大学高等数学类规划教材
丛书主编　王立冬

理工类

高等数学（上册）

ADVANCED MATHEMATICS

主　编　王立冬　张　友
副主编　刘　恒　付　军

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

理工类

高等数学（上册）

ADVANCED MATHEMATICS

主 编 王立冬 张 友

副主编 刘 恒 付 军

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 王立冬，张友主编. — 大连 ： 大连理工大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5611-6472-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 172055 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023

电话:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

大连美跃彩色印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:170mm×240mm　　印张:16.75　　字数:290 千字

2011 年 8 月第 1 版　　2011 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:王　伟　　责任校对:李　慧

封面设计:齐冰洁

ISBN 978-7-5611-6472-3　　定　价:35.00 元

序

21 世纪已出现了高等教育向大众化教育转化的趋势.我国高等教育也开始呈现出了多层次与多样性的特点.这些特点正是反映了现代科技与文化教育发展形势的客观要求.

上述发展形势的启示下,具有多科性的大连民族学院的数学教师们,近年来一直致力于数学教材的建设,已相继编写出高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门基础课讲义,这三门课曾分别被评选为省级精品课与校级精品课.

在上述讲义的基础上,进行改进和修订后产生的这套"大学高等数学类规划教材"丛书,可以作为普通高校理工科与经济及管理学科各专业的通用教材或教学参考书.

这套教材并不以"英才教育"为特殊目标,其根本旨趣是要力求反映高校大众化数学教育的基本要求,并希望教材中能渗透人文素质教育的精神.因此简要说来,这套教材希冀和呈现的主要特点,约有下列三点.

一、尽可能从实践经验与直观背景出发,提出数学问题,以便于学生了解数学知识的源流与背景.

二、教材内容的安排与表述方式上,力求深入浅出、易教易学、简明实用.注重讲清基本概念,适度淡化理论证明,并适当反映数学所蕴含的素质教育与美育教育.

三、例习题的选取与安排力求体现理论联系实践的原则,多数例题选自实践、应用与生活.

凡是具有生命力的教材，总是处于不断适应客观要求和不断更新改进的过程中，这套教材丛书自然也不例外. 我为本书作序，诚挚希望本教程使用者与读者的任何指正或改进建议，将能直接函告丛书主编或教材编著者为幸.

徐利治

2009年8月于大连

前 言

高等数学是高等院校为非数学专业本科生开设的一门重要基础课程。根据不同专业的需要，该课程的内容和深度有所不同。从内容和深度上看，理工类专业要求较高，其次是经管类专业，然后是其他文科类专业，但数学教育本质上是一种素质教育，学习数学的目的，不仅在于学到一些数学概念、公式和结论，更重要的是了解数学的思想方法和精神实质。在这些方面，理工类、经管类和其他文科类专业学生的要求应该是一样的。

本书是依据高等学校本科高等数学课程教学基本要求专为理工类本科生编写的，在编写过程中我们努力体现下述特色：

(1)遵循理工类专业教育的教学规律，考虑理工类教育的特色，强调了“必需”、“够用”，加强学生素质的培养。

(2)贯彻“掌握概念，强化应用”的教学原则。掌握概念落实到使学生能用数学思想考虑问题；强化应用落实到使学生能用所学的数学方法解决实际问题。

(3)在教学内容上注意对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、将复杂问题归纳为简单规律和步骤的能力的培养。

(4)力求将数学思维方法与数学学习相结合，使学生能够认

识、理解和运用数学思想方法，提高数学学习效果，增强思维品质。

(5)例题典型多样，难度上层次分明，注意解题方法的总结。

(6)为了配合双语教学，给出了一些重要词汇的英文翻译。

参加本书编写工作的有焦佳、刘满、刘延涛、刘红梅、刘强、梁学忠、马玉梅、王金芝、周庆健、周文书等。

由于编者水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2011 年 8 月

目 录

第1章　函　数
Function

微积分研究的主要对象是函数. 研究函数通常有两种方法. 一种方法是代数方法和几何方法的综合. 这种方法常常只能研究函数的简单性质. 初等数学中就是用这种方法来研究函数的单调性、奇偶性和周期性的. 另一种方法是微积分的方法, 或者说是极限的方法. 这种方法能够研究函数的许多深刻的性质. 微积分就是用极限的方法研究函数的一门学问.

