高中数学

GAOZHONG SHUXUE

能力型问题

奚定华 查国建 陈嘉驹 主编

上海教育出版社

世纪集团

责任编辑　韩希塘
封面设计　陈　芸

高中数学

GAOZHONG SHUXUE

能力型问题

ISBN 7-5444-0352-1

9 787544 403528 >

易文网：www.ewen.cc

定价：16.00元

高中数学能力型问题

奚定华　查建国　陈嘉驹　主编

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学能力型问题／奚定华，查建国，陈嘉驹主编．
上海：上海教育出版社，2005.11 (2006.3 重印)
ISBN 7-5444-0352-1

Ⅰ．中… Ⅱ．①奚… ②查… ③陈… Ⅲ．数学课
－高中－升学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 125623 号

高中数学能力型问题

奚定华 查建国 陈嘉驹 主编

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

易文网：www.ewen.cc

(上海永福路 123 号 邮编：200031)

上海新华书店经销 上海复旦四维印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 10.5 字数 224,000

2005 年 11 月第 1 版 2006 年 3 月第 2 次印刷

印数 5,001－10,000 本

ISBN 7-5444-0352-1/G·0264 定价：16.00 元

(如发生质量问题，读者右向工厂调换)

前　言

随着数学课程教材和考试评价改革的深入开展，提高学生能力的问题越来越引起人们的重视，被提到了重要的地位. 数学能力既是数学学习的重要目标，又是数学高考的重要内容. 数学能力主要包括思维能力、运算能力、空间想象能力、学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力. 特别是后面四种能力在当前数学课程教材改革和数学高考改革中得到充分的体现. 近几年来数学高考出现了许多考查这四种能力的新题型，受到了不少数学教师和学生的关注，但由于这些题型还在形成过程中，教师和学生对它们还不够熟悉. 为了使本书的读者对这些能力型问题有进一步的了解，我们对这四种能力型问题分别进行深入的剖析和阐述. 首先对每一种能力型问题提出几种常见的类型，然后对每一种类型的问题分以下几个方面加以说明：

1. 高考试题设计和分析

高考试题是经过数学高考命题组的老师精心设计、反复讨论、认真修改后编制而成的，并且经过高考大面积的测试检验，不但具有原创性和先进性，而且具有典型性和实践性，通过介绍这些试题的命题思路和情景设计，读者可以从中得到很多启发，对什么是能力型问题可以有比较具体的了解. 通过对这些试题解答情况的分析，可以了解在解能力型问题的过程中会遇到哪些障碍，产生哪些问题，会产生哪些错误，如何纠正这些错误，解决这些问题.

2. 典型例题选讲

为了提高读者学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力，我们编制了一些典型的例题，通过它们对每一种能力进行具体的分析和研究，进一步说明如何解有关这种能力的问题.

3. 题型结构和特点

对每一种题型的结构进行剖析，研究它由哪几个部分组成，每一个部分的内容和作用如何，再进一步阐述每一种题型具有哪些特点，使读者对每一种题型的内涵有深刻的理解.

4. 解题方法和策略

在分析题型结构和特点的基础上，说明每一种题型解题的方法和策略. 由于这些能力型问题不同于基础知识和基本技能类型的问题，它没有固定的模式. 必须根据每一种类型问题的结构和特点，采用不同的方法和策略.

5. 能力训练

读者要真正提高这四种能力，单靠阅读和理解是不够的，必须要进行练习，要做一定数量的习题，为此我们编制了适当数量的练习题，供读者练习之用，并在书后附上解答和答案. 由于能力型问题很多是开放性的，因此有些答案只是其中的一部分，仅供读者参考.

在上面五个部分中，高考试题的设计和分析、题型结构和特点、解题方法和策略这三部分是本书的重要特色，是本书不同于其他读物的内容，必须引起读者的充分重视．通过高考试题的设计和分析，读者可以从中了解数学高考命题的构思和具体操作的过程．题型结构和特点则告诉读者，对每一种类型的问题必须深入地加以剖析，揭示其本质．解题方法和策略为读者解决数学问题，特别是解决非常规问题提供了不少方法和策略．对于提高读者的数学解题能力无疑会有很大的帮助．

这里还特别要指出一点，读者在阅读本书时必须注意，决不能用传统的教育观念和思维方式，进行题型训练，硬套模式，而应该通过阅读这些问题和解法，从中得到启发，拓宽解题的思路，学会分析问题的方法，掌握解决问题的策略，不断提高学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力．

