

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

spare® 星火·燎原

数学分析

辅导及习题精解

(华东师大·第四版 下册)

张天德 孙书荣 主编

联系考研, 渗透精讲历年考研真题

典型例题
分析

+

教材习题
答案

+

同步自测
练习

延边大学出版社

数学分析

辅导及习题精解

(华东师大·第四版 下册)

主 编 张天德 孙书荣

副主编 杨殿武 孙钦福

图书在版编目(CIP)数据

数学分析辅导及习题精解. 下册 / 张天德, 孙书荣
编著. — 延吉: 延边大学出版社, 2011. 7
配华师大四版
ISBN 978-7-5634-4144-0

I. ①数… II. ①张… ②孙… III. ①数学分析—高等学校—教学参考资料 IV. ①017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 080131 号

数学分析辅导及习题精解(下册)

主编:张天德 孙书荣

责任编辑:何 方

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路 977 号

邮编:133002

网址:<http://www.ydcbs.com>

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2732435

传真:0433-2732434

印刷:莱州市电光印刷有限公司

开本:880×1230 1/32

印张:13 字数:320 千字

版次:2011 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5634-4144-0

定价:19.80 元

前 言

《数学分析》是数学专业最重要的一门基础课,也是报考数学类专业硕士研究生的专业考试科目。华东师范大学数学系主编的《数学分析》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材,被全国许多院校采用,也是许多学校硕士研究生入学考试的指定教材。华东师范大学数学系主编的《数学分析》(第四版)保持了其一贯的体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点,并根据近代数学发展的潮流,做了相应的调整。该教材保持了原来的优点、特色,进一步强调提高学生的综合素质并激发学生的创新能力。为帮助、指导广大读者学好这门课程,我们编写了这本与华东师范大学数学系主编的《数学分析》(第四版)配套的《数学分析辅导及习题精解》,以帮助加深对基本概念的理解,加强对基本解题方法与技巧的掌握,进而提高学习能力和数学思维水平。

本书共分二十三章,其中上册十一章,下册十二章。章节的划分与教材一致。每章包括五大部分内容:

一、知识结构及内容小结:先用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系,以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容;然后用表格形式简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统的梳理,并指出理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

二、经典例题解析:精选部分反映各章基本知识点和基本方法的典型例题——其中部分例题选自历年考研真题,给出了详细解答,以提高读者的综合解题能力。

三、历年考研真题评析:节选全国众多知名高校的研究生入学考试真题,做了深入细致的解答。

四、教材习题全解:对教材里该章节全部习题作详细解答,与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中,对部分有代表性的习题,设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法;安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维能力。

五、同步自测题及参考答案:精选有代表性、测试价值高的题目(有些题目选自历年考研真题),以检测学习效果,提高应试水平。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到,充分体现了如下三大特色。

一、知识梳理清晰、简洁:直观、形象的图表总结,精炼、准确的考点提炼,权威、独到的方法归纳,将教材内容抽丝剥茧、层层展开,呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构,便于读者快速复习、高效掌握,形成稳固、扎实的知识网,为提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续:所有重点、难点、考点,统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,举出丰富的精选例题、考研例题,举一反三、深入讲解,真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、浑然一体,一举完成。

三、联系考研密切、实用:本书既是一本教材同步辅导,也是一本考研复习用书,书中处处联系考研:例题中有考研试题,同步自测中也有考研试题,更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等,为的就是让同学们同步完成考研备考,达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长,参考了多本同类书籍,吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限,书中疏漏与不妥之处,在所难免,敬请广大读者提出宝贵意见,以便再版时更正、改进。

