, \tag{1.7}$$

其中 $u(t)$ 是初值问题(1.1), (1.2)的解.

定理 2 如果 $f(t,u)$ 在 G 上关于 u 满足 Lipschitz 条件，则初值问题(1.1), (1.2)对任何初始值都是适定的.

上述结论在微分方程教材中已经建立，只是叙述形式不完全相同. 我们这里不全面证明上述定理，只给出估计式(1.7)的证明，因为，这种证明方法对今后研究数值解法的理论是有所启示的.

首先证明

引理(Bellman 不等式) 设 $\eta(t)$ 为 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上的连续函数，若

$$|\eta(t)|\leqslant\beta+\alpha\int_{t_0}^{t}|\eta(\tau)|d\tau,\ \ t_0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{1.8}$$

α、β 为非负常数,则

(1.9) $$|\eta(t)| \leqslant \beta e^{\alpha(t-t_0)}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

证明 先设 $\beta>0$. 令

$$\zeta(t)=\beta+\alpha\int_{t_0}^{t} |\eta(\tau)| d\tau,$$

于是 $\zeta(t_0)=\beta>0$. 此时(1.8)式可改写成

$$\frac{d\zeta(t)}{dt}\leqslant\alpha\zeta(t),$$

即

$$\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)}\leqslant\alpha.$$

从 t_0 到 t 积分上式得到

$$\ln\zeta(t)/\beta\leqslant\alpha(t-t_0),$$

从而

$$\zeta(t)\leqslant\beta e^{\alpha(t-t_0)}.$$

若 $\beta=0$, 需证 $\eta(t)=0$. 从(1.8)式, 对任意 $\delta>0$ 有

$$|\eta(t)| \leqslant\delta+\alpha\int_{t_0}^{t} |\eta(\tau)| d\tau,$$

利用已证明的结论有

$$|\eta(t)| \leqslant\delta e^{\alpha(t-t_0)},$$

由 δ 的任意性推出 $\eta(t)=0$. 引理证毕.

现在证明 (1.7). 令 $w=v-u$, 则显然它是下列初值问题的解:

(1.10) $$\frac{dw}{dt}=\tilde{f}(t,v)-f(t,u),$$

(1.11) $$w(0)=\tilde{u}_0-u_0.$$

积分(1.10)式得到

$$w(t)=\int_0^t [\tilde{f}(\tau,v(\tau))-f(\tau,u(\tau))]d\tau+w(0),$$

利用 Lipschitz 条件及不等式(1.4),(1.5),由上式导出

$$\begin{aligned}|w(t)| \leqslant & \int_0^t [|\tilde{f}(\tau, v(\tau)) - f(\tau, v(\tau))| \\ & + |f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, u(\tau))|] d\tau + |w(0)| \\ \leqslant & L\int_0^t |w(\tau)| d\tau + (1+T)\varepsilon,\end{aligned}$$

从而利用 Bellman(贝尔曼)不等式得到

$$|w(t)| \leqslant (1+T)\varepsilon e^{Lt},$$

这就是(1.7)式,其中 $K=(1+T)e^{LT}$.

注意,在定理 1 及定理 2 中都假定了 $f(t, u)$关于 u 在整个数轴上满足 Lipschitz 条件,这只是为了叙述简便.当 $f(t,u)$关于 u 在有限区间上满足 Lipschitz 条件时也可建立相应的结论.

其次,定理 1 及定理 2 完全适用于方程组的情形,在这种情形 $u(t)$及 $f(t,u)$应理解为向量:

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{pmatrix}u^1(t)\\u^2(t)\\\vdots\\u^n(t)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u})=\begin{pmatrix}f^1(t,u^1,\cdots,u^n)\\f^2(t,u^1,\cdots,u^n)\\\vdots\\f^n(t,u^1,\cdots,u^n)\end{pmatrix},$$

而相应的绝对值应改成为向量范数.另外,任意高阶方程可以化成为一阶方程组,因此我们这里的结果是具有一般性的.

在数值解法的研究中,我们也将采取这种方法,即主要研究一阶方程式的数值解法及其理论问题,然后指明,这种方法怎样用于方程组.

§2 Euler 方法

Euler(欧拉)方法(又称折线法)是我们所熟悉的,在微分方程教材中常常利用它论证解的存在性.它也是最简单的数值方法.