本书是在《高中数学能力型问题研究》一书基础上，经过较大的修改和补充，编写而成的．《高中数学能力型问题研究》由奚定华、查建国、陈嘉驹、贺才兴、忻再义、张雄、况亦军、赵军山、黄华、李秋明等老师参加编写．本书编写时又增添了施洪亮、卜照泽、虞涛、况亦军等老师．最后由奚定华修改和统稿．本书出版过程中得到上海教育出版社韩希塘同志的大力支持和帮助，在此深表感谢．

由于编者水平有限，又加上时间比较仓促，书中可能会有一些错误和问题，望读者阅后批评指正，以便在再版时予以修正．

编者

2005 年 7 月

目 录

第一章 提高能力是数学学习的重要目标

一、提高能力是素质教育的要求 1

二、能力立意是数学高考的命题理念 1

三、提高能力必须改善学习方式 3

第二章 学习能力型问题

一、概念学习型问题 5

二、定理(公式)学习型问题 18

三、方法学习型问题 25

第三章 探究能力型问题

一、探究规律型问题 34

二、判断存在型问题 39

三、判断真假型问题 46

四、结论开放型问题 50

五、追溯条件型问题 55

第四章 应用能力型问题

一、简单应用型问题 63

二、数学建模型问题 80

第五章 创新能力型问题

一、类比发现型问题 99

二、拓展推广型问题 106

三、设计构造型问题 117

能力训练解答或答案

第一章 提高能力是数学学习的重要目标

一、提高能力是素质教育的要求

当今已进入知识经济和信息化社会，科学技术迅猛发展，日新月异，以科技进步为核心的综合国力竞争日趋激烈，要应对这种挑战，缩短我们与发达国家之间的差距，必须实现跨越式发展，创新精神和实践能力已成为影响民族生存的基本因素. “创新是一个民族的灵魂，是一个国家发展的不竭动力.”为了提高我们的综合国力，必须大力推进素质教育，为国家培养有创新精神和实践能力的人才. 如何才能全面实施素质教育呢？《中共中央国务院关于深化教育改革，全面推进素质教育的决定》提出，要通过课程教材改革、评价制度改革，全面实施以培养创新精神和实践能力为重点的素质教育，“要让学生感受、理解知识产生和发展的过程，培养学生的科学精神和创新思维习惯，重视培养学生搜集处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力、语言文字表达能力以及团结协作和社会活动的能力.”因此培养学生各方面的能力既是素质教育的重要目标，又是考试评价的重要依据.

上海的二期课改在一期课改的基础上，提出了以学生发展为本的课程理念，要使学生在知识、能力和态度等方面都得到全面发展，把培养和提高学生的能力放在非常重要的地位. 新的《数学课程标准》也明确提出：数学课程及其教学要“关注数学能力的发展”. 在高中阶段课程目标中提出要培养“逻辑推理能力、运算能力和空间想象能力”，“探究能力、应用能力和创新能力”，“研习能力、批判思维能力、自我调控能力、交流与合作能力”. 所有这些都说明培养和提高能力是数学教育的一项非常重要的任务.

二、能力立意是数学高考的命题理念

为了全面推进素质教育，实现评价制度的改革，教育部对高考命题改革提出了新的要求，“要更加注意能力和素质的考查；命题的范围要遵循大纲，又不拘泥于教学大纲；要增加应用型和能力型的试题设计.”根据教育部有关指示的精神，结合上海的实际情况，上海教育考试院对高考上海卷命题工作也提出了指导性的意见，要求命题时应注意在考查知识的基础上注重考查能力，考查学生在新的情景中运用基础知识的能力，在不影响评分客观性的前提下，试题的解答要有一定的开放度，提倡发散性思维和创新精神，降低试题的绝对难度，从试题的能力要求上体现区分度. 在这些思想的指导下，上海高考数学的命题理念发生了质的变化，从知识立意转向能力立意. 随之高考数学的试卷和试题也发生深刻的变化，具体表现在以下几个方面：