编者

目 录

第十二章 数项级数	(1)
本章知识结构及内容小结	(1)
经典例题解析	(4)
历年考研真题评析	(8)
本章教材习题全解	(9)
同步自测题及参考答案	(32)
第十三章 函数列与函数项级数	(35)
本章知识结构及内容小结	(35)
经典例题解析	(39)
历年考研真题评析	(42)
本章教材习题全解	(44)
同步自测题及参考答案	(63)
第十四章 幂级数	(65)
本章知识结构及内容小结	(65)
经典例题解析	(68)
历年考研真题评析	(71)
本章教材习题全解	(72)
同步自测题及参考答案	(90)
第十五章 傅里叶级数	(93)
本章知识结构及内容小结	(93)
经典例题解析	(95)
历年考研真题评析	(98)
本章教材习题全解	(100)
同步自测题及参考答案	(128)
第十六章 多元函数的极限与连续	(132)
本章知识结构及内容小结	(132)
经典例题解析	(135)
历年考研真题评析	(139)
本章教材习题全解	(140)
同步自测题及参考答案	(166)
第十七章 多元函数微分学	(169)
本章知识结构及内容小结	(169)
经典例题解析	(172)

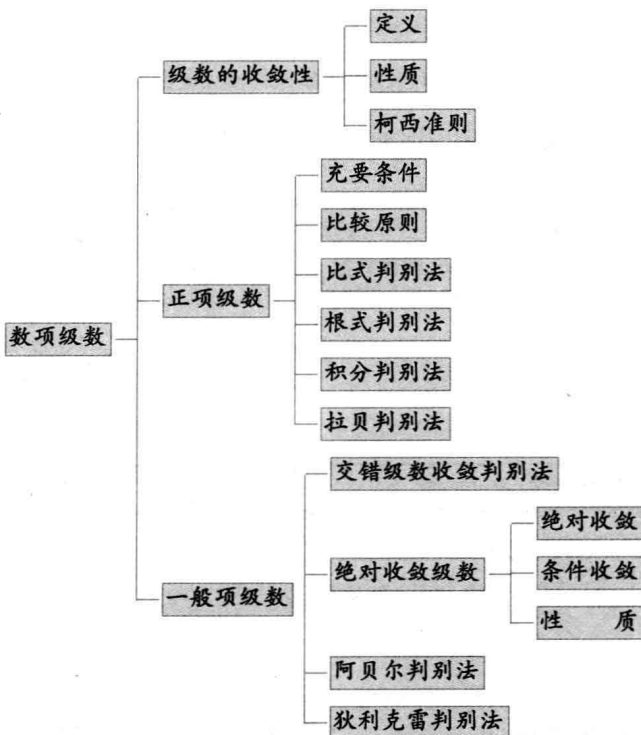
目 录

历年考研真题评析	(180)
本章教材习题全解	(182)
同步自测题及参考答案	(211)
第十八章 隐函数定理及其应用	(214)
本章知识结构及内容小结	(214)
经典例题解析	(216)
历年考研真题评析	(222)
本章教材习题全解	(224)
同步自测题及参考答案	(250)
第十九章 含参量积分	(254)
本章知识结构及内容小结	(254)
经典例题解析	(257)
历年考研真题评析	(260)
本章教材习题全解	(262)
同步自测题及参考答案	(278)
第二十章 曲线积分	(281)
本章知识结构及内容小结	(281)
经典例题解析	(284)
历年考研真题评析	(288)
本章教材习题全解	(289)
同步自测题及参考答案	(299)
第二十一章 重积分	(302)
本章知识结构及内容小结	(302)
经典例题解析	(306)
历年考研真题评析	(312)
本章教材习题全解	(314)
同步自测题及参考答案	(350)
第二十二章 曲面积分	(354)
本章知识结构及内容小结	(354)
经典例题解析	(357)
历年考研真题评析	(362)
本章教材习题全解	(365)
同步自测题及参考答案	(381)
第二十三章 向量函数微分学	(383)
本章知识结构及内容小结	(383)
经典例题解析	(384)
本章教材习题全解	(386)
同步自测题及参考答案	(405)