1.1　函　数

为了准确而深刻地理解函数概念,集合知识是不可缺少的. 本章将简要地介绍集合的一些基本概念,在此基础上重点介绍函数概念.

1.1.1　集　合

1. 集合的概念

集合(set) 这一概念描述如下:一个集合是由确定的一些对象汇集的总体. 组成集合的这些对象称为集合的元素(element). 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

x 是集合 E 的元素,记为 $x \in E$(读作 x 属于 E);

y 不是集合 E 的元素,记为 $y \notin E$(读作 y 不属于 E).

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素,那么就说 E 是 F 的子集合,简称子集,记为

$$E \subset F(\text{读作 } E \text{ 包含于 } F)$$

或者

$$F \supset E(\text{读作 } F \text{ 包含 } E)$$

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，并且集合 F 的任何元素也都是集合 E 的元素（即 $E \subset F$ 且 $F \subset E$），那么称集合 E 与集合 F 相等，记为

$$E = F$$

为了方便，引入一个不含任何元素的集合 —— 空集 $\varnothing$，并约定空集 $\varnothing$ 是任何集合 E 的子集，即

$$\varnothing \subset E$$

2. 集合的表示方法

常用的表示集合的方法有两种. 一种是列举法，即将集合的元素一一列举出来，写在一个花括号内. 例如，所有正整数组成的集合可以表示为 $\mathbf{N} = \{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 另一种是描述法，即指明集合元素所具有的性质，将具有性质 $p(x)$ 的元素 x 所组成的集合 A 记作

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p(x)\}$$

例如，正整数集 $\mathbf{N}$ 也可表示成

$$\mathbf{N} = \{n \mid n = 1,2,3,\cdots\}$$

所有实数的集合可表示成

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$$

又如

$$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, x, y \text{ 为实数}\}$$

表示 xOy 平面单位圆周上点的集合.

全体自然数的集合、全体整数的集合、全体有理数的集合、全体实数的集合和全体复数的集合都是经常遇到的集合，约定分别用粗体字母 $\mathbf{N}$,$\mathbf{Z}$,$\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 来表示，即

$\mathbf{N}$　表示全体自然数的集合；

$\mathbf{Z}$　表示全体整数的集合；

$\mathbf{Q}$　表示全体有理数的集合；

$\mathbf{R}$　表示全体实数的集合；

$\mathbf{C}$　表示全体复数的集合.

非负整数、非负有理数和非负实数的集合分别记为 $\mathbf{Z}_+$,$\mathbf{Q}_+$ 和 $\mathbf{R}_+$，显然有

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

和

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}_{+} \subset \mathbf{Q}_{+} \subset \mathbf{R}_{+}$$

3. 特殊的集合 —— 区间

在本课程中经常遇到以下形式的实数集的子集 —— 区间(interval). 为了书写简练,将各种区间的符号、名称、定义列表如下:($a,b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$)

符　号	名　称		定　义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x \mid a < x < b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x \mid a < x\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x \mid a \leqslant x\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x \mid x < a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x \mid x \leqslant a\}$

4. 特殊的区间 —— 邻域(neighborhood)

设 $a \in \mathbf{R}, \delta > 0$. 数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 记为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$$

称为 a 的 δ 邻域. 当不需要注明邻域的半径 δ 时,常把它记为 $U(a)$,简称 a 的邻域.

数集 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a,称为 a 的 δ 去心邻域. 当不需要注明邻域半径 δ 时,常将它记为 $\mathring{U}(a)$,简称 a 的去心邻域.

1.1.2 函数的概念

在自然现象或技术过程中,常常有几个量同时变化,它们的变化并非彼此无关,而是互相联系的,这是物质世界的一个普遍规律. 17 世纪初,数学家首先从对运动(如天文、航海问题等)的研究中引出了函数这个基本概念. 在那以后的二百多年

里，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置.