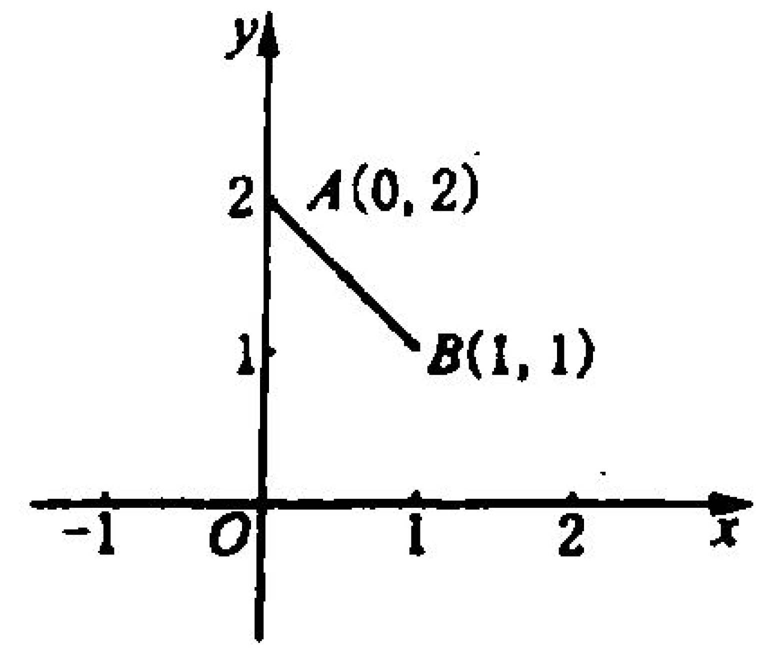
1. 突出能力的考查

近几年来，上海高考数学命题把考查学生的能力作为主攻方向，进行了重点的

突破，着重考查学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力，推出了很多新颖的能力型试题，使数学试卷从内容到形式都发生了显著的变化.

2. 创设新的情景，结合双基考查能力

改变以前某些知识点固有的考查模式，在新的情景下考查基础知识和基本技能. 如 1999 年第 11 题为：若以连续掷两次骰子分别得到的点数 m、n 作为点 P 的坐标，则点 P 落在圆 $x^2+y^2=16$ 内的概率是________. 这道试题设计为在求平面上圆内整数点的新的情景下考查掷骰子的概率；又如 2000 年秋季第 8 题为：设函数 $y=f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数，它在区间 $[0,1]$ 上的图像为如图所示的线段 AB，则在区间 $[1,2]$ 上，$f(x)=$____. 通过给出的函数图像的情景来考查函数的奇偶性、周期性.



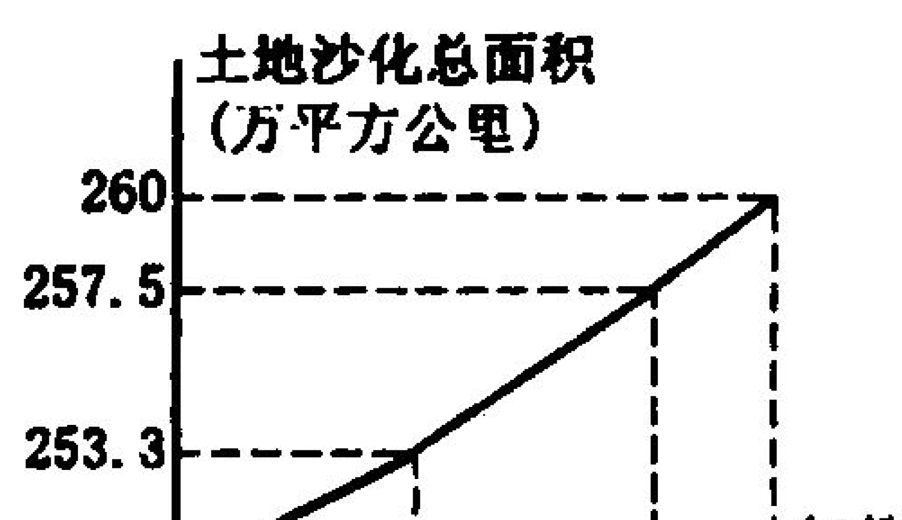
3. 试题条件结论开放，拓展学生思维空间

打破试题条件或结论都是唯一确定的模式，通过思路多角度、解答多元化，考查学生思维的广阔性. 如 1999 年第 12 题，根据已知条件构成的四面体有多种可能，要求学生从中寻求一个较简单的四面体体积；又如 2000 年春季第 12 题为：设 I 是全集，非空集合 P、Q 满足 $P\subset Q\subset I$. 若含 P、Q 的一个集合运算表达式，使运算结果为空集 $\varnothing$，则这个运算表达式可以是____________________（只要写出一个表达式）. 要求学生在众多的表达式中，写出其中一个满足条件即可.

4. 提供新的信息，考查学生获取信息、加工信息的能力

让学生从试题中收集信息，并对信息进行加工提炼，从而解决问题. 如 2001 年秋季第 12 题为：

据报道，我国目前已成为世界上受荒漠化危害最严重的国家之一. 左下图表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况. 由图中的有关信息，可将上述有关年代中，我国年平均土地沙化面积在右下图中图示为：



这个问题给出了表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况的一个图形，要求学生从图中收集有关信息，通过处理后，再画出上述有关年代中，我国年平均土地沙化面积的图形.