第十二章 数项级数

本章知识结构及内容小结

【本章知识结构】



【知识要点与考点】

1. 数项级数的基本概念

名称	定义	说明
定义	给定一个数列 $\{u_n\}$, 把它的各项依次用“+”号连接起来的表达式: $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 称为数项级数或无穷级数(简称级数), 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$	1° 研究级数的首要问题, 是判断级数的敛散性. 级数敛散性定义是研究级数的基础.
部分和	级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项之和, 记为 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, 称为级数的前 n 项部分和, 简称部分和.	2° 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则对任意的常数 a 与 b , 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ 也收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n + b \sum_{n=1}^{\infty} v_n$
收敛与发散	若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称级数收敛, 并称 S 为该级数的和, 记为 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 称 $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为该级数的余项和. 否则, 称该级数发散.	3° 去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性.
绝对收敛	若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n $ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.	4° 在收敛级数的项中任意加括号, 不改变级数的收敛性, 也不改变它的和.
条件收敛	若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n $ 发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.	

2. 一般项级数敛散性判别法

名称	定义	说明
柯西准则	级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $m > N$ 时, \forall 自然数 p , 都有 $ u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p} < \varepsilon$.	
级数收敛的必要条件	若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.	常用其判别级数发散.
绝对收敛性	若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n $ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛.	

名称	定义	说明
阿贝尔判别法	若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 一定收敛.	阿贝尔判别法实质上是狄利克雷判别法的特例.
狄利克雷判别法	若 $\{a_n\}$ 为单调递减且趋于零, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 一定收敛.	

3. 正项级数敛散性判别法

名称	内容
充要条件	正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有界.
比较判别法	设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且 $u_n \leq v_n$. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.
比式判别法	若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, 则当 $q < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 当 $q > 1$ 或 $q = +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.
根式判别法	若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, 则当 $l < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 当 $l > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.
积分判别法	设 $f(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 上非负递减函数, 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同时收敛或同时发散.
拉贝判别法	设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = r$, 则当 $r > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 当 $r < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

4. 交错级数的莱布尼茨判别法

名称	内容
莱布尼茨判别法	设 $u_n > 0$, 且 $\{u_n\}$ 单调递减趋于零, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 收敛.

5. 重点、难点与考点

重点	正项级数敛散性判别
难点	任意项级数敛散性判别
难点	综合运用级数的概念、性质和有关判别方法, 判断级数的敛散性

经典例题解析

基本题型 I: 用定义判断级数敛散性并求和

例 1 (华中科技大学) 设 $x_0 = 0, x_n = \sum_{k=1}^n a_k (n \geq 1), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_n + x_{n-1})$ 的和.

【思路探索】 按常规思路求 S_n , 会涉及通项 $u_n = a_n (x_n + x_{n-1})$ 拆项, 由条件 $x_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 明显可得 $a_n = x_n - x_{n-1}$.

解: 因为 $x_0 = 0, x_n = \sum_{k=1}^n a_k (n \geq 1)$, 所以 $a_n = x_n - x_{n-1}$.

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_n + x_{n-1})$ 的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= a_1(x_1 + x_0) + a_2(x_2 + x_1) + \cdots + a_n(x_n + x_{n-1}) \\ &= (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) + (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1}) \\ &= x_1^2 - x_0^2 + x_2^2 - x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n-1}^2 \\ &= x_n^2 - x_0^2, \end{aligned}$$

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = b^2 - x_0^2 = b^2$.

【方法点击】 凡是要求级数和的问题, 都可采用定义的方法, 只需说明部分和数列 S_n 有极限, 并求出即可. 一般采用“拆项法”, 求出 S_n 的极限. 定义法常用于求级数的和.

例 2 (重庆大学、浙江师范大学) 设 $0 < a < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n)$.

