

2017

李永乐·王式安**唯一**考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

数学历年真题 权威解析

数学三

主 编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编委 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥
(按姓氏笔画排序)

最佳搭配：《复习全书》+《660题》+《历年真题》

双色印刷
绝佳的阅读体验

哪里不会扫哪里

重难点视频讲解
APP扫书中二维码
详见封二使用说明

权威名师与命题专家联手打造 考试知识复习与能力培养并重
多角度讲解试题开拓解题思路 分析解答透彻易懂更有针对性
详尽地归纳总结典型解题方法 综合提高运用知识的分析能力

赠送
配套专属
练习册



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



2017

李永乐·王式安唯一考研数学系列
全国十二大考研辅导机构指定用书

数学历年真题 权威解析

数学三

主 编 © 李永乐 王式安 季文铎

编委 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥
(按姓氏笔画排序)



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题权威解析. 数学三/李永乐,王式安,季文铎
主编. —西安:西安交通大学出版社,2015.12

ISBN 978-7-5605-8161-3

I. ①数… II. ①李…②王…③季… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 299904 号

书 名:数学历年真题权威解析(数学三)
主 编:李永乐 王式安 季文铎
责任编辑:张卓磊 张梁
出版发行:西安交通大学出版社
地 址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)
电 话:(029)82668315(总编办)
(029)82668357 82667874(发行部)
印 刷:保定市中华美凯印刷有限公司
开 本:787mm×1092mm 1/16
印 张:23.75
字 数:446 千字
版 次:2016 年 1 月第 1 版
印 次:2016 年 1 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 978-7-5605-8161-3/O·524
定 价:56.80 元

图书如有印装质量问题,请联系调换 电话:(010) 51906740 版权所有 侵权必究

金榜图书联系电话:(010)51906740 金榜图书天猫店网址:<http://sdjlts.tmall.com/>
新浪微博:@金榜图书官方微博

金榜考研数学系列及使用说明

考研数学满分 150 分,数学在考研科目中的比重明显,同时又因数学学科本身的特点,考生的数学成绩历年来总是差别很大,因此有得数学者得考研之说。既然数学对考研成绩的意义如此重要,就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本书编写老师们根据多年的命题经验和阅卷经验总结,发现考研数学命题的灵活性非常大,反映在命题中,不仅仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同,更多的是表现在考查多个知识点的综合上,这些题目在表达上多一个字或多一句话,难度都会千差万别。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离,而构成这些难点的主要因素,实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时,从阅卷反映的问题来看,考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练所致。总结为一句话,那就是:要想数学拿高分,就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此,李永乐、王式安考研数学辅导团队结合多年来的考研辅导和研究,精心编写了本系列图书,目的就在于帮助考生有计划有步骤地完成数学复习,从基本概念、定理和公式的记忆,到对其的熟练运用,循序渐进。

一、本系列重点图书和复习建议

每年硕士研究生入学数学考试的时间一般都安排在上午,故建议考生们将数学的复习时间安排在每天早上 9:00~12:00。基础、强化阶段,每天至少应安排 2 小时来复习数学,对于数学基础较差的同学建议提早复习基础知识,每天再多花点时间来做做习题。

重点图书	复习建议
《考研数学复习全书》	重视基础积累,纵向学习,夯实知识点 由于全书的编写起点是学完大学数学课程,所以建议基础薄弱的同学,先花点时间整体的看看书中的理论知识,然后再看例题。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照规律来复习,经过必要的重复会起到事半功倍的效果。系统复习,打好基础,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。完成基础准备。另外按章节顺序完成相应的配套练习题,通过练习检验你是否真正地掌握了。
《数学基础过关 660 题》	在完成基础知识的学习后,有针对性的做一些练习。熟练掌握定理公式和解题技巧,加强知识点的前后联系,体系化,系统化;分清重难点,让复习周期尽量缩短。 虽说书中都是选择题和填空题,同学们不要轻视,也不要一开始就盲目做题。看到一道题,要能分辨出是哪个知识点,考什么,然后做题过程中看看自己是否掌握了,应用的定理、公式的条件是否熟悉。这样才是真正做一道题。
《数学历年真题权威解析》	通过真题,进一步提高解题能力和技巧,达到实际考试的要求 第一阶段,看看各年真题,熟悉题型和常考点。 第二阶段,进行专项复习。 书中将真题按考点进行分类。对重点题型和自己薄弱的内容进行突破,达到全面掌握,不留考点空白。 第三阶段,按年份,逐年练习。

重点图书	复习建议
《高等数学辅导讲义》	单科强化 武忠祥老师的高数教学讲稿改编而成,系统阐述了高等数学的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。
《线性代数辅导讲义》	单科强化 李永乐老师的代数教学讲稿改编而成,系统阐述了线性代数的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。
《概率论与数理统计辅导讲义》	单科强化 王式安老师的概率教学讲稿改编而成,系统阐述了概率论与数理统计的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。
《数学历年真题权威解析·试卷版》	考前真题真练,提高应考技巧 仿照真实试卷,独立试卷,答题卡,答题纸。模拟考场真实环境。按照考试的要求在规定时间内去做一套真题,调动所有知识储备,调整心态,快速进入考试状态。做过的真题,自己要整理,总结的自己的薄弱环节,针对性复习,加深记忆。
《李永乐数学决胜冲刺6+2》	冲刺模拟题 通过整套题的训练,进行总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时复习一下基本概念、公式、定理,准确记忆。

备注:以上内容仅供参考。各位同学可以根据自身的能力和学习习惯进行调整。

二、本书使用说明

本书完整收录了2005~2016年考研数学(三)的试题,还精选了其他年份或卷别的试题做为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。每道题给出的参考答案都有最常用最典型的解题方法。分析过程逻辑严谨,思路清晰,具有很强的可操作性,通过学习同学们可以独立完成同类题的解答。

同时还请教学经验丰富的老师对书中的经典题进行讲解,扫描在题目旁边的二维码即可观看。具体操作方式可见封二“本书二维码扫码使用说明”。

使用本书的同时,也可以配合使用本书作者编写的《基础过关660题》、《复习全书》等,提高复习效率。

从真题中你能够了解一个真实的考研数学,寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶,题目经典,又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律,全面提高解题能力,进而更好地驾驭考试,本书编写团队依据 15 年的命题与阅卷经验,并结合十多年的考研辅导和研究精华,精心编写了本书,真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题能力的作用。

历年来,研究生入学考试数学的知识点没有太大变化,并且考查的重难点也比较稳定,都是往年考试反复考查的内容,依据往年考题掌握了这些重难点,我们就等于成功了一半。练真题,反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题,如何与没有考过的知识点结合起来考查,进而复习没有考过的知识点,这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了。也因此,真题能够最有效地暴露我们的不足和复习误区,提供更有效的复习思路和策略,甚至可以说,真题就是最好的“辅导老师”,它告诉我们考试会考什么,怎么考,反过来又指导我们思考如何应对,也只有真题准确体现了考试所要求的能力、方法。

真题对大部分考生来说都是“陌生”的。真题命制科学,经过命题人的反复推敲,是市面上的练习题所无法比拟的。市面上的练习题难易适中、命制科学、贴近考试要求的很少。做真题,反复揣摩,能节省我们宝贵的复习时间,达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题,在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书共分三篇。第一篇给出最新的真题和解析,目的是让读者了解最新考题的结构形式和难易程度,方便复习备考;第二篇是历年的试题;第三篇将真题按考点所属内容分类并进行解析,各章编排如下:

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点,从而复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结此章的历年考试出题规律,分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各



位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误,给出相应的注意事项,对每一道真题都给出解题思路分析,以便考生真正地理解和掌握解题方法。

4. 练习题

数学复习离不开做题,只有适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者精心选取历年真题和其他卷别的试题作为练习题,供考生练习,以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,能够达到轻松解答真题的水平。同时,每道练习题都配备了详细的参考答案和解析,以便考生解答疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题,而是要多动脑,通过对题目的练习、比较、思考,总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中,时刻想到将各个方面的知识融会贯通,做好知识的串联和总结,以检验自己对问题的把握程度,真正掌握应试解题的金钥匙,从而迅速提高知识水平和应试能力,取得理想分数。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,如若遇到任何问题,即可在线留言,团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo.com,并关注清华李永乐考研数学辅导团队。



希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足之处,恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2016年1月



目录

第一篇 最新真题

2016 年全国硕士研究生入学统一考试	1
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案	5

第二篇 历年真题

2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题	14
2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题	18
2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题	22
2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题	25
2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题	28
2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题	31
2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题	34
2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题	37
2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题	40
2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题	43
2005 年全国硕士研究生入学统一考试试题	46

第三篇 真题解析

第一部分 微积分	49
第一章 函数 极限 连续	49
第二章 一元函数微分学	84
第三章 一元函数积分学	128
第四章 多元函数的微分学	162
第五章 二重积分	181
第六章 无穷级数	200



第七章	常微分方程与差分方程	217
第二部分	线性代数	225
第一章	行列式	225
第二章	矩阵	234
第三章	向量	251
第四章	线性方程组	264
第五章	特征值与特征向量	284
第六章	二次型	300
第三部分	概率论与数理统计	312
第一章	随机事件和概率	312
第二章	随机变量及其分布	317
第三章	多维随机变量的分布	322
第四章	随机变量的数字特征	339
第五章	大数定律和中心极限定理	355
第六章	数理统计的基本概念	357
第七章	参数估计	362

最新真题

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 (三)

(科目代码:303)

考生注意事项

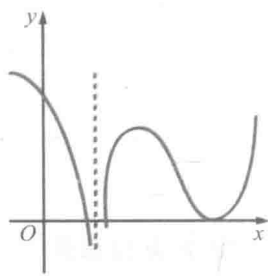
1. 答题前,考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号;在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号,并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上,非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填(书)写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写,字迹工整,笔迹清楚;涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束,将答案卡和试题册按规定交回。

[illegible]

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则

- (A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.
 (B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.
 (C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.
 (D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.



(2) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则

- (A) $f'_x - f'_y = 0$. (B) $f'_x + f'_y = 0$.
 (C) $f'_x - f'_y = f$. (D) $f'_x + f'_y = f$.

(3) 设 $J_i = \iint_{D_i} \sqrt{x-y} dx dy (i = 1, 2, 3)$, 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

- $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, $D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$, 则
 (A) $J_1 < J_2 < J_3$. (B) $J_3 < J_1 < J_2$.
 (C) $J_2 < J_3 < J_1$. (D) $J_2 < J_1 < J_3$.

(4) 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k) (k \text{ 为常数})$

- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
 (C) 发散. (D) 收敛性与 k 有关.

(5) 设 A, B 是可逆矩阵,且 A 与 B 相似,则下列结论错误的是

- (A) A^T 与 B^T 相似. (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.
 (C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似. (D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则

- (A) $a > 1$. (B) $a < -2$.
 (C) $-2 < a < 1$. (D) $a = 1$ 或 $a = -2$.

(7) 设 A, B 为两个随机事件,且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 如果 $P(A|B) = 1$, 则

- (A) $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$. (B) $P(A|\bar{B}) = 0$.
 (C) $P(A \cup B) = 1$. (D) $P(B|A) = 1$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X \sim N(1, 2), Y \sim N(1, 4)$, 则 $D(XY) =$

- (A) 6. (B) 8. (C) 14. (D) 15.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____.

(10) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2\sin \frac{2}{n} + \cdots + n\sin \frac{n}{n} \right) =$ _____.

(11) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $\left. \frac{dz}{dy} \right|_{(0,1)} =$ _____.

(12) 设 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$ 则 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy =$ _____.

(13) 行列式
$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(14) 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到时停止, 则取球次数恰好为 4 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x}}.$

(16) (本题满分 10 分)

设某商品最大需求量为 1200 件, 该商品的需求函数 $Q = Q(p)$, 需求弹性 $\eta = \frac{p}{120 - p} (\eta > 0)$, p 为单价 (万元).

(I) 求需求函数的表达式;

(II) 求 $p = 100$ 万元时的边际收益, 并说明其经济意义.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x (x-t) f(t) dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$.

(19) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{bmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解,

(I) 求 a 的值;

(II) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令 $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 请问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \text{其中 } \theta \in (0, +\infty) \text{ 为未知参数,}$$

X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(I) 求 T 的概率密度;

(II) 确定 a , 使得 $E(aT) = \theta$.

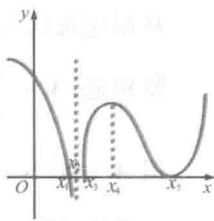
2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(三) 参考答案

一、选择题

(1)【答案】 B.

【解析】 x_1, x_3, x_5 为驻点,而在 x_1 和 x_3 两侧 $f'(x)$ 变号,则为极值点,在 x_5 两侧 $f'(x)$ 不变号,则不是极值点,在 x_2 处一阶导数不存在,但在 x_2 两侧 $f'(x)$ 不变号,则不是极值点,在 x_2 处二阶导数不存在,在 x_4 和 x_5 处二阶导数为零,在这三个点两侧一阶导函数增减性发生变化,则都为拐点,故应选(B).



(2)【答案】 D.

【解析】 直接计算,与选择支比较.

$$f'_x = \frac{e^x(x-y) - e^x}{(x-y)^2}, f'_y = \frac{e^x}{(x-y)^2},$$

$$\text{因而 } f'_x + f'_y = \frac{e^x}{x-y} = f.$$

选(D).

(3)【答案】 B.

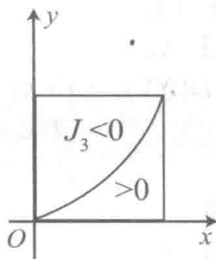
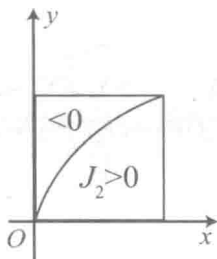
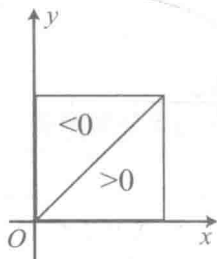
【解析】 直接计算,与选择支比较.

 D_1 关于直线 $y = x$ 对称,

$$J_1 = \frac{1}{2} \iint_{D_1} (\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y-x}) dx dy = 0,$$

 D_1 被直线 $y = x$ 对分成的两个积分区域记为 D_+ 及 D_- , 则

$$\iint_{D_+} \sqrt[3]{x-y} dx dy = - \iint_{D_-} \sqrt[3]{x-y} dx dy, \iint_{D_+} \sqrt[3]{x-y} dx dy < 0, \iint_{D_-} \sqrt[3]{x-y} dx dy > 0,$$

在 D_+ 上 $\sqrt[3]{x-y} < 0$, 有 $J_2 > 0$. 在 D_- 上 $\sqrt[3]{x-y} > 0$, 有 $J_3 < 0$.因而 $J_3 < J_1 < J_2$. 选(B).

(4)【答案】 A.

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } \left| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k) \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

因而级数绝对收敛,选(A).

(5)【答案】 C.

【解析】 由已知条件,存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$.

那么 $B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P_1^{-1} A^T P_1$, 其中 $P_1 = (P^T)^{-1}$

即 A^T 与 B^T 相似, (A) 正确.

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

即 A^{-1} 和 B^{-1} 相似, (B) 正确.

$$\text{又 } P^{-1}(A + A^{-1})P = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = A^{-1} + B^{-1}.$$

即 $A + A^{-1}$ 和 $B + B^{-1}$ 相似, (D) 正确.

从而应选 (C).

特别地, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似.

但 $A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 和 $B + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 不相似.

(6)【答案】 C.

【解析】 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a - 2)(\lambda - a + 1)^2$$

矩阵 A 的特征值: $a + 2, a - 1, a - 1$

由 $p = 1, q = 2$

$$\begin{cases} a + 2 > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases} \quad \therefore -2 < a < 1.$$

(7)【答案】 A.

【解析】 $P(A|B) = 1$, 则 $P(\bar{A}|B) = 0$, 也就有 $P(\bar{A}B) = 0, P(B|\bar{A}) = 0$ 得 $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$.

(8)【答案】 C.

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } D(XY) &= E(XY)^2 - (EXY)^2 = EX^2EY^2 - (EXEY)^2 \\ &= [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - 1^2 \\ &= (2 + 1^2)(4 + 1^2) - 1 = 14. \end{aligned}$$

二、填空题

(9)【答案】 6.

$$\text{【解析】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6$.

(10)【答案】 $\sin 1 - \cos 1$

$$\text{【解析】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2\sin \frac{2}{n} + \cdots + n\sin \frac{n}{n} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sin \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} \sin \frac{n}{n} \right] \\
 &= \int_0^1 x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos x dx = \sin 1 - \cos 1
 \end{aligned}$$

(11)【答案】 $-dx + 2dy$.

【解析】 方法一: 易得 $x=0, y=1$ 时, $z=1$.

方程两边求全微分

$$zdx + (x+1)dz - 2ydy = 2xf dx + x^2[f'_1 \cdot (dx - dz) + f'_2 dy],$$

把 $x=0, y=1, z=1$ 代入上式

$$\text{有} \quad dz \Big|_{(0,1)} = -dx + 2dy.$$

方法二: 易得 $x=0, y=1$ 时, $z=1$.

方程两边分别对 x, y 求偏导数

$$z + (x+1) \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf + x^2 f'_1 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$(x+1) \frac{\partial z}{\partial y} - 2y = x^2 \left[f'_1 \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + f'_2\right],$$

把 $x=0, y=1, z=1$ 代入上两式

$$\text{有} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = 2,$$

$$\text{所以} \quad dz \Big|_{(0,1)} = -dx + 2dy.$$

【评注】 本题还可令 $F(x, y) = (x+1)z - y^2 - x^2 f(x-z, y)$, 利用公式法求出 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$(12) \text{【答案】 } \frac{1}{3}(1 - 2e^{-1}).$$

【解析】 利用二重积分的对称性

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy &= 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 e^{-y^2} dx dy = 2 \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y x^2 dx = \frac{2}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy \\
 &= -\frac{1}{3} \int_0^1 y^2 de^{-y^2} = -\frac{1}{3} \left(y^2 e^{-y^2} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 y e^{-y^2} dy \right) \\
 &= -\frac{1}{3} (e^{-1} + e^{-y^2} \Big|_0^1) = \frac{1}{3} (1 - 2e^{-1}).
 \end{aligned}$$

【评注】 本题若用先 y 后 x 的积分次序则无法计算.

$$(13) \text{【答案】 } \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

【解析】 按第 1 列展开

$$\begin{aligned}
 D &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\
 &= \lambda \left(\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \right) + 4 \\
 &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4
 \end{aligned}$$

或用逐行相加

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^3 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda^3 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} & \lambda & & -1 & 0 & 0 \\ & \lambda^2 & & 0 & -1 & 0 \\ & \lambda^3 & & 0 & 0 & -1 \\ 4+3\lambda+2\lambda^2+(\lambda+1)\lambda^3 & 0 & 0 & 0 & & \end{vmatrix} \\
 = (\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4) \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 = \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

(14)【答案】 $\frac{2}{9}$.

【解析】 本题为古典概型,用概率公式 $P(A) = \frac{m}{n}$.

n 计算:恰好取 4 次停止,每次取球有 3 种不同颜色,又是有放回的,所以总的情况 $n = 3^4$.

m 计算:先考虑第 4 次的颜色,这颜色一定与前 3 次的不同.前 3 次必定已有且仅有 2 种不同颜色,这样第 4 次抽到第 3 色才凑够 3 种颜色,总之第 4 次有 3 种可能,前 3 次由其余 2 种颜色构成,其总数为每次有 2 种可能,3 次有 $2^3 = 8$ 种可能,扣除 3 次同一色共 2 种,所以前 3 次由 2 种不同颜色构成共有 $8 - 2 = 6$ 种可能,所以 $m = 3 \cdot 6 = 18$.

$$P(A) = \frac{18}{3^4} = \frac{2}{9}.$$

三、解答题

$$(15)【解】 \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos 2x - 1 + 2x \sin x)]^{\frac{1}{x^4}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1 + 2x \sin x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[-\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) \right] + 2x \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right]}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

原式 $= e^{\frac{1}{3}}$

$$(16)【解】 (I) \text{ 由弹性公式 } \eta = \left| \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} \right| \text{ 得}$$

$$\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = \frac{-p}{120-p}$$

$$-\frac{dQ}{Q} = \frac{dp}{120-p}$$

$$Q = C(p-120)$$

$Q(0) = 1200$ 得 $C = -10$.

需求函数为 $Q(p) = -10(p-120) = 10(120-p)$

(II) 收益函数为 $R = Qp = (1200-10p)p$

边际效益函数为 $\frac{dR}{dQ} = \frac{dR}{dp} \frac{dp}{dQ} = (1200-20p)(-10) = 200p-12000$