高等学校试用教材

复变函数

余家荣 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

复变函数

余家荣编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书内容包括：复数及平面点集、复变函数、复变函数的积分、级数、留数、保形映照、解析开拓、调和函数、解析函数对平面场的应用。

本书可供综合大学数学、力学、天文学专业及师范院校数学系师生作为试用教材。

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复"高等教育出版社"。本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校试用教材

复变函数

余家荣　编

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
陕西省印刷厂印装

开本787×1092 1/32　印张6.875　字数169,000
1979年2月第1版　1986年2月第7次印刷
印数 167,661—176,710
书号13010·0325　定价1.00元

目　　录

序

本书是以武汉大学数学系1963—1965年复变函数讲义为基础改写的.这次改写的依据是以1977年理科数学教学大纲讨论会上所制定的复变函数教材的编写大纲.在本书编写过程中,我们努力以马克思列宁主义、毛泽东思想为指导,体现辩证唯物主义观点以及理论联系实际和少而精等原则,努力阐明系统的基本理论,并尽可能反映复变函数研究的新成果. 可是由于编者水平有限以及编写时间仓促,因而在本书中一定存在许多缺点和错误,希采用本书的教师和同学予以批评指正.

本书讲述单复变函数的分析理论以及几何理论的基本内容. 其中有些内容在教学中可以根据具体情况决定取舍, 例如可不讲柯西定理的古尔萨证法(第三章第3段)、多角形映照公式的证明、普阿松公式及狄里克莱问题等. 对多值函数可限于讨论只有一个有限枝点的情况. 如果这样, 第二章第5-7段的内容可以删去一些; 对于对数函数和幂函数可只采用限制辐角使其成为单值函数的方法来处理; 第五章第4段的例3也可删去. 如果教学时间还不够,可考虑再删去亚纯函数零点与极点的个数、儒歇定理以及保形映照一般原理的证明等. 关于解析函数的应用, 采用本书时可根据实际情况,或者从第九章中选读,或者代以联系实际的其他内容. 本书每章后附有较多习题,以备选作.

在本书编写过程中, 得到了武汉大学及其他许多兄弟院校同志们的热情帮助. 在审稿定稿时, 又受到了四川大学领导和同志们的亲切关怀. 审稿小组的同志们提出了许多宝贵的意见以及改

进教材的具体办法；何成奇、范莉莉同志还帮助改写了有关多值函数的几段，严镇军同志帮助添加了一些习题. 编者谨向所有这些同志表示衷心的感谢！

余家荣

1978 年 8月 28 日于武汉

引　言

复数是十六世纪人们在解代数方程时引入的．在十七和十八世纪，随着微积分的发明与发展，人们研究了复变数函数(简称复变函数)，特别是把实变数初等函数推广到复变数情形，得到了一些重要结果．

因为复数最初是单纯地从形式上推广而引进的，并且在十八世纪以前，由于人们对于复数的有关概念了解得不够清楚，用它们进行计算得到了一些矛盾，所以复数在历史上长期不能为人们所接受．"虚数"这一名词本身就恰好反映了这一点．

可是复数不是什么神秘的东西，它是由一对实数表示出来的．有许多几何量与物理量，也可用一对实数来表示，例如平面上点的直角坐标、平面向量、平面上的速度与力等等；而复数恰好可以用来表示这些量．在一些情况下，应用复数表示这些量计算起来比较方便．在十八世纪，J．达朗贝尔(1717—1783)与L．欧拉(1707—1783)等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义，澄清了复数的概念，并且应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题．直到这时，人们才接受了复数，复变函数论才能顺利地建立和发展．

复变函数的理论基础是在十九世纪奠定的．A．L．柯西(1789—1857)、K．外尔斯特拉斯(1815—1897)和G．F．B．黎曼(1826—1866)是这一时期的三位代表人物．柯西和外尔斯特拉斯分别应用积分和级数研究复变函数，黎曼研究复变函数的映照性质．

复变函数论的建立和发展与解决实际问题的需要有联系．例如复变函数论的主要基础之一——柯西定理，是柯西在研究水波

传播问题时，设法计算一些积分而发现的；流体力学、电学和空气动力学的研究都促进了这门学科的发展.

到本世纪，复变函数论是数学的重要分支之一，随着它的领域不断扩大而发展成一门庞大的学科. 这门学科中所研究的问题，有些是由其本身在发展中提出的，有些是由实际问题或其他学科提出的. 对于自然科学其他部门(如空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理等)以及数学中其他分支(如微分方程、积分方程、概率论、数论等)，复变函数论都有重要的应用①.