考虑初值问题

$$(2.1)\qquad u'=f(t,u),$$

$$(2.2)\qquad u(0)=u_0.$$

由于 $u(0)=u_0$ 已给定，因而可以算出 $u'(0)=f(0,u_0)$. 设 $t_1=h$ 充分小，则近似地有

$$(2.3)\qquad \frac{u(t_1)-u(0)}{h}\approx u'(0)=f(0,u_0),$$

从而我们可以取

$$u_1=u_0+hf(t_0,u_0)$$

作为 $u(t_1)$的近似值，式中 $t_0=0$. 利用 u_1 及 $f(t_1,u_1)$ 又可算出 $u(t_2)=u(2h)$的近似值

$$u_2=u_1+hf(t_1,u_1).$$

一般地，在任意点 $t_{m+1}=(m+1)h$ 处 $u(t)$的近似值由下式给出:

$$(2.4)\qquad u_{m+1}=u_m+hf(t_m,u_m).$$

这就是 Euler 方法的计算公式，h 称为积分步长.

Euler 方法的几何意义十分清楚. 方程式(2.1) 的解是 t u 平面上一族积分曲线，这族曲线上任意点的斜率为$f(t,u)$. 通过点(t_0,u_0)的积分曲线为(2.1), (2.2)的解. Euler方法是这样得到解的: 在点(t_0,u_0)处引过该点积分曲线的切线，其斜率为$f(t_0,u_0)$(图 1)，此切线在 $t=t_1$ 处与另一积分曲线相交，其交点纵坐标即为 u_1. 再过(t_1,u_1)点做过该点积分曲线的切线，它在 $t=t_2$处与另一积分曲线相交，交点纵坐标为 u_2，等等. 这样一来，过(t_0,u_0)的积分曲线就可以用得到的一条折线来代替，因此，这种方法叫做折线法.

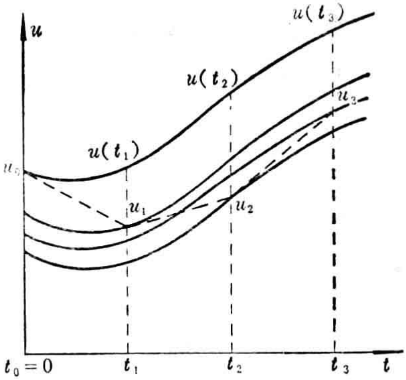

图 1

为了验证 Euler 折线法是否可实际应用，首先必须回答，当步长 h 取得充分小时，所求得的近似解 u_m 是否能够足够精确地逼近真解，换言之，当 $h\to 0$ 时，是否有 $u_m\to u(t_m)$，这个问题称为**收敛性**问题．其次，对于收敛的方法，我们还必须估计近似解与精确解之间的误差，以便在实际计算中根据对精确度的要求确定计算方案．

不难看出，近似解的误差首先是由于差商近似代替微商（见(2.3)式)引起的，这种近似代替所产生的误差，称为**截断误差**．我们还必须注意在计算过程中产生的另一种误差——**舍入误差**，这种误差是由于在利用(2.4)进行计算时，数值的舍入引起的．只有当最初产生的误差在以后计算中不会无限制的扩大时，换言之，只有(2.4)的解对初始值具有某种连续相依性时，这种方法才是适用的．这种连续相依关系称为**稳定性**．注意到当 u_m 改变时 Euler 解将从一条积分曲线跳到另一条积分曲线上去，因此稳定性和收敛性是密切相关的．

上述收敛性、误差估计和稳定性问题是微分方程数值解法中必须研究的理论问题．今就最简单的方法——Euler 折线法来研究这些问题，它对今后讨论一般的计算方法会有所帮助．

首先讨论误差问题．将微分方程(2.1)写成等价的积分形式:

$$u(t+h)=u(t)+\int_t^{t+h} f(\tau,u(\tau))d\tau. \tag{2.5}$$

在上式中令 $t=t_m$，并且用左矩形公式计算右端积分，得到

$$u(t_m+h)=u(t_m)+hf(t_m,u(t_m))+R_m, \tag{2.6}$$

$$R_m=\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,u(t))dt-hf(t_m,u(t_m)).$$

于(2.6)中舍去余项 R_m 即导出(2.4)．

R_m 称为 Euler 方法的**局部截断误差**，它表示当 $u_m=u(t_m)$ 为

精确时，利用(2.4)计算 $u(t_m+h)$ 的误差.