【思路探索】 若按常规思路求 S_n , 会涉及通项 $u_n = na^n$ 拆项问题. 直接拆项不容易找到解题思路. 考虑到奇数项与偶数项特点, 不妨先令 $S_n = a + 2a^2 + \cdots + na^n$, 而 $aS_n = a^2 + 2a^3 + \cdots + na^{n+1}$, 两式相减可得 $(1-a)S_n = a + a^2 + \cdots + a^n - na^{n+1}$, 于是 $S_n = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \frac{na^{n+1}}{1-a}$. 这样就可以求极限了.

$$\begin{aligned} \text{解: 令 } S_n &= a + 2a^2 + \cdots + na^n, \\ \therefore aS_n &= a^2 + 2a^3 + \cdots + na^{n+1}, \\ \therefore (1-a)S_n &= \frac{a(1-a^n)}{1-a} - na^{n+1}, \end{aligned}$$

由于 $0 < a < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} na^{n+1} = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{(1-a)^2}$.

基本题型 II: 用级数的性质判断级数的敛散性

例 3 (上海大学) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n+1} \right)$ 的敛散性.

【思路探索】 通项 $u_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n+1} > \frac{1}{2n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. 通过正项级数的比较判别法可以得出该级数发散.

解: 因为 $\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n+1} > \frac{1}{2n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. 由正项级数比较判别法得, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n+1} \right)$ 发散.

基本题型 III: 用柯西准则判断级数敛散性

例 4 (上海交通大学) 设 $\{na_n\}$ 收敛, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

收敛.

证明: 因为 $\{na_n\}$ 收敛, 所以对任意的 ε , 存在 N , 当 $m, n > N$, 不妨设 $m > n$, 有 $|ma_m - na_n| < \varepsilon$.

又因为 $\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 对上述的 ε , 有

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= |(n+1)a_{n+1} - (n+1)a_n + (n+2)a_{n+2} - (n+2)a_{n+1} + \cdots + \\ &\quad ma_m - ma_{m-1}| \\ &= |-na_n - (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1}) + ma_m| \\ &\geq |ma_m - na_n| + |a_n + \cdots + a_{m-1}| \end{aligned}$$

所以 $|a_n + \cdots + a_{m-1}| \leq |S_n - S_m| + |ma_m - na_n| < 2\varepsilon$,

从而由柯西收敛准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

基本题型 IV: 正项级数比较判别法

例 5 (西南师范大学、河北大学) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 证明:

(1) 若存在正数 α 及正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 有 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 有 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明: (1) 当 $n \geq N$ 时, 由 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ 知, $0 < a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛, 故由比

较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 当 $n \geq N$ 时, 由 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$ 知, $a_n \geq \frac{1}{n}$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由比较判别法

知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

【方法点击】 使用正项级数判别法, 关键在于找到比较的对象级数.

例 6 (武汉理工大学) 讨论正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{(a + \frac{1}{n})^n}$ ($a > 0$) 的敛散性.

解: 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\ln(n+2)}}{\sqrt[n]{(a + \frac{1}{n})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\ln(n+2)}}{a + \frac{1}{n}} = \frac{1}{a}$, 所以当 $a > 1$ 时收敛, 当 $0 <$

$a < 1$ 时发散; 当 $a = 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2)}{(1 + \frac{1}{n})^n} = +\infty$, 故发散.

例 7 (东南大学) 证明: $\sum \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right]$ 收敛.

证明: 因为 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 所以原级数为正项级数, 且

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} &< \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}, \end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} = \frac{1}{2},$$

而 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right]$ 收敛.

基本题型 V: 利用级数的性质证明数列极限

例 8 试证数列 $x_n = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdots (n+10)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 有极限, 并求此极限.

证明: 当 $n \geq 6$ 时, 可证 $\frac{n+10}{3n-1} < 1$, 故 $\{x_n\}$ 当 $n \geq 6$ 时为单调减小, 且有下界 0, 故

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在,

再考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+11}{3n+2} = \frac{1}{3} < 1$, 由此可知级数

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

基本题型 VI: 判别级数条件收敛或绝对收敛

例 9 (东南大学) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1)$ 条件收敛.

【思路探索】 验证级数条件收敛的条件.

证明: 因为 $\sqrt[n]{n} - 1 > 0$, 故该级数为交错级数.