我国数学工作者在单复变函数和多复变函数方面，做过许多重要的工作. 近年来，杨乐、张广厚同志在单复变函数的值的分布理论和渐近值理论中，得到了具有世界水平的重要成果. 这些都证明中国人民有志气、有能力，在不远的将来，在数学的各个领域中接近或超过世界先进水平.

本书只讲述单复变函数的基本理论，不涉及多复变函数方面问题. 书中内容包括复变函数的导数、积分、级数表示以及映照性质等，而且主要只限于讨论一类特殊的复变函数，即所谓解析函数.

---

① 例如可参看：M.A. 拉甫伦捷夫及Б.А.沙巴特著，施祥林、夏定中译，复变函数论方法，人民教育出版社出版.

第一章　复数及平面点集

§1. 复数及其几何表示

1. 复数在平面上的几何表示　不论在数学或是在日常生活中，我们经常会遇到集这个概念. 所谓集就是指一些特定事物的全体，其中各个事物称为这集的元素. 我们常用大写字母 A, B, C, …表示集，用小写字母 a, b, c, …表示它们的元素. 如果 a 是集 A 的元素，我们说 a 属于 A，记作 $a\in A$；反之，我们说 a 不属于 A，记作 $a\bar{\in} A$.

复变函数论的出发点是复数集. 在代数中已经讲述过复数. 为了便于以后讨论，我们把有关复数的基本定义及结论，在这里回顾一下.

每个复数 z 具有 $x+iy$ 的形状，其中 x 和 y 是实数，i 是虚数单位（也可记作 $\sqrt{-1}$）；x 称为 z 的实部，记作 $x=\operatorname{Re} z$；y 称为 z 的虚部，记作 $y=\operatorname{Im} z$. 如果 $\operatorname{Im} z=0$，那么 $z=\operatorname{Re} z$ 是实数；如果 $\operatorname{Im} z\neq 0$，那么 z 称为虚数；如果 $\operatorname{Im} z\neq 0$，而 $\operatorname{Re} z=0$，那么 z 称为纯虚数. 如果两个复数 z_1 及 z_2 的实部和虚部分别相等，那么这两复数称为相等，记作 $z_1=z_2$.

一个复数由它的实部和虚部，亦即由一对实数所唯一确定；而在平面上取直角坐标，平面上的任一点也可由一对实数所唯一确定. 把复数 $z=x+iy$（其中 x 及 y 是实数）与平面上坐标为 (x, y) 的点看作互相对应，于是就在一切复数所组成的集与平面上一切点所组成的集之间建立了一一对应. 一切实数所组成的集与横坐标轴上一切点所组成的集对应，因此把横坐标轴称为实轴；一切纯

虚数所组成的集与纵坐标轴上一切点(除 0 外)所组成的集对应，因此把纵坐标轴称为虚轴．实轴在原点右方及左方的部分分别称为正实轴及负实轴；虚轴在原点上方及下方的部分分别称为上半虚轴及下半虚轴．实轴上方及下方的半平面分别称为上半平面及下半平面，虚轴左方及右方的半平面分别称为左半平面及右半平面．如果用平面上的点表示复数，那么这平面就称为复平面，或按照表示复数的字母是 $z, w, \cdots$，而称为 z 平面，w 平面，等等．

“复数 $x+iy$”和“点 $x+iy$”用作同义语，“复数集”与“平面点集”也用作同义语．

复数 $z=x+iy$ 除了可以用点 (x, y) 表示外，还可用一向量表示，它在实轴及虚轴上的投影分别是 x 及 y，其起点可以安放在任一点，例如在原点(图 1)．一向量经过平行移动而得的向量，与原向量都看作是同一向量．因此，有时我们也把“复数”与“向量”、“复数集”与“向量集”用作同义语．向量 $z=x+iy$ 的长度称为复数 z 的模，记作 $|z|$．显然 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$．实轴的正向与向量 z 之间的夹角(这里假定 $z\neq0$)称为复数 z 的辐角，记作 $\operatorname{Arg} z$；显然 $\operatorname{Arg} z$ 有无穷多个值，其中每两个值相差 2π 的整数倍．但 $\operatorname{Arg} z$ 只有一个值 α 满足条件 $-\pi<\alpha\leqslant\pi$；它叫做 z 的辐角的主值，记作 $\arg z$．显然