设 u_m 是在无舍入误差情况下用(2.4)算出的微分方程的近似解，$u(t)$ 为微分方程的精确解，$\varepsilon_m=u(t_m)-u_m$ 为 Euler 方法(2.4)的截断误差，或者更确切地称为**整体截断误差**.

现在来研究截断误差. 从(2.6)减去(2.4)得到

$$\varepsilon_{m+1}=\varepsilon_m+h[f(t_m,u(t_m))-f(t_m,u_m)]+R_m. \tag{2.7}$$

设 $f(t,u)$ 关于 u 满足 Lipschitz 条件

$$|f(t,u_2)-f(t,u_1)|\leqslant L|u_2-u_1|, \tag{2.8}$$

且假定存在常数 R，使 $|R_m|\leqslant R$，则从(2.7)推出

$$|\varepsilon_{m+1}|\leqslant(1+hL)|\varepsilon_m|+R. \tag{2.9}$$

对 $n=m+1, m, m-1, \cdots$ 反复利用(2.9)导出

$$\begin{aligned}|\varepsilon_n|&\leqslant(1+hL)|\varepsilon_{n-1}|+R\\&\leqslant(1+hL)^2|\varepsilon_{n-2}|+R+(1+hL)R\\&\leqslant\cdots\cdots\\&\leqslant(1+hL)^n|\varepsilon_0|+R\sum_{j=0}^{n-1}(1+hL)^j\\&\leqslant(1+hL)^n|\varepsilon_0|+\frac{R}{hL}[(1+hL)^n-1],\\&\qquad n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

如果 $t\leqslant T$，从而 $t_n=nh\leqslant T$，于是，由上式推出

$$|\varepsilon_n|\leqslant e^{LT}|\varepsilon_0|+\frac{R}{hL}(e^{LT}-1), \quad n=1,2,\cdots. \tag{2.10}$$

综上所述我们得到

定理 3 如果 $f(t,u)$ 关于 u 满足 Lipschitz 条件(2.8)，则 Euler 方法的整体截断误差 ε_n 满足估计式(2.10)，式中 R 为局部截断误差的上界.

(2.10)表明 Euler 方法的整体截断误差由初始值的误差 ε_0

与局部截断误差界R决定. 下面估计局部截断误差的界.

从(2.6)

$$R_m=\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,u(t))dt-hf(t_m,u(t_m))$$
$$=\int_{t_m}^{t_{m+1}} [f(t,u(t))-f(t_m,u(t_m))]dt,$$

如果$f(t,u)$关于t也满足Lipschitz条件, K为相应的Lipschitz常数, 则由上式推出

$$|R_m|\leqslant\int_{t_m}^{t_{m+1}} |f(t,u(t))-f(t_m,u(t))|dt$$
$$+\int_{t_m}^{t_{m+1}} |f(t_m,u(t))-f(t_m,u(t_m))|dt$$
$$\leqslant K\int_{t_m}^{t_{m+1}} |(t-t_m)|dt+L\int_{t_m}^{t_{m+1}} |u(t)-u(t_m)|dt$$
$$\leqslant\frac{1}{2}Kh^2+L\int_{t_m}^{t_{m+1}} |u'(t_m+\theta(t-t_m))|(t-t_m)dt$$
$$\leqslant\frac{h^2}{2}(K+LM).$$

式中$0<\theta<1$,

$$M=\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u'(t)|=\max_{0\leqslant t\leqslant T}|f(t,u(t))|,$$

从而我们可取

$$R=\frac{h^2}{2}(K+LM). \tag{2.11}$$

利用(2.11)式, 从定理3立即推出

定理4 设$f(t,u)$关于t、u均满足Lipschitz条件, K、L为相应的Lipschitz常数, 且当$h\to0$时$u_0\to u(0)$, 则Euler方法(2.4)的解u_m一致收敛于(2.1), (2.2)的解$u(t_m)$, 并有估计式

$$|\varepsilon_m|\leqslant e^{LT}|\varepsilon_0|+\frac{h}{2}(M+K/L)(e^{LT}-1). \tag{2.12}$$

如果$u_0=u(0)$, 则由(2.12)推出

$$|\varepsilon_m| = O(h),$$

即 Euler 方法的截断误差与 h 同阶.