令 $y = \frac{1}{x^x}$, $y' = \frac{x^x}{x^2} (1 - \ln x)$, 故当 $x > e$ 时, y 单调递减, 所以当 $n > 3$ 时,

$\{\sqrt[n]{n} - 1\}$ 单调递减, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$, 由 Leibniz 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1)$ 收敛. 但是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{x}} (1 - \ln x)}{-\frac{1}{x^2}} = +\infty,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$ 发散, 所以该级数条件收敛.

例 10 (华东师范大学) 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 亦必绝对收敛.

【思路探索】 验证级数绝对收敛的条件.

证明: 记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 所以存在 $M > 0$ 使得

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| < M, n > 0,$$

从而

$$|a_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)| \leq M |a_n|, n > 0,$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 故由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 亦必绝对收敛.

历年考研真题评析

1. (华东师范大学) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

解: 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 的前 n 项和 S_n . 则

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \cdots + n(a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n a_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k - n a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1}. \end{aligned}$$

对上式两边取极限, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$$\text{即 } \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. (云南大学) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}}$ 仍收敛, 其中

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

【思路探索】 考虑前 n 项部分和, 并注意分母有理化.

$$\text{证明: 令 } b_n = \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}}, \text{ 则 } b_n = \frac{a_n(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})}{r_{n-1} - r_n} = \sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_n},$$

$$\text{对上式两边取极限得 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{r_0} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0}.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}}$ 收敛到 $\sqrt{r_0}$.

3. (西安电子科技大学) 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 内的可微函数, 且满足:

(1) $f(x) > 0$; (2) $|f'(x)| \leq m |f(x)|$, 其中 $0 < m < 1$.

任取 a_0 , 定义 $a_n = \ln f(a_{n-1})$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛.

【思路探索】 考虑比值判别法.

$$\begin{aligned} \text{证明: } |a_{n+1} - a_n| &= |\ln f(a_n) - \ln f(a_{n-1})| = \left| \frac{f'(\xi_n)}{f(\xi_n)} (a_n - a_{n-1}) \right| \\ &\leq m |a_n - a_{n-1}|. \end{aligned}$$

即 $\left| \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} \right| \leq m < 1$, 由比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛.

这里 $\xi_n \in (\min\{a_n, a_{n-1}\}, \max\{a_n, a_{n-1}\})$

4. (西北师范大学) 对函数 $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($s > 1$), 证明: $f(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx$, 其中 $[x]$ 为 x 的整数部分.

【思路探索】 积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{证明: } s \int_1^{+\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{ns}{x^{s+1}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(-x^{-s} \right) \Big|_n^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^s} - \frac{n}{(n+1)^s} \right) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{(n+1)^s} - \frac{n+1}{(n+1)^s} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx.$$

5. (上海交通大学) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot a_n) = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛? 试证之.

解: 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{-2n \sin \frac{1}{n}}} = 1$, 又 $0 \leq n^{-2n \sin \frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n^2} \right)^{\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} < \left(\frac{1}{n^2} \right)^{\frac{3}{4}}$ (当 n 充分大时),

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)^{\frac{3}{4}}$ 收敛, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2n \sin \frac{1}{n}}$ 收敛, 再由比较判别法的极限

形式知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

本章教材习题全解

§1 级数的收敛性

1. 证明下列级数的收敛性, 并求其和:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots;$$

$$(2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n});$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

【思路探索】注意到第(1)~(4)题的特点,可考虑用拆项的技巧按级数收敛的定义证明,第(5)小题写出它的前 n 项和后,发现 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ 可利用错位相减法得到,从而原级数的前 n 项和也可求得.

$$\begin{aligned} \text{证明: (1) } S_n &= \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \\ &= \frac{1}{5} \left[\left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1}\right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1}\right). \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1}\right) = \frac{1}{5},$$

所以原级数收敛,且和数 $S = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} (2) S_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right). \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \right] = \frac{3}{2},$$

所以原级数收敛,且和数 $S = \frac{3}{2}$.

$$(3) a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right],$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right], \end{aligned}$$