

普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI



CAILIAO LIXUE

材料力学

郭应征 编



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>

普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI



CAILIAO LIXUE

材料力学

郭应征 编



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>

内 容 简 介

本书为普通高等教育“十一五”规划教材，是江苏省“力学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”项目的研究成果之一。

全书共分 12 章，主要内容为拉伸与压缩、扭转、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力状态和强度理论、组合变形及连接件的计算、压杆稳定、动载荷和疲劳强度、能量方法、超静定结构。本书的主要特色是理论阐述简明，文字简洁；突出工程观念的培养和力学在工程设计中的应用，编入了许多密切联系工程实际的例题与习题；通过对工程实例的简化和比较，培养学生建立力学模型和解决实际问题的能力；进行启发式教学，在正文中编入一些思考题，尝试用提问的方式进行教学，给学生留下思考的空间；本书编写中考虑到便于使用者取舍，采用了模块式结构。

本书可作为普通高等院校工程力学、机械、动力、电力等专业的教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

材料力学/郭应征编. —北京：中国电力出版社，
2010.4

普通高等教育“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5123-0195-5

I. ①材… II. ①郭… III. ①材料力学-高等学校-教材
IV. ①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 039182 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路 6 号 100044 <http://jc.cepp.com.cn>)

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2010 年 7 月第一版 2010 年 7 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 23.25 印张 564 千字

定价 37.00 元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签，加热后中心图案消失

本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

前 言

本书为普通高等教育“十一五”规划教材，是江苏省“力学系列课程教学内容课程体系改革的研究与实践”项目的研究成果之一，是为新世纪的工科大学生编写的材料力学课程的更新教材。主要特色如下：

1. 增加了反映现代科学技术的有关内容，同时注意精选内容，以减少教学学时。
2. 突出工程观念的培养和力学在工程设计中的应用，编入了许多密切联系工程实际的例题与习题，以便于教师选用和学生练习之用。在编写过程中，注意通过对工程实例的简化和比较，培养学生建立力学模型和解决实际问题的能力。
3. 全书体系合理，理论阐述简明，概念叙述准确，文字简洁。注意将难点分解，力求易教易学，便于学生真正理解和掌握材料力学的基本概念和方法。
4. 按照最新的材料力学教学基本要求，对非基本内容均加上星号予以区别，以便于使用者根据需要选用。加“*”的内容属于加深和加宽部分，叙述力求简练，内容力求精练。
5. 进行启发式教学，在正文中用楷体编入一些思考题，尝试用提问的方式进行教学，从而将对重要概念的理解引向深入，给学生留下思考的空间。

编写中考虑到便于使用者取舍，采用了模块式结构。

全书由郭应征编写。东南大学的胡增强教授对本书的编写提出了宝贵的意见。在此谨向他们表示衷心的感谢！

本书在编写过程中，主要参考了梁治明和邱侃编写的《材料力学》，郭应征和李兆霞主编的《应用力学基础》，郭应征和周志红编写的《工程力学》，同时还参考了国内外一些优秀教材，在此也向这些教材的编著者们表示感谢！

编 者

2009年12月18日于东南大学五五楼

目 录

前言

第1章 绪论	1
§ 1.1 材料力学的任务和研究方法	1
§ 1.2 变形固体及其基本假设	1
§ 1.3 杆件变形的基本形式	2
第2章 拉伸与压缩	4
§ 2.1 轴向拉伸与压缩的概念及实例	4
§ 2.2 内力 轴力与轴力图	5
§ 2.3 应力 拉伸或压缩杆的应力	9
§ 2.4 拉伸或压缩杆的变形.....	12
§ 2.5 拉伸或压缩杆的应变能.....	18
§ 2.6 拉伸或压缩时材料的力学性能.....	19
§ 2.7 拉伸或压缩杆的强度计算.....	25
§ 2.8 拉压超静定问题.....	29
本章小结	32
习题	34
第3章 扭转	43
§ 3.1 扭转的概念及实例.....	43
§ 3.2 外力偶矩 扭矩与扭矩图.....	44
§ 3.3 切应力与切应变.....	47
§ 3.4 扭转圆轴的应力 强度计算.....	49
§ 3.5 扭转圆轴的变形 刚度计算.....	53
§ 3.6 扭转圆轴的应变能.....	58
§ 3.7 非圆截面轴的扭转.....	60
* § 3.8 薄壁杆件的自由扭转	63
本章小结	68
习题	70
第4章 弯曲内力	76
§ 4.1 弯曲的概念及梁的计算简图.....	76
§ 4.2 剪力与弯矩 剪力图与弯矩图.....	81
§ 4.3 分布载荷集度、剪力及弯矩之间的关系.....	89
§ 4.4 平面刚架和曲杆的内力图.....	93
本章小结	95
习题	96