有的问题要求学生先从题目中获取信息，然后进行加工处理，独立完成知识的理解、掌握和运用的过程，如 2000 年秋季第 22(1)、(2)题为：

已知复数 $z_0=1-mi(m>0)$，$z=x+yi$ 和 $w=x'+y'i$，其中 x、y、x'、y' 均为实

数，i 为虚数单位，且对任意复数 z，有 $w=\overline{z_0}\cdot\overline{z}$，$|w|=2|z|$.

(1) 试求 m 的值，并分别写出 x'、y'用 x、y 表示的关系式；

(2) 将(x,y)作为点 P 的坐标，(x',y')作为点 Q 的坐标，上述关系式可以看作是坐标平面上点的一个变换，它将平面上的点 P 变到这一平面上的点 Q.

当点 P 在直线 $y=x+1$ 上移动时，试求点 P 经该变换后得到的点 Q 的轨迹方程.

学生在解决问题的过程中，先根据题目提供的信息，通过复数运算，建立两复数的实部、虚部间的关系，并把这个关系定义为一种变换，得到一种新的知识，然后独立地理解和掌握它，再应用它解决点、直线经过变换后的有关问题.

5. 淡化知识结构的完整性和系统性，不强调知识的覆盖率

过去数学高考以知识立意，强调考查数学基础知识和基本技能，特别注重知识的覆盖率，在命题过程中经常考虑哪些知识要考，哪些知识不考. 编拟“压阵题”时，首先考虑它的内容落在哪些知识点上，是解析几何的圆锥曲线、轨迹，还是函数、数列或不等式等. 编拟客观题时考虑哪些知识还没有考到，由此补充有关知识的试题. 随着能力立意命题理念的确立和框架结构的定位，命题构思和布局已站在新的起点上. 淡化知识覆盖率，突出思维模式、思维容量和思维层次的考查.

6. 减少运算量，降低试题数学内容的难度

以往高考数学运算量大，试题有关数学内容的难度较高，特别是“压阵题”，考查的数学知识容量大，逻辑思维段落多，设置思维障碍的力度较大，又有一定的学科知识综合度，因而数学难度较高，给学生带来较重的负担. 这几年变难度“压阵”为能力“压阵”，推出一些能力型试题，数学内容的难度并不高，但却有较好的区分度，有利于减轻学生的过重负担.

7. 计算器进入数学高考

这几年在数学高考中可以使用计算器. 使用计算器是一种运用计算工具的能力，它使学生从繁复的计算中解放出来，既减轻学生的过重负担，又可以使学生将有限的时间用于提高能力. 由于计算器强大的计算功能，使原来无法考查的应用问题有了测试的可能，有助于学生应用数学知识解决实际问题能力的提高.

三、提高能力必须改善学习方式

数学学科中的能力主要包括：思维能力、运算能力、空间想象能力、学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力. 本书着重阐述后面四种能力，即

1. 学习新的数学知识的能力

学习新的数学知识的能力是指通过阅读，理解以前没有学过的新的数学知识(包括新的概念、定理、公式、法则和方法等)，并能运用它们作进一步的运算和推理，解决有关问题的能力，这是一种学会学习的能力.

2. 探究数学问题的能力

探究数学问题的能力是指运用学过的数学知识，通过观察、试验、联想、类比、演

绎、归纳、分析、综合、猜想等思维形式，对数学问题进行探索和研究的能力.

3. 应用数学知识解决实际问题的能力

应用数学知识解决实际问题的能力是指能正确理解问题背景，会分析给出的有关信息，并能进行提炼、加工，找出它们的数量关系，建立数学模型，从而解决实际问题的能力.

4. 数学创新能力

创新能力是指运用已知信息，通过开展思维和实践活动，产生某种新颖、独特的、有社会价值产品的能力，数学中的创新能力一般是指对已经掌握的数学知识、方法进行推广和拓展，对未知的数学领域通过探索得到新的结果的能力. 对于中学生来说，在很多情况下，表现为他们自己想出了解决问题的新的办法或策略，对某些定理和公式的结论进行深化和延伸，通过类比或推广得到新的命题等.

通过培养和提高能力，可以使学生既能通过自学掌握数学基础知识和基本技能，又会通过探索研究解决数学问题，还能应用数学知识解决实际问题，对数学知识能作一定的创新，这样做无疑将大大推动学生素质的提高. 但是培养和提高能力不是一件容易的事，它涉及到学习方式的改革，为了做到这一点，我们必须开展研究性学习，在教师指导下，学生通过观察、阅读、调查研究、查阅资料、动手操作、实验、收集分析和解读数据、提出假说或猜想、验证、表达和交流等活动，自主地发现问题、探究问题、获得结论. 学会自己搜集和获得信息，加工和处理信息，学会探索和研究，提高分析问题和解决问题的能力，并能大胆创新，敢于提出问题，进行发散性思维、批判性思维和创造性思维，培养创新意识. 在进行研究性学习的过程中，问题解决是一个很重要的方面，通过适当解一些能力型问题，有利于提高学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力. 但是这里必须指出，在解能力型问题时要注意不能再用过去套题型、套模式的方法，应该通过分析问题，学习解决数学问题的方法，掌握解决数学问题的策略，提高解决问题的能力.

第二章　学习能力型问题

学习新的数学知识的能力指的是通过阅读，理解以前没有学过的新的数学知识(包括新的概念、定理、公式、法则和方法等)，并能运用它们作进一步的运算推理，解决有关问题的能力．这里我们简称为学习能力．

学习能力型问题常见的有以下几种类型：

1. 概念学习型；
2. 定理(公式)学习型；
3. 方法学习型．

下面我们分别加以说明．

一、概念学习型问题

高考试题设计和分析

1. 设椭圆 C_1 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，曲线 C_2 的方程为 $y=\frac{1}{x}$，且 C_1 与 C_2 在第一象限内只有一个公共点 P．

(1) 试用 a 表示 P 点的坐标；

(2) 设 A、B 是椭圆 C_1 的两个焦点，当 a 变化时，求$\triangle ABP$ 的面积函数 $S(a)$的值域；

(3) 记 $\min\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中的最小的一个．设 $g(a)$是以椭圆 C_1 的半焦距为边长的正方形的面积，试求函数$f(a)=\min\{g(a),S(a)\}$的表达式．

(1999 年理科第 22 题)

该题原来的设计是：求函数 $\min\{f,g\}$的表达式，其中对使函数 f 和 g 有定义的任意实数 x，$\min\{f,g\}(x)=\min\{f(x),g(x)\}$．按照原来的设计，记号 $\min\{f,g\}$的意义是由 $\min\{f(x),g(x)\}$给出的，这对学生的函数概念及抽象符号的理解能力有较高的要求，考虑到当前学生的实际情况，放弃了原来的构思，改为用下列较具体的说法：记 $\min\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中的最小的一个．目的是考查学生是否能读懂这个符号表示的意义，并能运用．

在解题过程中，有些考生对记号 $\min\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$中的 y 的理解有偏差，他们想当然地将其与题干中的曲线 C_1、C_2 的方程中的 y 联系在一起，这样就难以理解该记号的一般意义，解题自然会遇到困难．还有些考生对概念 $\min\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$的理解停留在较浅的层次上，例如，有些考生虽然能明白 $\min\{1,2,-1\}=-1$，但却不明白 $\min\{x,x^2\}$是什么，即他们不知道此时应分类讨论 x 与 x^2 的大小，当 $x\leqslant x^2$ 时，$\min\{x,x^2\}=x$；当 $x>x^2$ 时，$\min\{x,x^2\}=x^2$．因此有些考生能正确得出 $g(a)$与$S(a)$

的表达式，但却不能进一步得到 $f(a)$的表达式.

本题得分率为 0.31.

2. 四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是一个平行四边形，$\overrightarrow{AB}=\{2,-1,-4\}$，$\overrightarrow{AD}=\{4,2,0\}$，$\overrightarrow{AP}=\{-1,2,-1\}$.

(1) 求证：$PA\perp$底面 $ABCD$；

(2) 求四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积；

(3) 对于向量 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$，定义一种运算：

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_1y_3z_2-x_2y_1z_3-x_3y_2z_1.$$

试计算$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AP}$的绝对值的值；说明其与四棱锥$P\text{-}ABCD$的体积的关系，并由此猜想向量这一运算$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AP}$的绝对值的几何意义.

(2000 年春季第 21 题)

设计本题的目的是，要求考生用向量的方法来解立体几何问题，并通过学习一种新的向量运算来求值，再由计算的结果，通过比较，猜出这个新运算的几何意义.

这是一个有关学习新运算和进行猜测的问题，要求在一定时间内，读懂新运算的定义，按法则进行计算；由计算的结果，猜测出这个新运算的几何意义，需要考生有一定的学习能力和创新能力.

由于这个新运算的定义比较简单，计算$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AP}$的值只需将$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AP}$的坐标代入等式$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_1y_3z_2-x_2y_1z_3-x_3y_2z_1$ 即可，因此考生只要理解这个等式的意义，是可以计算出正确结果的.

考查的结果是大多数考生能根据新运算的定义进行运算. 但运算错误很多. 有好多学生不会猜测$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AP}$的绝对值的几何意义.

本题第(1)题得分率为 0.79，第(2)题得分率为 0.46，第(3)题得分率为 0.24.

3. 已知复数 $z_0=1-mi(m>0)$，$z=x+yi$ 和 $w=x'+y'i$，其中 x,y,x',y'均为实数，i 为虚数单位，且对任意复数 z，有 $w=\overline{z_0}\cdot\overline{z}$，$|w|=2|z|$.

(1) 试求 m 的值，并分别写出 x'和 y'用 x、y 表示的关系式；

(2) 将(x,y)作为点 P 的坐标，(x',y')作为点 Q 的坐标，上述关系式可以看作是坐标平面上点的一个变换：它将平面上的点 P 变到这一平面上的点 Q.

当点 P 在直线 $y=x+1$ 上移动时，试求点 P 经该变换后得到的点 Q 的轨迹方程；

(3) 是否存在这样的直线：它上面的任一点经上述变换后得到的点仍在该直线上？若存在，试求出所有这些直线；若不存在，则说明理由.

(2000 年秋季第 22 题)

该题给出了 xOy 平面上点变换的一个规则，要求学生通过学习掌握这个规则，利用解析几何中学过的处理轨迹问题的基本方法，进一步研究这个点变换规则的一些性质. 同前面的试题相比较，该题在考查学生学习能力的要求上显然上了一个台阶，进入了一个新的层次，要求学生学习一个新的规则，并能运用它解决有关的问题.

在这个点变换的规则学习、运用过程中，有些考生面对变换公式，一味地想找出该变换的几何意义，在遇到困难之后陷入慌张之中，浪费了宝贵的时间. 还有些考生不知道如何运用该变换公式去解决问题，反映出他们在函数图像的移动和坐标平移

的学习中并没有很好地掌握其实质，在新的、陌生的情景下，不会用过去学过的方法去解决问题.

本题得分率理科为0.36，文科为0.31.

4. 若记号“$*$”表示求两个实数 a 与 b 的算术平均数的运算，即 $a*b=\frac{a+b}{2}$，则两边均含有运算符号“$*$”和“$+$”，且对于任意3个实数 a、b、c 都能成立的一个等式可以是________.

(2001年春季第10题)

本题要求考生先读懂记号“$*$”的意义，会进行“$a*b$”的运算，在此基础上进一步要求考生能写出一个等式，满足以下两个条件：(1) 两边均含有运算符号“$*$”和“$+$”；(2) 对于任意3个实数 a、b、c 都能成立. 这个问题对考生的学习能力有一定的要求. 首先要能通过自己学习理解新运算“$*$”的意义；其次还要在理解的基础上，能运用这个新的概念，设计一个等式，满足题设的条件，而且答案又是开放的，可以有多种结果.

从考查的结果来看，本题的得分率较低，仅为0.07，许多考生不理解新运算 $a*b=\frac{a+b}{2}$，只从形式上看，感到有点像算术平均数，于是写出结论：$a*b*c=\frac{a+b+c}{3}$. 有些考生没有看清题意，写出的等式等号的一边只有一种运算符号，还有些考生写出的等式：从形式上看，两边均含有运算符号“$*$”和“$+$”，都有三个实数 a、b、c，但等式本身不成立.

5. 对于函数 $f(x)$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点. 已知函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)\quad(a\neq0)$.

(1) 当 $a=1$，$b=-2$ 时，求函数 $f(x)$ 的不动点；

(2) 若对任意实数 b，函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点，求 a 的取值范围；

(3) 在(2)的条件下，若 $y=f(x)$ 图像上 A、B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点，且 A、B 两点关于直线 $y=kx+\frac{1}{2a^2+1}$ 对称，求 b 的最小值.

(2002年春季第22题)

选择“不动点”的概念考查学习能力是基于以下考虑：

(1) 该概念学生在理解上不会感到困难，比较适合目前学生的认知水平.

(2) 该概念容易与学生已有的知识建立联系，并可在新的情景下结合函数、方程和不等式等知识进行考查.

(3) 该概念与函数图像有一定的联系，可以结合解析几何等知识考查学生分析问题、解决问题的能力.

试题最初给出的原型是：

对于函数 $f(x)$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.

(1) 求函数 $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ 的不动点；

(2) 试用 $y=\frac{2x+1}{x+1}$ 和 $y=x$ 的图形表示上述不动点；

(3) 若函数 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+b}$ 有两个关于原点对称的不动点，求 a、b 须满足的充要条件.

这个方案存在以下不足：

(1) “不动点”概念与其他数学知识联系不多；

(2) 作函数 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ 的图像并非教学重点.

经过讨论，将“不动点”概念与二次函数相结合，这样内涵更丰富，更为学生熟悉. 因此采取以下方案：

若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.

设函数 $f(x)=x^2+(2m+1)x+m^2-1$.

(1) 证明：不论 m 为何值，$f(x)$ 总有两个不动点；

(2) 证明：不论 m 为何值，两个不动点对应函数 $f(x)$ 图像上的两点 A、B 之间的距离为定值；

(3) 若不动点 A、B 关于直线 $y=kx+\dfrac{1}{m}$ 对称，求 k 和 m 的值.

这个方案虽然涉及方程、不等式以及解析几何中的内容，但要作为整卷的最后一题，在能力要求、综合性等方面还显得不够. 于是又改为：

若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.

设函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)\quad(a\neq0)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点，求 a 的取值范围；

(2) 设函数 $f(x)$ 的两个不动点对应函数 $y=f(x)$ 图像上 A、B 两点，A、B 关于直线 $y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$ 对称，求 b 的最小值.

经过几次修改，最后形成 2002 年春季高考第 22 题，试题的设计落实在知识的交汇点上. 通过引入双参数，使二次函数、二次方程、二次不等式的内容在“不动点”概念中得到有机的组合；在函数图像的运动变化中，探求参变量之间的关系，再借助基本不等式求最小值.

本试题的设计，在综合性和能力层次上有所提高，既有学习能力考查，也有分析问题解决问题的能力考查. 同时在上述基础上补充了第(1)题，作为理解概念的台阶；在第(3)题中加了“在(2)的条件下”使题目结构更加严密.

考生在解答本题时，主要障碍是对“不动点”概念的理解. 有的将点 $(x_0, f(x_0))$ 理解为不动点，也有的把使 $f(x_0)=0$ 的 x_0 作为不动点，这样对以后的解题，以及理解“若 $y=f(x)$ 图像上 A、B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点”等，都造成了困难. 还有部分学生不能从 A、B 两点的位置，得出直线 $y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$ 中的 $k=-1$，则对第(3)题就不知如何求 b 的最小值.

本题得分率为 0.42.

6. 规定 $C_x^m=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}$，其中 $x\in\mathbf{R}$，m 是正整数，且 $C_x^0=1$，这是组合数 C_n^m（n、m 是正整数，且 $m\leqslant n$）的一种推广.

(1) 求 C_{-15}^{5} 的值；

(2) 组合数的两个性质：

① $C_n^m=C_n^{n-m}$； ② $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$.

是否都能推广到 C_x^m($x\in\mathbf{R}$, m 是正整数)的情形？若能推广，则写出推广的形式并给出证明；若不能，则说明理由；

(3) 已知组合数 C_n^m 是正整数，证明：当 $x\in\mathbf{Z}$, m 是正整数时，$C_x^m\in\mathbf{Z}$.

(2002 年秋季第 22 题)

设计该题的指导思想，首先是紧扣教材的基础知识，引导教学重视教材抓基础；其次，源于教材又高于教材，要求学习一个新的定义，该定义与旧知识既有联系，又在本质上有所发展，并且还要在学生已有的知识结构中对已认识的性质作出推广；最后，对于一个已经经过发展的事实作出证明，也可以看作是新定义的应用. 上述三个环节体现了研究性学习的过程.

在本题的"规定"下，还有一些延伸的问题可以考虑：如当 n 改为 x($x\in\mathbf{R}$)时，

$$C_n^m=\frac{n}{n-m}C_{n-1}^m,$$

$$C_n^m=\frac{n}{m}C_{n-1}^{m-1},$$

$$C_{n+1}^r=C_n^r+C_{n-1}^{r-1}+\cdots+C_{n-r}^0,$$

$$C_{n+m+1}^{n+1}=C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_{n+m}^n,$$

$$C_{m+n}^r=C_m^0C_n^r+C_m^1C_n^{r-1}+C_m^2C_n^{r-2}+\cdots+C_m^rC_n^0.$$

上述组合数公式中哪些能推广？还能写出哪些能推广的组合数公式？考虑到试题的难度，这些问题都没有列入试题.

学生在解答本题时，首先没有正确理解组合数计算公式中，分子每一项是递减的，当出现"-"时，绝对值递减了，但是该数值却递增了；在证明组合数性质 1 不能推广时，不会利用反例说明问题，常常提出一些不能成立的理由(如 $x>0$ 时能推广，$x<0$ 时不能推广)；一些学生没有掌握 $n\in\mathbf{N}$, C_n^m 中 n、m 的关系，在证明 $C_x^m\in\mathbf{Z}$ 时，将 x 分成大于零，等于零，小于零(或分成奇、偶数)不同情况讨论.

本题得分率理科为 0.34，文科为 0.33.

7. 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体：

存在非零常数 T，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立.

(1) 函数 $f(x)=x$ 是否属于集合 M？说明理由；

(2) 设函数 $f(x)=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)的图像与 $y=x$ 的图像有公共点，证明：$f(x)=a^x\in M$；

(3) 若函数 $f(x)=\sin kx\in M$，求实数 k 的取值范围.

(2003 年秋季第 22 题)

设计试题的指导思想是，在教材基本概念的基础上，提出某种新的定义，或作某种推广，再深入地讨论问题，考查学生是否具有研究性学习能力. 于是选择教材中函数周期的定义，对此略作了些拓展，并用集合的语言来进行描述，这样，同时又可以考查学生对集合的理解. 由此出现题干上的那段叙述：对于函数 $f(x)$, $x\in\mathbf{R}$，存在非零常数 T，对于任意 $x\in\mathbf{R}$，有等式 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立，那么把满足这个性质的函

数 $f(x)$ 组成一个集合，记为 M.

围绕着给出的定义，考虑考查学生对该定义的理解和应用. 首先想到三角函数的有关性质与其相似；然后，性质 $f(x+T)=Tf(x)$ 有类似指数运算的性质，所以可以考查指数函数的有关问题；再确定一个不满足该性质的函数，这样的函数较容易找. 于是本题的初稿如下：

集合 M 是所有同时满足如下两个条件的函数 $f(x)$ 的全体：

① $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$；

② 存在非零常数 T，满足对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+T)=Tf(x)$ 恒成立.

(1) 判断函数 $f(x)=x^2$ 与集合 M 的关系；

(2) 若函数 $f(x)=\sin kx\in M$，求实数 k 的取值范围；

(3) 已知指数函数 $y=f(x)=a^x$，$a>0$ 且 $a\neq 0$，求证："$f(x)=a^x\in M$"的充要条件是"$f(x)=a^x$ 与它的反函数的图像有公共点".

经过反复讨论，认为整个问题的结构是可以的，但还存在一些问题，为此作了以下修改：

1. 由于起点较高，将函数 $f(x)=x^2$ 改为 $f(x)=x$.

2. 第(2)题中得到 $T=\pm 1$ 的难度太大，应将第(2)题作为第(3)题.

3. 第(3)题中的思维要求高，学生若想到解决的方法，也不容易书写好，所以应降低难度，但还保留代数证明的考查要求，并将它作为第(2)题.

但该题 3 个小题考查的目标有些重复，经实际考试后，第(3)题难度仍然较大，其实再作如下修改，让学生先对新的定义有一个比较感性的认识，再证明一个简单的函数是否属于集合 M，然后深入地讨论指数函数属于集合 M 的充分必要条件，步步深入就比较合适了：

已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体：

存在非零常数 T，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立.

(1) 若 $T=2$，且 $f(x)=x$，$x\in[0,2]$，求 $f(-1)$；

(2) 证明：$f(x)=x\notin M$；

(3) 已知函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 的值域是 $(0,e^{\frac{1}{e}}]$，写出 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)\in M$ 的一个充分必要条件.

在答题过程中，有的学生不理解集合 M 的意义，致使判断错误. 不能正确证明的学生，大多数是逻辑表达不清；部分学生对 $f(x)=a^x$ 与 $y=x$ 的图像有公共点的条件使用不当，证明过程中忽略了 $T\neq 0$ 的条件；还有很多学生遗漏了对 $T=0$ 的讨论. 而大多数学生只做到 $\sin[k(x+T)]=T\sin kx$，由此，要确定 $T=\pm 1$ 很困难.

本题得分率为 0.29.

8. 已知倾斜角为 45°的直线 l 过点 $A(1,-2)$ 和点 B，B 在第一象限，$|AB|=3\sqrt{2}$.

(1) 求点 B 的坐标；

(2) 若直线 l 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\quad(a>0)$ 相交于 E、F 两点，且线段 EF 的中点坐标为 $(4,1)$，求 a 的值；