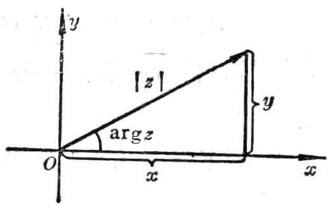

图 1

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,$$

其中 k 表示任意整数．这里 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$．以后把 $\operatorname{Arg} z$ 的任一个确定的值都记作 $\arg z$．

复数 $z(\neq0)$ 的实部和虚部可以用模和辐角表示为:

$$\operatorname{Re} z=|z|\cos \operatorname{Arg} z, \quad \operatorname{Im} z=|z|\sin \operatorname{Arg} z.$$

于是 z 本身可以表示为

$$z=|z|(\cos \operatorname{Arg} z+i \sin \operatorname{Arg} z),$$

这个式子称为 z 的三角表示式.

两复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 称为(相互)共轭的. 如果其中之一用 z 表示,那么另一个用 $\bar{z}$ 表示. 显然点 z 和 $\bar{z}$ 关于实轴为对称. 因此

$$|z|=|\bar{z}|;$$

此外,$\operatorname{Arg} z=-\operatorname{Arg} \bar{z}$,这个等式理解为: 对于左边 $\operatorname{Arg} z$ 的任一值,右边 $\operatorname{Arg} \bar{z}$ 必有一对应值,使等式成立.

2. 复数的运算 设 a_1, a_2, b_1, b_2 是实数. 复数的加法和乘法运算由下列等式定义:

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2),$$

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1).$$

减法和除法则定义为加法和乘法的逆运算. 我们有:

$$(a_1+ib_1)-(a_2+ib_2)=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2),$$

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} \quad (a_2+ib_2\neq 0).$$

可以证明, 复数的加减乘除与实数的相应运算满足同样的一些法则(交换律、结合律、分配律等).

根据复数的加法的定义,可见复数 $z_1=a_1+ib_1$ 及 $z_2=a_2+ib_2$ 相加与向量 z_1 及 z_2 相加的规律一致. 在力学和物理学中, 如力、速度、加速度等都可用向量来表示,这就说明了复数可以用来表示实有的物理量. 当向量 $z_1(\neq 0)$ 及 $z_2(\neq 0)$ 的方向不是相同或相反时(图 2), 作起点在原点的向量 z_1 及 z_2,取 z_1 及 z_2 为两边作平行四边形,从原点出发沿对角线所作的向量就表示 z_1+z_2. 当

z_1 及 z_2 的方向相同或相反时，z_1+z_2 也不难作出.

由于 $-z_2$ 表示与 z_2 长度相等、方向相反的向量，而且 $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$，可以仿照 z_1+z_2 的情形作出 z_1-z_2(图2). 显然，复数相减与向量相减的法则也一致.

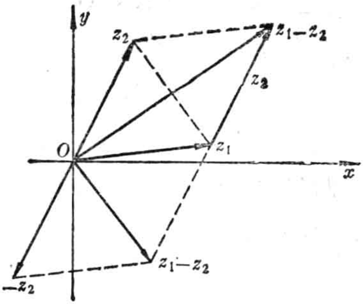

图 2

现在导出关于两复数的和及差的模的几个不等式. 如图2，从点 z_1 出发到点 z_1+z_2 的向量是向量 z_2. 于是向量 z_1, z_2 及 z_1+z_2 构成一个三角形的三边. 因为三角形一边的长不能超过另两边长的和，并且不能小于它们的差，所以我们有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{2.1}$$

以及

$$|z_1+z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{2.2}$$

不难证明，即使向量 z_1, z_2 及 z_1+z_2 平行于同一直线，从而不能构成一个三角形的三边时，(2.1)及(2.2)仍然成立.

在(2.1)及(2.2)中用 $-z_2$ 代替 z_2，我们就得到

$$|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{2.3}$$

以及

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{2.4}$$

我们也可直接证明(2.3)及(2.4). 事实上，在图2中，从点 z_2 出发到点 z_1 的向量是 z_1-z_2. 考虑向量 z_1, z_2 及 z_1-z_2 所构成的三角形，就可推出这两个不等式.

关于复数的模，有下列结果：设复数 $z=x+iy$，其中 x 及 y 是实数. 显然

$$|\mathrm{Re}\, z|\leqslant|z| \text{ 及 } |\mathrm{Im}\, z|\leqslant|z|. \tag{2.5}$$

又因 $z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$，所以

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}. \tag{2.6}$$

例 1 试用复数表示圆的方程

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0,$$

其中 a,b,c,d 是实常数(如果 $a=0$，b 及 c 不全为 0，这是直线方程).

令 $z=x+iy$，代入方程中

$$x^2+y^2=z\bar{z},$$

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i},$$

我们就得到

$$az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0,$$

其中 $\beta=\frac{1}{2}(b+ic)$.

例 2 设 z_1 及 z_2 是两个复数. 读者可自行证明:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\qquad \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2},$$

$$\bar{\bar{z}}_1=z_1.$$

现在把不等于零的复数 z_1 及 z_2 写成三角表示式:

$$z_1=|z_1|(\cos\operatorname{Arg}z_1+i\sin\operatorname{Arg}z_1),$$

$$z_2=|z_2|(\cos\operatorname{Arg}z_2+i\sin\operatorname{Arg}z_2),$$

由乘法的定义得

$$z_1z_2=|z_1||z_2|[\cos(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2)+i\sin(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2)],$$

由此得

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2 \tag{2.7}$$

(2.7)中后一等式应理解如下: 对于 $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值，一定有 $\operatorname{Arg}z_1$ 及 $\operatorname{Arg}z_2$ 的各一值与它对应，使得等式成立；反过来也是这样. 其次，由除法的定义得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2)+i\sin(\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2)],$$

由此得

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2, \tag{2.8}$$

(2.8)中后一等式应与(2.7)中后一等式类似地理解.

由(2.7)及(2.8)，可以推出两个不为零的复数的积与商的几何意义，这里不一一列举.

例 3 设 z_1 及 z_2 是两个复数. 求证

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),$$

并利用这一等式证明(2.1).

我们有

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\
&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\
&=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)
\end{aligned}$$

其次，由上列等式以及

$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leqslant|z_1\bar{z}_2|=|z_1||z_2|$$

就可导出(2.1).

最后考虑复数的乘幂. 先考虑 $z\neq0$ 的情形. 设 n 是正整数，z^n 表示 n 个 z 的乘积，由乘法规则得

$$z^n=|z|^n[\cos(n\operatorname{Arg} z)+i\sin(n\operatorname{Arg} z)].$$

显然，这公式当 $n=0$($z^0=1$)时也成立. 定义 $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$，我们有

$$z^{-n}=|z|^{-n}[\cos(-n\operatorname{Arg} z)+i\sin(-n\operatorname{Arg} z)].$$

因此对于任意整数 m，下列公式成立:

$$z^m=|z|^m(\cos m\operatorname{Arg} z+i\sin m\operatorname{Arg} z) \tag{2.9}$$

如果 $n(\geqslant 2)$ 是正整数，定义 $z^{\frac{1}{n}}$ 为满足 $w^n = z$ 的复数 w，那么

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = +\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\operatorname{Arg} z\right) + i\sin\left(\frac{1}{n}\operatorname{Arg} z\right)\right]. \quad (2.10)$$

上式右边给出 $z^{\frac{1}{n}}$ 的 n 个不同的值，其中 $+\sqrt[n]{|z|}$ 表示 $|z|^{\frac{1}{n}}$ 的正值。为了得到全部不同的值，只要固定 $\operatorname{Arg} z$ 的某一个值，设此值为 φ，然后在(2.10)的右边用下列 n 个值代入 $\operatorname{Arg} z$：φ, $\varphi+2\pi$, …, $\varphi+(n-1)2\pi$.

如上可把 z^n 的定义扩充到 n 是有理数情形。当 $z=0$，而 n 是正有理数时，$z^n=0$.

例 4　求 $\sqrt[4]{1+i}$ 的所有值.

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，我们有

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$$
$$= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)\left(\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}\right)$$
$$(k=0,1,2,3).$$

因此

$$\sqrt[4]{1+i} = w_0,\quad iw_0,\quad -w_0,\quad -iw_0,$$

其中

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right).$$

3. 复球面及无穷大　在第 1 段中，已经引进了复平面。现在要作出复数在球面上的几何表示.

在点坐标是 (x, y, u) 的三维空间中，把 xOy 平面看作就是 $z=x+iy$ 平面。考虑球面

$$x^2+y^2+u^2=1.$$

取定球面上一点 $N(0, 0, 1)$，称为球极。作连接 N 与 xOy 平面上