第 5 章 弯曲应力	104
§ 5.1 弯曲正应力	104
§ 5.2 惯性矩 平行轴定理	108
§ 5.3 弯曲切应力	110
§ 5.4 梁的强度计算	113
§ 5.5 两互垂平面内的弯曲	117
§ 5.6 提高梁弯曲强度的措施	119
* § 5.7 非对称弯曲正应力	120
* § 5.8 开口薄壁梁的弯曲切应力 弯曲中心	126
本章小结	130
习题	131
第 6 章 弯曲变形	140
§ 6.1 梁的挠度和转角	140
§ 6.2 用积分法求梁的变形	141
§ 6.3 用叠加法求梁的变形	147
§ 6.4 梁的刚度计算 提高弯曲刚度的措施	151
§ 6.5 简单超静定梁	154
本章小结	158
习题	159
第 7 章 应力状态 强度理论	166
§ 7.1 应力状态的概念	166
§ 7.2 平面应力状态分析	167
§ 7.3 空间应力状态简介	172
§ 7.4 广义胡克定律	174
§ 7.5 复杂应力状态下的应变能密度	175
§ 7.6 强度理论的概念	177
§ 7.7 工程中常用的强度理论	178
本章小结	183
习题	185
第 8 章 组合变形及连接件的计算	192
§ 8.1 组合变形的概念	192
§ 8.2 拉伸或压缩与弯曲的组合	193
§ 8.3 偏心压缩 截面核心	198
§ 8.4 弯曲与扭转的组合	201
§ 8.5 连接件的实用计算	208
本章小结	214
习题	215
第 9 章 压杆稳定	224
§ 9.1 稳定性的概念	224

§ 9.2 压杆的临界载荷	225
§ 9.3 压杆的稳定计算	233
§ 9.4 提高压杆稳定性的措施	235
本章小结	236
习题	237
第 10 章 动载荷 疲劳强度	245
§ 10.1 惯性力作用下构件的应力	245
§ 10.2 冲击载荷作用下构件的应力和变形	248
§ 10.3 常规疲劳强度计算	252
* § 10.4 疲劳寿命估计	260
本章小结	262
习题	263
第 11 章 能量方法	270
§ 11.1 杆件应变能的一般表达式	270
§ 11.2 互等定理	274
§ 11.3 克罗第一恩格塞定理 卡氏第二定理	276
§ 11.4 变形体虚功原理	282
§ 11.5 单位载荷法 莫尔积分	284
§ 11.6 计算莫尔积分的图乘法	290
本章小结	293
习题	295
第 12 章 超静定结构	302
§ 12.1 超静定结构概述	302
§ 12.2 用力法解超静定结构	303
§ 12.3 对称性和反对称性的利用	310
本章小结	318
习题	319
习题答案	327
附录 型钢表	343
参考文献	361

第1章 绪 论

§ 1.1 材料力学的任务和研究方法

工程结构的零、部件,统称为**构件**(element)。一切构件都是由固体形态的材料制成的。在外力作用下,构件的几何形状和尺寸大小都要发生一定程度的改变,这种改变称为**变形**(deformation)。若所受外力不断增加,最后构件将会破坏。

工程构件在外力作用下丧失正常功能的现象称为**失效**(failure)。工程构件的失效形式很多,通常可分为三类:

强度(strength)失效,是指构件在外力作用下发生断裂或产生不可恢复的变形;

刚度(stiffness)失效,是指构件在外力作用下产生过大的弹性变形;

稳定(stability)失效,是指构件在轴向压力作用下其原有平衡形态发生突然转变。

在工程中,为保证机械设备或结构能正常工作而不失效,要求各个构件都必须具有足够的强度、刚度和稳定性。工程中所用的任何机械设备或结构,应该是既安全又适用,而且设计时还要使它是最经济的。安全、适用和经济是任何机械设备或工程结构必须满足的三个基本要求。

在研究构件的强度、刚度和稳定性时,还应了解材料在外力作用下的力学性能,材料的力学性能要由材料试验来测定。因此,研究材料的力学性能也是本课程的重要内容。

材料力学的任务是:研究各种材料及构件在外力作用下所表现出的力学性能,在满足强度、刚度和稳定性的条件下,为工程构件的力学设计提供必要的理论基础和分析计算方法,以保证设计出的构件能够满足安全、适用和经济的要求。

材料力学中所研究的问题,都是工程或生活实际中的问题。遵循认识论的规律,其研究方法是首先从生活、工程或实验中观察各种现象,从复杂的现象中抓住共性,找出反映事物本质的主要因素,略去次要因素,经过简化,把作机械运动的实际物体抽象为**力学模型**(mechanical model),建立力学模型是工程力学研究方法中很重要的一个步骤。因为实际中的力学问题往往是很复杂的,这就需要对同一个研究对象,为了不同的研究目的,进行多次实验,反复观察,仔细分析,抓住问题的本质,做出正确的假设,使问题理想化或简化,从而达到在满足一定精确度的要求下用简单的模型解决问题的目的。