注意, 从(2.11)有 $R_m = O(h^2)$, 这说明局部截断误差比整体截断误差高一阶.

最后研究稳定性.

称 Euler 方法(2.4)是稳定的, 如果存在常数 C 及 h_0, 使对任意初始值 u_0 及 v_0, (2.4)的相应解 u_m 和 v_m 满足估计式

(2.13) $$|u_m - v_m| \leqslant C|u_0 - v_0|, \quad 0 < h < h_0, \quad mh \leqslant T.$$

注意, 这里 u_m 及 v_m 分别是以 u_0 及 v_0 为初值的精确解, 即不考虑(2.4)在计算中的舍入误差. 因此上述稳定的意义是, 对于任何 $0 < h < h_0$, (2.4)的精确解连续地依赖于初值.

定理 5 在定理 3 的条件下, Euler 方法是稳定的.

证明 考虑

$$u_{m+1} = u_m + hf(t_m, u_m),$$
$$v_{m+1} = v_m + hf(t_m, v_m),$$

令 $e_m = u_m - v_m$, 我们有

$$\begin{aligned} |e_{m+1}| &\leqslant |e_m| + h|f(t_m, u_m) - f(t_m, v_m)| \\ &\leqslant (1 + hL)|e_m| \leqslant (1 + hL)^2 |e_{m-1}| \\ &\leqslant \cdots \leqslant (1 + hL)^{m+1} |e_0|, \end{aligned}$$

从而当 $mh \leqslant T$ 时有

$$|e_m| \leqslant e^{LT} |e_0|.$$

令 $C = e^{LT}$, 即得到(2.13). 证毕.

比较定理 3 与定理 5 看出, 稳定性与收敛性的证明过程十分相似, 后面我们将进一步证明二者是密切相关的. 其次, 定理 4 表明, 若不考虑初始值误差时, 整体截断误差的阶由局部截断误差的阶决定, 因而, 可以从提高局部截断误差的阶入手, 构造精度较高的计算方法, 这是构造微分方程数值解法的主要依据之一.

现在按照上述思想改进 Euler 方法，以提高计算精确度.

在与微分方程等价的积分形式(2.5)中令 $t=t_m$，我们有

$$u(t_{m+1})=u(t_m)+\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,u(t))dt. \tag{2.14}$$

用梯形公式计算上式右端积分，得到

$$\begin{aligned} u(t_{m+1})&=u(t_m)+\frac{h}{2}[f(t_m,u(t_m))\\ &\qquad+f(t_{m+1},u(t_{m+1}))]+R_m^{(1)},\\ R_m^{(1)}&=\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,u(t))dt-\frac{h}{2}[f(t_m,u(t_m))\\ &\qquad+f(t_{m+1},u(t_{m+1}))]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

$R_m^{(1)}$ 将比 R_m 的阶更高. 实际上，注意 $u(t)$ 满足微分方程，从而当 $t_m\leqslant t\leqslant t_{m+1}$ 时

$$\begin{aligned} f(t,u(t))&=u'(t)=u'(t_m+\tau h)\\ &=u'(t_m)+\tau[u'(t_{m+1})-u'(t_m)]\\ &\qquad+\frac{h^2}{2}\tau(\tau-1)u'''(t_m+\theta h),\\ &\qquad 0\leqslant\tau,\quad\theta\leqslant 1, \end{aligned}$$

由此推出

$$\begin{aligned} \int_{t_m}^{t_{m+1}} u'(t)dt&=\int_0^1 [u'(t_m)+\tau(u'(t_{m+1})-u'(t_m))]hd\tau\\ &\qquad+\frac{h^3}{2}\int_0^1 \tau(\tau-1)u'''(t_m+\theta h)d\tau\\ &=\frac{h}{2}[u'(t_{m+1})+u'(t_m)]-\frac{h^3}{12}u'''(t_m+\xi h),\\ &\qquad 0\leqslant\xi\leqslant 1, \end{aligned}$$

将其代入(2.15)得到

$$R_m^{(1)}=-\frac{h^3}{12}u'''(t_m+\xi h). \tag{2.16}$$

于(2.15)中舍去 $R_m^{(1)}$ 即得到改进的 Euler 方法的算式: