中考·会考·高考指导与测试

中学生

三考丛书

高中数学

傅伯华　程丽明　编

华东师范大学出版社

中学生中考·会考·高考指导与测试

三 考 丛 书

高 中 数 学

傅伯华 程丽明 编

华东师范大学出版社

(沪)新登字 201 号

中学生中考·会考·高考指导与测试

高 中 数 学

傅伯华 程丽明 编

华东师范大学出版社出版发行
(上海中山北路 3663 号)
新华书店上海发行所经销 华东师范大学印刷厂印刷
开本:787×1092 1/32 印张:12.5 字数:275 千字
1992 年 9 月第一版 1992 年 9 月第一次印刷
印数:1—40,000 本

ISBN 7—5617—0935—8/G·402 定价:4.75 元

前　　言

国家教委于1989年制订了《关于试行普通高中毕业会考制度的意见》和《关于改革普通高等学校招生考试及录取新生办法的意见》，提出在普通高中省级会考的基础上，改革普通高校招生考试科目设置及录取新生的办法，把高校招生和高中会考衔接起来。普通初中属于义务教育阶段，各地都在贯彻义务教育法，努力办好初中，提高全民族的素质。由于初中是高中的基础，相互之间有着密切的联系，不少地区为了提高初中的教学质量和办学水平，也在试行地方性初中会考和改革高中招生考试办法。上海在全国首先开创了高中会考的新路子，并在会考的基础上，改革高考制度。这些改革受到了国家教委和兄弟省市的肯定。与此同时，相应地改革中考的办法，把初中毕业考试和高中招生考试合并，减轻了学生的负担；有的学科如历史和地理，也组织全市性的会考。这些改革措施受到广大师生的欢迎，得到社会各界广泛的关注和支持。

高中会考是国家认可的省级水平考试。初中会考是地区性的水平考试。高考和中考都是选拔考试。我们把高中和初中学生的会考、初中毕业生参加的中考和高中毕业生参加的高考统称为“三考”。在普通中学里，如何对待和迎接“三考”，不仅是全体中学师生，而且也是广大学生家长十分关心的事情。为了正确地指导中学生参加“三考”，帮助教师对学生学习水平进行有效的测试和评估，我们约请了以华东师大二附中和上海

市普陀区教育学院为主的有丰富教学和研究经验的特级教师、高级教师和一级教师，根据他们多年指导“三考”的成功经验，编写了这套“三考”丛书。

“三考”丛书是根据国家教委颁发的全日制中学各科教学大纲和现行教材编写的，分十个学科，共16册。每册都分两大部分：第一部分是单元复习指导和测试。它按学科知识分成若干单元，每单元都有知识要点、学习方法或例题分析，并配有相应的测试题，以测定学生经过单元复习之后应达到的学业水平。第二部分是综合测试。这一部分是在学生复习各单元知识的基础上，进一步培养学生的基本技能的综合应用能力和应试技巧。编了若干套综合测试题，除供一般综合测试外，还可对学生进行查缺补漏，突出重点，使“三考”复习更有针对性。实践证明：通过多次综合测试和教师的重点讲评，学生不仅对“三考”充满信心，而且确实都能够比较全面地、比较扎实地掌握教学大纲所要求达到的知识和技能。

总之，“三考”丛书既是提高教师业务水平、帮助教师适应考试制度改革、指导学生温课迎考的辅助教材，又是广大中学生参加“三考”前进行自我测评的有效手段。同时，对广大社会青年自学中学课程也是一本很有实用价值的学习参考书。

“三考”丛书，成功的伙伴！

“三考”丛书编辑委员会

1992年6月

编者的话

《三考丛书》中的“高中数学”分册，内容紧扣大纲，源于课本而高于课本，以测试训练与综合检测为基本形式；联系实际，注重实用，讲究实效。力求做到：(1)由浅入深，抓牢关键，全面覆盖基本知识；(2)前后联系，突出系统性，重视理清概念的来龙去脉；(3)总结方法，开拓思路，激活思维，加强综合训练；(4)串线结网，纵横沟通，注意培养数学素质和培养灵活应用的能力。

本书分“复习指导”和“解题训练”两部分。复习指导部分每章内容大致从三个栏目展开：“复习导引”(简称导引) 着重理清概念，揭示基本知识的内在联系和关键所在；“题解指津”着力分析典型例题，总结数学思想和数学方法；“测试训练”着眼于解题技巧，多样的题型，丰富的内容和适度的题量，训练运算能力，测试达标程度。其中A卷侧重“三基”的一般要求，B卷侧重较高要求并注重能力考查。

解题训练部分以“会考”和“高考”为基本栏目，分别依据各省、市现有的会考纲要和全国普通高校招生统一考试说明中的规定，编写综合试题。会考检测题着眼于基础知识、基本技能的考查；高考模拟题在考查基础知识的同时，逐步加强了能力的考查，着重揭示知识点的内在联系和综合应用。书后附有参考答案或提示。

本书由华东师大二附中高级教师傅伯华、普陀区教育学院高级教师程丽明编写。由于编写时间仓促和水平有限，错误和缺点在所难免，望读者批评指正。

编　　者

1992年7月

目　录

第一部分　单元复习指导和测试

I 代数

§1.1 实数与复数

【导引】

(一) 数系表

$$
\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\end{array}\right\}\text{循环小数(包括整数、有限小数)}\\ \text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}\\ \text{虚数}\end{cases}
$$

(二) 实数的运算

在实数范围内可以施行加、减、乘、除、乘方等运算，非负实数的n次方根和负数的奇次方根有意义，负数的偶次方根没有意义.

实数的加法、乘法满足交换律，结合律，乘法对加法满足分配律. 即对实数a、b、c，有

$$a+b=b+a;$$

$$a\cdot b=b\cdot a;$$

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c);$$

$$a(b+c)=ab+ac.$$

实数的绝对值

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0); \\ 0 & (a=0); \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

$|a|$的几何意义表示实数a在数轴上所对应的点到原点的距离.

(三) 复数

1. 虚数单位 规定$i^2=-1$, 数i叫做虚数单位. 它与实数进行四则运算时, 原有的加、乘运算律仍然成立.

i的整数指数幂具有下面的性质:

$$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i.\quad (n\in \mathbf{Z})$$

2. 复数的表示 复数z通常用三种形式表示, 即

代数形式: $z=a+bi$, 其中a、b均为实数. a叫做复数z的实部, 记作$R(z)=a$; b叫做复数z的虚部, 记作$I(z)=b$.

三角形式: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 这里$r=\sqrt{a^2+b^2}>0$, $\cos\theta=\dfrac{a}{r}$, $\sin\theta=\dfrac{b}{r}$. r叫做复数z的模, θ为z的辐角.

向量形式: 在复平面内, 复数$z=a+bi$可以用位置向量来表示. 即以坐标原点为起点、点$Z(a,b)$为终点的向量$\overrightarrow{OZ}$表示复数$a+bi$, 其中向量$\overrightarrow{OZ}$的模(即有向线段OZ的长度r)叫做复数$z=a+bi$的模(或绝对值), 记作$|z|$, 显然

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

向量$\overrightarrow{OZ}$的辐角θ叫做复数$z=a+bi$的辐角. 适合于$0\leqslant\theta<2\pi$的辐角θ的值叫做辐角的主值, 通常记作$\arg z$.

3. 复数集、实数集、虚数集的相互关系

$\{复数\}=\{实数\}\cup\{虚数\}$;

$\{实数\}\cap\{虚数\}=\varnothing$;

$\{虚数\}\supset\{纯虚数\}$.

(四) 复数的运算

1. 加、减法 $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$.

几何意义:复数的和与差在复平面上表示为向量的和与差. 符合平行四边形法则. 设 z_1、z_2 在复平面上对应点 Z_1、Z_2, 则 $|z_2-z_1|$ 即是点 Z_1、Z_2 之间的距离.

2. 乘、除法 $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ 或 $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$;

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\quad(c+di\neq 0)$$

或

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].\ (r_2\neq 0)$$

3. 乘方 $(a+bi)^n=(a^n-C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^4a^{n-4}b^4-\cdots)+(C_n^1a^{n-1}b-C_n^3a^{n-3}b^3+C_n^5a^{n-5}b^5-\cdots)i$,

或 $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$. $(n\in\mathrm{N})$

上式称为棣莫佛定理.

4. 开方 复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 个 n 次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right),$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$.

几何意义:复数 z 的 n 次方根对应复平面内 n 个点,这些点均匀地分布在以原点为圆心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆上.

5. 复数及其共轭复数的模的运算性质

(1) $$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|;$$

(2) $$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq 0);$$

(3) 设 $z=a+bi$, 则

$$z+\bar{z}=2a,\quad z\cdot\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2;$$

(4) $$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq 0).$$

【题解指津】

例 1 下列各数中, 哪些是有理数? 哪些是无理数?

(1) $\lg\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$;

(2) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\dfrac{5\pi}{12}$; (3) $\lg\operatorname{tg}(-840°)$;

(4) $5.3\dot{1}0\dot{6}$; (5) $10^{2\lg\sqrt{\lg 5}}$.

解 将上述各数化简:

(1) 原式 $=\lg\left[\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{2}\lg\left[3+\sqrt{5}+2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}+3-\sqrt{5}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\lg 10=\dfrac{1}{2}$;

(2) 原式 $=(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$=(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=1;$$

(3) 原式 $= \lg \operatorname{tg} 240^\circ = \lg \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1}{2}\lg 3$;

(4) 原式 $= 5\frac{3106-3}{9990} = 5\frac{3103}{9990}$;

(5) 原式 $= 10^{\lg \lg 5} = \lg 5 = 1 - \lg 2$.

根据有理数和无理数的意义, 可知(1)、(2)、(4)是有理数, 而(3)、(5)是无理数.

例2 计算:

(1) $1 + 2i + 3i^2 + \cdots + (4n+1)i^{4n}$;

(2) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1992} + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{1992}$.

解 (1) 设 $S = 1 + 2i + 3i^2 + \cdots + (4n+1)i^{4n}$, ①

等式两边都乘以 i, 得

$$iS = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 4ni^{4n} + (4n+1)i^{(4n+1)}. \quad ②$$

① − ②, 得

$$(1-i)S = 1 - (4n+1)i^{4n+1} + (i + i^2 + \cdots + i^{4n}).$$

$\because i + i^2 + \cdots + i^{4n} = 0$,

$\therefore (1-i)S = 1 - (4n+1)i^{4n+1} = 1 - (4n+1)i$.

$$\therefore S = \frac{1-(4n+1)i}{1-i} = 2n + 1 - 2ni.$$

(2) 原式 $= \dfrac{\left(i\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1992}}{i^{1992}} + \dfrac{\left[(-i)\cdot\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right]^{1992}}{(-i)^{1992}}$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1992}}{i^{1992}} + \frac{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1992}}{(-i)^{1992}}$$

$$=\omega^{1992}+\frac{(\omega^2)^{1992}}{(-i)^{1992}}$$

$$=\omega^{1992}+\omega^{3984}=1+1=2.$$

说明 在复数计算中应用i和ω的性质，可以使得题解过程变得十分简捷. 这里的ω、ω^2和1是1的三次原根，

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

例3 已知$x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$，求证$x^m+\dfrac{1}{x^m}=2\cos m\theta$.

证明 $\because x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$，$\therefore x^2-2\cos\theta\cdot x+1=0$.

解之得 $$x=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{-(4\cos^2\theta-4)}\,i}{2}$$

$$=\cos\theta\pm i\sin\theta.$$

$$\therefore x^m+\frac{1}{x^m}=(\cos\theta\pm i\sin\theta)^m+(\cos\theta\pm i\sin\theta)^{-m}$$

$$=(\cos m\theta\pm i\sin m\theta)$$

$$+[\cos(-m\theta)\pm i\sin(-m\theta)]$$

$$=2\cos m\theta.$$

例4 已知复数z_1、z_2、z_3，有$|z_1|=1$，$|z_2|=k$，$|z_3|=2-k$，$\arg z_1=\alpha$，$\arg z_2=\beta$，$\arg z_3=\gamma$，且$z_1+z_2+z_3=0$，问k为何值时，$\cos(\beta-\gamma)$分别取得最大值和最小值，并求出最大值和最小值.

解 设$z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$z_2=k(\cos\beta+i\sin\beta)$，

$z_3=(2-k)(\cos\gamma+i\sin\gamma)$，

由$z_1+z_2+z_3=0$，得

$$\begin{cases}\cos\alpha+k\cos\beta+(2-k)\cos\gamma=0,\\ \sin\alpha+k\sin\beta+(2-k)\sin\gamma=0,\end{cases}$$

变形得

$$\begin{cases}\cos^2\alpha=k^2\cos^2\beta+2k(2-k)\cos\beta\cos\gamma+(2-k)^2\cos^2\gamma,\\ \sin^2\alpha=k^2\sin^2\beta+2k(2-k)\sin\beta\sin\gamma+(2-k)^2\sin^2\gamma\end{cases}$$

相加得 $k^2+(2-k)^2+2k(2-k)\cos(\beta-\gamma)=1.$

$$\therefore \cos(\beta-\gamma)=\frac{k^2+(2-k)^2-1}{2k(k-2)}=1+\frac{3}{2(k-1)^2-2}.$$

$$\because -1\leqslant\cos(\beta-\gamma)\leqslant 1,$$

$$\therefore -2\leqslant\frac{3}{2(k-1)^2-2}\leqslant 0.\quad \therefore \frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{3}{2}.$$

故 $\cos(\beta-\gamma)$ 的最大值 $=-\frac{1}{2}$, 此时 $k=1$.

而当 $k=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ 时, $\cos(\beta-\gamma)$ 的最小值为 -1.

例5 证明 lg 2 不是有理数.

证 设 lg 2 是整数, 那么 2 就应当是 10 的整数次幂, 但不可能. 所以 lg 2 不是整数.

又设 lg 2 是分数, 令 $\lg 2=\frac{m}{n}$, (m、n 为正整数且互质, $n>1$)

$$\therefore 2=10^{\frac{m}{n}}\Longrightarrow 2^n=10^m.$$

而 10^m 是 1 后面有 n 个 0 的整数, 2^n 不可能是这样的数, 矛盾. 所以, lg 2 不是有理数.

【测试训练】*

A 卷

一、判别题: (每小题 4 分, 共 20 分)

---

*测试训练 A 卷、B 卷均为 60 分钟完卷, 满分 100 分.

下列各题，你认为正确的，在题后的圆括号内填“+”，否则填“−”.

1. 无限小数都是无理数. (　　)

2. 零除以任何数都得零. (　　)

3. 任何实数的绝对值都是正数. (　　)

4. 一个数的绝对值大于1，那么这个数一定大于它的倒数. (　　)

5. 两数和的绝对值一定小于或等于两数绝对值之和. (　　)

6. 任何数的平方数不会是负数. (　　)

7. $(\sqrt{x^2}-x)$一定是非负数. (　　)

8. 如果一个实数等于它的倒数，该实数必是1. (　　)

9. 两个无理数的和、差、积、商一定是无理数. (　　)

10. 两个复数的和、差、积、商一定是复数. (　　)

二、计算：(每小题5分，共40分)

1. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0\right]^{-0.5}-0.75\left(\sqrt[4]{4}\right)^{-2}-(-2)^{-4}\cdot(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}$.

2. $2^{2^3}-3^{2^2}$.

3. $(0.008)^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}-\lg\sqrt{10}+(\sqrt{5}-1)^0\cdot\sqrt{\log_5^5 5}$.

4. $\lg 5\times\lg 8000+\left(\lg 2^{\sqrt{3}}\right)^2+\lg 0.1\dot{6}+\lg 0.06$.

5. $\sqrt{(\log_{\frac{1}{2}}8-4)^2}+\sqrt{18}-\frac{3}{\sqrt{2}}-(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}\cdot\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}-0.0016^{-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^{-1}-3\left|\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}\right|$.