材料力学的研究与数学有着密切的关系,建立了力学模型以后,还要按照机械运动的基本规律和力学定理,对力学模型进行数学描述,建立力学量之间的数量关系,得到力学方程,即**数学模型**(mathematical model)。然后,经过逻辑推理和数学演绎进行理论分析和计算,或用计算机求数值解。最后,所得到的结果和结论是否正确,还要进一步通过实验或工程实践来检验。

§ 1.2 变形固体及其基本假设

实际物体在外力作用下都要发生变形。但是,工程中构件的变形通常是很微小的,对于力对物体的外效应的影响极小。因此,在理论力学中研究物体的受力、平衡时,这种微小的

变形可以略去不计,将受力物体抽象化为不变形的**刚体** (rigid body)。

但是,材料力学研究构件的强度、刚度、稳定性等问题,物体的变形将成为主要矛盾,这时应将物体视为**可变形的固体** (deformable body)。任何固体在外力作用下均将发生变形,卸除外力后能完全消失的变形,称为**弹性变形** (elastic deformation);不能消失而残留下来的那一部分变形,则称为**塑性变形** (plastic deformation)。

变形固体有多方面的属性,研究的角度不同,侧重面也不一样。本课程是从宏观的角度研究物体内部的受力和变形规律的,为得到简化的力学模型,一般认为变形固体具有如下的基本属性。

1. 均匀、连续性

实际变形固体的材料,从微观的层次看是不连续的,因为组成固体的粒子之间存在着空隙。但这种空隙与构件的尺寸相比极其微小,于是可理想化地认为固体内部毫无空隙地充满了物质,这就是变形固体的**连续性假设** (continuity assumption)。另外,组成固体的粒子,彼此的物理性质并不完全相同,但因构件的任一部分都包含为数极多的微小粒子,而且无规则地排列着,从统计平均的角度看,认为由同一种材料组成的构件,各处的物理性质是相同的,这就是变形固体的**均匀性假设** (homogenization assumption)。

根据变形固体的均匀、连续性假设,就可以从固体内任意截取一部分来研究,且在外力作用下引起的内力、应力、应变等力学量均可表示为坐标的连续函数,以便于进行数学分析。

同时还应指出,在正常工作条件下,变形前连续的固体,变形后仍应保持其连续性,即变形固体的相邻部分既不引起空隙也不产生重叠的现象,这种变形连续性的条件称为**几何相容条件** (geometric compatibility condition)。

2. 各向同性与各向异性

材料沿不同方向上的力学性能都相同,称为**各向同性** (isotropy);沿不同方向的力学性能不同,称为**各向异性** (anisotropy)。绝大多数材料,如金属、工程塑料、搅拌均匀的混凝土等,都可视为各向同性材料。例如金属从微观上看是多晶体材料,单个晶体的力学性能是有方向性的,但由于各晶体是随机排列的,在宏观上表现为各向同性。

有些材料,如木材、纤维增强复合材料,其整体的力学性能具有明显的方向性,则应看作是各向异性材料。

材料力学课程主要研究均匀、连续、各向同性的变形固体,且通常限于研究在弹性变形范围内和小变形条件下的问题。

§ 1.3 杆件变形的基本形式

若构件的长度远大于其横向尺寸,则称为**杆** (bar)。杆的各横截面形心的连线称为杆的**轴线**。根据杆的轴线是曲线还是直线,可将杆分为**曲杆**及**直杆**;根据各横截面完全相等或不等,又可将杆分为**等截面杆**及**变截面杆**。材料力学的主要研究对象是杆,而且多为直杆。实际构件的形状有时相当复杂,不过往往可以近似地应用杆的概念进行分析和研究。

由于外力的作用,杆件产生的变形有下列几种基本形式:

(1) 轴向拉伸 [图 1.1 (a)] 与压缩 [图 1.1 (b)];

- (2) 剪切 (图 1.2);
- (3) 扭转 (图 1.3);
- (4) 弯曲 (图 1.4)。

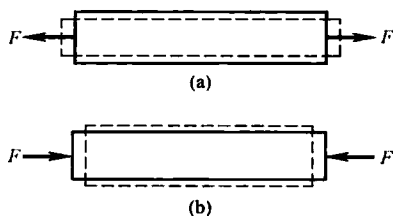


图 1.1

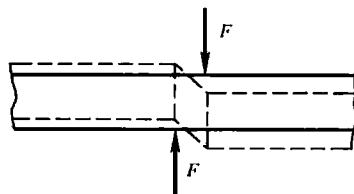


图 1.2

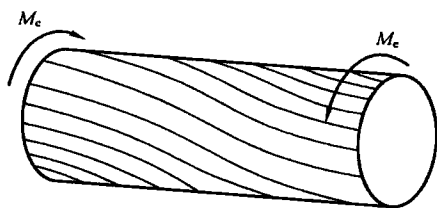


图 1.3

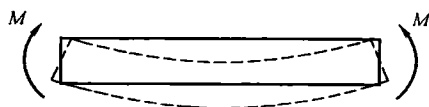


图 1.4

有时杆件的变形较为复杂,不过可以看成是由上述某几种基本变形组合而成。在工程中,通常将受拉的杆件称为杆;受压的杆件称为压杆或柱;主要承受扭转的杆件称为轴;主要承受弯曲的杆件称为梁。

根据几何形状和尺寸的不同,工程构件大致可分为:杆件、平板、壳体和块体四大类。在研究构件的强度、刚度和稳定性问题时,材料力学课程主要涉及杆件。若研究板、壳及块体的强度、刚度和稳定性问题,可进一步学习“弹性力学”和“板壳理论”等课程。

在以下材料力学的各章中,首先分别讨论杆件的各种基本变形问题,然后再讨论复杂变形问题。

第2章 拉伸与压缩

教学要求

1. 建立轴力的概念, 熟练掌握轴力的计算和画轴力图的方法。
2. 正确建立应力的概念, 掌握拉压直杆横截面和斜截面上正应力的计算。
3. 了解低碳钢和铸铁在拉伸和压缩时的力学行为, 了解应力集中的概念。
4. 熟练掌握拉压杆三种强度问题的计算方法, 建立安全因数的概念。
5. 熟练掌握用胡克定律计算拉压杆变形的的方法, 明确弹性模量、泊松比、拉压刚度的概念。
6. 掌握拉压静不定问题(包括温度应力和装配应力)的解法, 掌握“以切代弧”求桁架节点位移的方法。
7. 建立应变能和应变能密度的概念, 了解拉压杆应变能和应变能密度的计算方法。

在直杆的基本变形中, 轴向拉伸与压缩较为简单。关于拉伸与压缩问题的一些概念和研究方法, 在材料力学中是基本的和重要的, 也是研究杆件其他各种基本变形以及组合变形的基础。

本章首先介绍轴向拉伸与压缩的概念和内力计算, 然后引入正应力与正应变的概念, 讨论拉压杆的应力和变形计算, 接着介绍材料在拉伸与压缩时的力学性能以及拉压杆的强度计算, 最后讨论简单的拉压超静定问题。

§ 2.1 轴向拉伸与压缩的概念及实例

在工程结构和机械设备中, 由于外力作用产生拉伸或压缩变形的构件是很常见的。例如起重机的吊缆、汽缸的螺栓和大型桁架的拉杆(图 2.1 中的杆 A)等, 都是拉伸的实例; 结构的支柱、桥墩、千斤顶的螺杆和桁架中的压杆(图 2.1 中的杆 B)等, 都是压缩的实例。

实际拉(压)杆的端部有各种连接方式, 若不考虑其端部具体连接方式的影响, 将上述这些受拉及受压的构件取出, 且忽略构件所受的重力, 加以简化, 可得计算简图如图 2.2 (a)、(b)

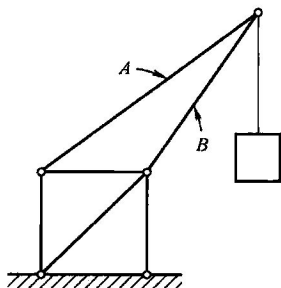


图 2.1

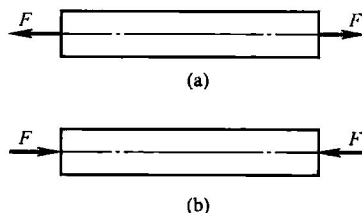


图 2.2

所示,各为一根等截面直杆,其受力特点是:在杆两端各受到一集中力 F 的作用,这一对力 F 的大小相等,指向相反,且力作用线与杆轴线重合。等直杆在这种受力情况下,其主要的变形是纵向伸长或缩短。这种变形形式称为**轴向拉伸或轴向压缩**,这类构件称为**拉杆或压杆**。

§ 2.2 内力 轴力与轴力图

1. 内力的概念

物体内部各质点之间存在着相互作用的力,既有相互间的吸引力,也有相互间的排斥力。物体不受外力作用时,这两种力是互相平衡的,它使质点间的距离保持某一定值,从而使物体能保持一定的形状。物体在外力作用下产生变形,使内部各质点之间的距离发生了变化,其质点之间的相互作用力也随之发生改变。这种由于外力(或其他外界因素)作用引起物体内部作用力的改变量,称为**内力**(internal force)。严格地说,它是由外力作用所引起的附加内力。

一般而言,截面上的内力是连续分布的内力系,应用理论力学的力系简化理论,可将分布内力系向该截面上某点简化,得到内力系的合成结果。在材料力学中,所谓构件横截面上的内力,通常是指在外力作用下,构件内部该横截面上增加的分布内力系向截面形心简化后的合成结果。

2. 截面法 轴力

为显示内力并确定其大小和方向,可采用截面法。

设一等直杆在两端轴向拉力的作用下处于平衡状态[图 2.3 (a)],欲求杆件某一横截面 $m-m$ 上的内力,可用一假想平面将截面 $m-m$ 截开,分成 A、B 两部分,并任取一部分(如部分 A)作为研究对象[图 2.3 (b)],舍弃另一部分(如部分 B),并用截开面上的内力代替舍弃部分对保留部分的作用。

对于保留部分 A 而言,截面 $m-m$ 上的内力 F_N 就成为外力。由于整个杆件处于平衡状态,因此杆件上的任一部分均应保持平衡,故其保留部分 A 也应保持平衡。所以,杆件横截面 $m-m$ 上的内力一定是与其左端外力 F 共线的轴向内力 F_N ,如图 2.3 (b) 所示。内力 F_N 的数值可由平衡方程求得,由

$$\sum F_x = 0, \quad F_N - F = 0$$

可得

$$F_N = F$$

式中, F_N 为杆件任一横截面 $m-m$ 上的内力,其作用线与杆的轴线重合,即垂直于横截面并通过其形心。这种内力称为**轴力**(axial force),并规定用符号 F_N 表示。

若保留部分 B 为研究对象,则由作用与反作用定律可知,部分 B 在截开面 $m-m$ 上

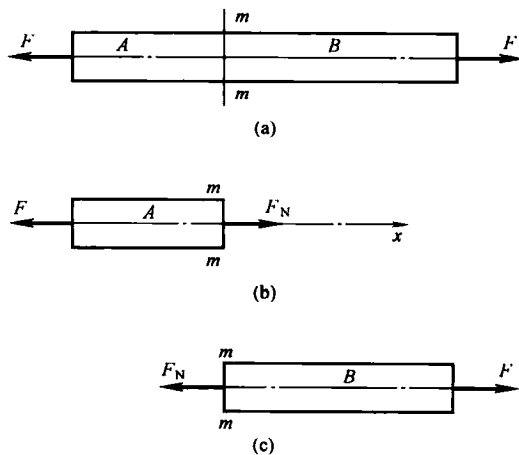


图 2.3

的轴力与上述部分 A 上的轴力的数值相等而指向相反 [图 2.3 (c)], 显然, 其数值同样可由部分 B 的平衡条件通过计算求得。

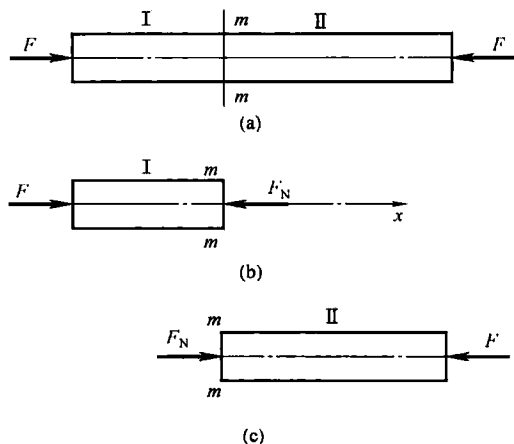


图 2.4

对于压杆, 也一样可通过前述过程求得任一横截面 $m-m$ 上的轴力 F_N , 其指向如图 2.4 所示。为了使由部分 A 和部分 B 所求得同一截面 $m-m$ 上的轴力具有相同的正负号, 根据变形情况规定: 产生纵向伸长变形的轴力为正, 称为拉力 (tensile force); 产生纵向缩短变形的轴力为负, 称为压力 (compressional force)。按此规定, 当轴力方向与杆横截面的外法线方向一致时即为正, 反之为负。由图 2.3 (b)、(c) 可见, 拉力的方向是离开研究对象的; 由图 2.4 (b)、(c) 可见, 压力的方向是指向研究对象的。

上述分析计算内力的方法称为截面法 (method of sections), 是求内力的一般方法, 适用于各种变形形式的杆件。截面法有以下三个步骤:

- (1) 截取: 在需要求内力的杆段上某处, 假想用平面将杆件截成两部分, 取其一部分, 舍弃另一部分;
- (2) 代弃: 在保留部分上, 用截开面上的内力或内力偶, 代替舍弃部分对保留部分的作用;
- (3) 平衡: 以保留部分为研究对象, 根据平衡方程, 可由已知外力计算出杆在截开面上的未知内力。

例 2.1 一等直杆承受轴向载荷如图 2.5 (a) 所示, 试求截面 $a-a$ 、 $b-b$ 上的内力分量。

解: 应用截面法, 将杆沿截面 $a-a$ 截开, 并取截面以左部分为研究对象 [图 2.5 (b)], 设该截面上的轴力为 F_{N1} , 假设为正, 由平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N1} - 7\text{kN} = 0$$

得

$$F_{N1} = 7\text{kN}$$

结果为正值, 表明该力的方向与假设的方向一致, 即为拉力。

同理, 将杆沿截面 $b-b$ 截开, 并取右段为研究对象 [图 2.5 (c)], 仍假设截面上的轴力 F_{N2} 为正, 由平衡条件求得

$$F_{N2} = -8\text{kN}$$

负值表明该力的方向与假设的方向相反, 即为压力。

在上例中, 若取截面 $a-a$ 的右侧杆段

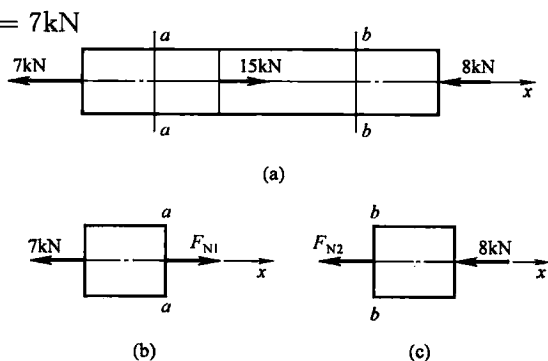


图 2.5

为研究对象, 由平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{N1} + 15 - 8 = 0$$

可得

$$F_{N1} = 15 - 8 = 7\text{kN}$$

可见, 取截面左侧部分或右侧部分, 所得结果相同。

通过上述计算可以看出, 直杆某一横截面上的轴力, 其数值等于该截面任一侧杆段上所有外力沿杆轴线方向投影的代数和, 若外力使力作用面和截开面之间的杆段产生拉伸变形, 则该外力为正, 反之为负。这是计算轴力的简便方法。

图 2.6 (a) 所示总重量为 W 的直杆, 上端固定, 下端自由。能否如图 2.6 (b) 所示, 以作用在重心 C 处的总重力 W 来等效代换实际作用于全杆体积内各点处的分布重力? 为什么?

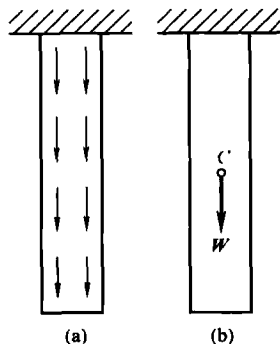


图 2.6

3. 轴力图

由以上讨论可见, 当杆受到多个轴向外力作用时, 在直杆的不同横截面上, 轴力的值彼此不同。为了形象地表示杆件横截面上的轴力随着横截面位置而变化的情况, 可用平行于杆轴线的坐标表示各个横截面的位置, 用垂直于杆轴线的坐标表示横截面上轴力的数值, 从而绘出表示轴力与截面位置关系的图线, 称为轴力图 (diagram of normal forces)。从轴力图上可以清楚地看到轴力沿杆件轴向的变化情况, 并且可确定最大轴力的大小及其所在横截面的位置。

例 2.2 钢杆 AD , 下端固定, 上端自由, 受力如图 2.7 (a) 所示, 已知: 尺寸 a , 试求钢杆各段的轴力, 并绘制轴力图。

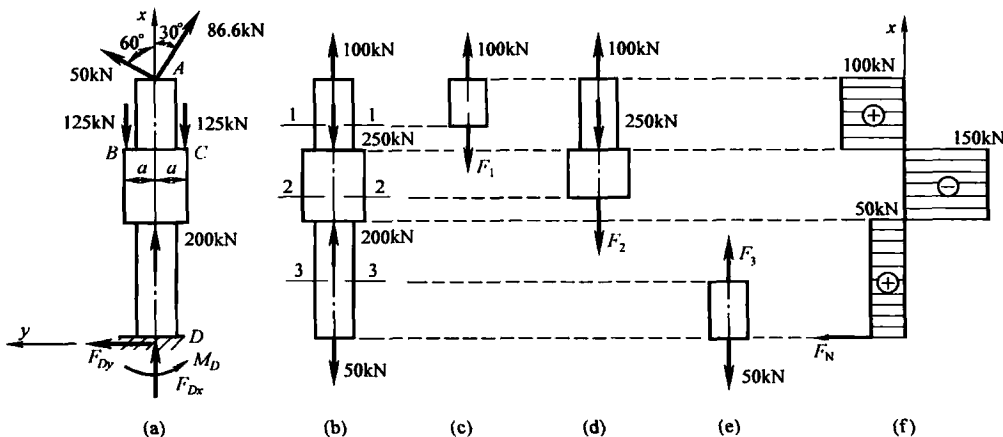


图 2.7

解: (1) 求支座反力。

取钢杆为研究对象, 画出其受力图, 如图 2.7 (a) 所示, 该杆所受的外力和约束力组成一个平面一般力系, 建立坐标系 Dxy , 由平衡方程

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Dy} + 50\sin 60^\circ - 86.6\cos 30^\circ = 0$$

可得

$$F_{Dy} = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_D + 125a - 125 = 0$$

可得

$$M_D = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Dx} + 50\cos 60^\circ + 86.6\cos 30^\circ - 125 - 125 + 200 = 0$$

可得

$$F_{Dx} = -50\text{kN}$$

求出的结果为负值，表示约束力 F_{Dx} 的方向与图中假设的方向相反，实际指向铅垂向下。

(2) 求轴力。

将作用于点 A 处的两个斜向外力合成，其合力作用线与杆轴线重合，由平行四边形法则可求得合力的大小为 100kN。将作用于点 B 和点 C 处的两个大小相等的平行力，向该截面形心简化，可得一个大小为 250kN、作用线与杆轴线重合、指向向下的合力。因此，可画出钢杆的计算简图，如图 2.7 (b) 所示。

在上段内某处，假想以平面 1—1 沿着垂直于杆轴的方向将杆切开，取截面上侧一段 [图 2.7 (c)]，假设轴力 F_1 为拉力，研究其平衡，由前述计算轴力的简便方法，可直接求得轴力

$$F_1 = 100\text{kN}$$

结果为正值，则 F_1 为拉力。

对于中段 [图 2.7 (d)]，可得

$$F_2 = 100\text{kN} - 250\text{kN} = -150\text{kN}$$

结果为负值，则 F_2 为压力。

对于下段 [图 2.7 (e)]，可得

$$F_3 = 50\text{kN}$$

结果为正值，则 F_3 为拉力。

(3) 绘轴力图。

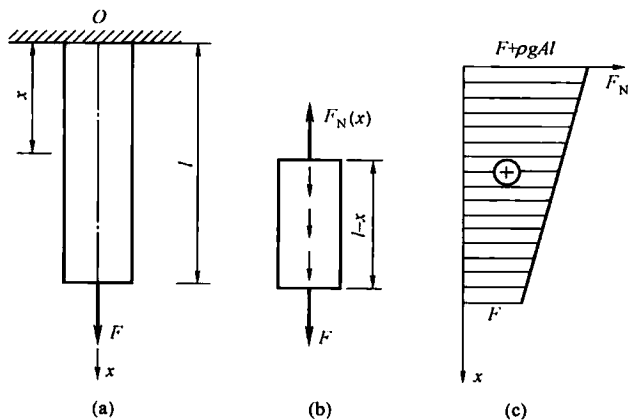


图 2.8

由上述计算结果可知，钢杆上、中、下三段的轴力分别有三个常量，沿平行和垂直杆轴线的方向分别取轴 x 和轴 F_N ，按适当比例，绘制轴力图，并标注轴力数值，如图 2.7 (f) 所示。显然，最大轴力 $F_{N,\max}$ 发生在中段的任一截面上，其大小为 150kN。

例 2.3 图 2.8 (a) 所示拉杆，杆长为 l ，横截面面积为 A ，下端受力 F 作用。已知杆材料的密度为 ρ ，如果考虑杆的自重，试

写出杆的轴力方程，并作轴力图。

解：取坐标轴 Ox 如图所示，用截面法将杆沿 x 处截开，考虑下段杆的平衡 [图 2.8 (b)]，求得

$$F_N(x) = F + \rho g A(l - x)$$

此即为轴力方程。绘制轴力图时以平行于杆轴线的坐标 x 表示横截面位置，以垂直于杆轴线的坐标表示轴力的数值，其轴力图如图 2.8 (c) 所示。

§ 2.3 应力 拉伸或压缩杆的应力

在计算出杆件的轴力后，还无法确定杆件是否会因强度不足而失效。这是因为轴力只是杆件横截面上分布内力系向截面形心简化后得到的合力，而要判断杆件是否会因强度不足而失效，还必须知道分布内力在杆内各点处的强弱程度，这需要引入应力的概念。

1. 应力

受力物体任一截面上的内力是连续分布的，为考察截面上分布内力在某一点 C 处的强弱程度，可在该截面围绕点 C 取一微面积 ΔA ，设作用在该微面积上的内力为 ΔF ，如图 2.9 (a) 所示。当微面积无限缩小趋于零时，其极限值

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

定义为该截面上点 C 处的总应力 (total stress)，反映截面上分布内力在点 C 处的强弱程度，即集度 (intensity)。

通常将总应力 p 分解成垂直于截面的法向分量 σ 和切于截面的切向分量 τ [图 2.9 (b)]。法向分量 σ 称为正应力 (normal stress)，切向分量 τ 称为切应力 (shearing stress)。应力的单位是 Pa，工程中通常使用 MPa ($1\text{MPa} = 10^6\text{Pa}$)。

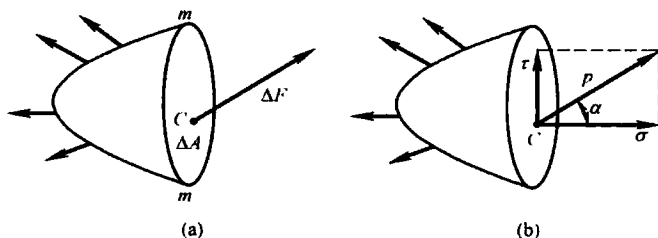


图 2.9

由应力的定义可知，应力是在受力构件的某一截面的某一点处定义的，因此，计算应力必须明确是哪个截面上哪一点处的应力。某一截面上某一点处的应力是矢量，一般规定离开研究对象的正应力为正，指向研究对象的正应力为负，即拉应力为正，压应力为负。

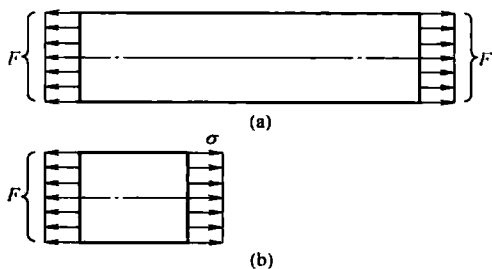


图 2.10

2. 拉伸或压缩杆横截面上的应力

一等截面直杆，两端作用有一对等值、反向的外力 F [图 2.10 (a)] 假设外力在端面上是均匀分布的，则其合力作用线与杆轴线重合，因而横截面上的内力只有轴力 F_N 。显然，横截面上各点的切应力不可能合成为垂直于横截面的轴力，因此可以推断，横截面上只可能有垂直于横截面的正应力，而没有切应力。由于假

设材料是均匀连续的, 杆件在一对等值、反向, 在端面均匀分布的轴向拉力的作用下, 各纵向线段的伸长必然都相同, 所以横截面上作用有均匀分布的正应力 [图 2.10 (b)]. 再由静力关系

$$F_N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A$$

求得

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad (2.1)$$

这就是拉杆横截面上正应力的计算公式, 式中, F_N 是轴力; A 为杆的横截面面积。对于轴向压缩的杆件, 上式同样适用。由于正应力的正负号与轴力的正负号相一致, 故受拉时应力为正, 受压时为负。应注意的是, 细长压杆容易被压弯, 这是属于稳定性问题, 将在第 8 章中讨论。受压时按式 (2.1) 计算的压应力是指杆件并未压弯的情况。

在导出式 (2.1) 的过程中, 曾假设直杆两端的面力分布是均匀的, 在此前提下按此公式计算的应力才能严格满足两端力的边界条件。但在实际问题中, 杆端外力总是通过不同的连接方式 (如铆接、焊接等) 传递到杆上的, 在外力作用点的附近区域, 应力情况比较复杂。实验结果表明: 将物体局部边界上的外力用一静力等效的力系代替, 则受力局部区域的应力分布将有显著改变, 而稍远的应力改变甚微, 其影响可忽略不计。这一论断, 称为圣维南原理 (Saint-Venant Principle)。根据圣维南原理, 在距外力稍远处, 可用式 (2.1) 计算拉压杆横截面上的正应力。

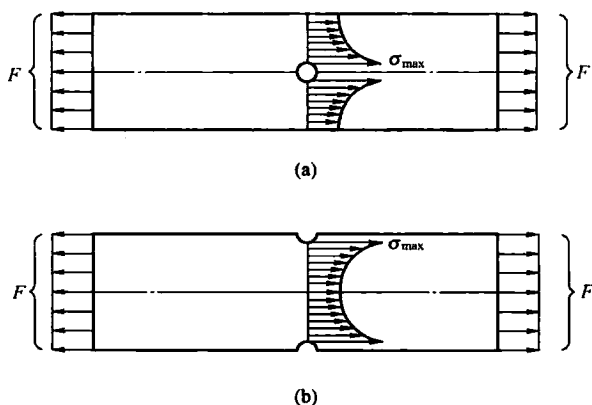


图 2.11

对于变截面直杆, 由于变形的非均匀性, 横截面上的应力并非均匀分布。若截面变化比较缓慢, 按式 (2.1) 计算所引起的误差不大, 这在工程中一般是允许的。但若截面尺寸有急剧改变, 在截面突变处的局部范围内, 应力数值急剧增加, 而稍远处横截面上的应力则趋于均匀。这种由于杆件截面尺寸的突然变化而引起局部应力骤增的现象, 称为应力集中 (stress concentration)。例如, 开有圆孔和带有切口的板条 (图 2.11), 受轴

向拉伸时, 在圆孔和切口附近的局部区域内, 应力将急剧增加。弹性理论或实验结果表明: 截面尺寸的改变越急剧, 应力集中的程度就越严重。

材料不同, 对应力集中的敏感程度是不同的。塑性材料有屈服阶段 (参阅 § 2.4), 当局部的最大应力达到材料的屈服应力时, 该处的变形随着外力的增加继续增长, 而应力却基本上不增加。这时增加的外力由截面上尚未屈服的材料来承担, 从而降低了应力不均匀的程度。因此, 在静载荷的条件下, 用塑性材料制成的构件可以不考虑应力集中的影响。脆性材料由于没有屈服阶段, 局部应力集中处的应力始终是最大的, 该处将首先产生裂纹。所以, 用脆性材料制成的构件, 即使在静载荷的条件下也应考虑应力集中的影响。但是在动载荷作