【例 1】 球的半径 r 与球的体积 V 互相联系着：$\forall r \in [0,\infty)$ 都对应球的一个体积 V. 已知 r 与 V 的对应关系是

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

其中 π 是圆周率.

注 符号 $\forall$ 表示“任意的”；符号 $\exists$ 表示“存在”.

【例 2】 在标准大气压下，温度 T 与水的体积 V 互相联系着. 实测如下表，数集$\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$ 中每个温度 T 都对应一个体积 V，已知 T 与 V 的对应关系用下面表格来表示.

温度(百度表)	0	2	4	6	8	10	12	14
体积(cm^3)	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

上述两个实例，分属于不同的学科，实际意义完全不同. 但是，从数学角度看，它们有一个共同的特征：都有一个数集和一个对应关系，对于数集中任意数 x，按照对应关系都对应 $\mathbf{R}$ 中唯一的数. 于是有如下的函数概念：

定义 1 设 A 是非空数集，若存在对应关系 f，对 A 中任意数 x($\forall x \in A$)，按照对应关系 f，对应唯一的 $y \in \mathbf{R}$，则称 f 是定义在 A 上的函数(function)，记为

$$f: A \to \mathbf{R}$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值，记为 $y = f(x)$. x 称为自变量(independent variable)，y 称为因变量(dependent variable). 数集 A 称为函数 f 的定义域(domain of definition)，函数值的集合 $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ 称为函数 f 的值域(domain of value).

根据函数定义不难看出，上述两例皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明：

(1) 用符号“$f: A \to \mathbf{R}$”表示 f 是定义在数集 A 上的函数，十分清楚、明确. 在本书中，为了方便，将“f 是定义在数集 A 上的函数”用符号“$y = f(x)$，$x \in A$”表示. 当不需要指明函数 f 的定义域时，又可简写为“$y = f(x)$”，有时甚至笼统地说“$f(x)$ 是 x 的函数(值)”.

(2) 根据函数定义，虽然函数都存在定义域，但常常并不明确指出函数 $y = f(x)$ 的定义域，这时认为函数的定义域是自明的，即定义域是使函数 $y = f(x)$ 有

意义的实数 x 的集合 $A=\{x \mid f(x)\in \mathbf{R}\}$. 例如函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,没有指出定义域,那么它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合,即闭区间

$$[-1,1]=\{x \mid \sqrt{1-x^2}\in \mathbf{R}\}$$

具有实际意义的函数,它的定义域要受实际意义的约束. 例如,上述例 1 中,半径为 r 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 这个函数,从抽象的意义来说,r 可取任意实数;从实际意义来说,半径 r 不能取负数,因此它的定义域是区间 $[0,\infty)$.

(3) 函数定义指出:$\forall x\in A$,按照对应关系 f,都对应唯一的 $y\in \mathbf{R}$,这样的对应就是所谓的单值对应. 反过来,一个 $y\in f(A)$ 就不一定只有一个 $x\in A$,使 $y=f(x)$. 例如函数 $y=\sin x$. 对 $\forall x\in \mathbf{R}$,都对应唯一的 $y=\sin x\in \mathbf{R}$,反之,对 $y=1$,都有无限多个 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\in \mathbf{R}, k\in \mathbf{N}$,按照对应关系 $y=\sin x$,x 都对应 1,即

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad k\in \mathbf{N}$$

(4) 在函数 $y=f(x)$ 的定义中,要求对应于 x 值的 y 值是唯一确定的,这种函数称为单值函数. 如果取消唯一这个要求,即对于 x 值,可以有两个或两个以上确定的 y 值与之对应,那么函数 $y=f(x)$ 称为多值函数. 例如函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 是多(双)值函数.

为了讨论方便,要设法避免函数的多值性. 在一定条件下,多值函数可以分裂为若干单值支. 例如,双值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 就可以分成两个单值支:一支是不小于零的 $y=\sqrt{r^2-x^2}$,另一支是不大于零的 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$. 方程 $x^2+y^2=r^2$ 的图形是中心在原点、半径为 r 的圆周,这同时也是双值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 的图形. 两个单值支相当于把整个圆周分为上下两个半圆周. 所以只要把各个分支弄清楚,由各个分支合起来的多值函数也就了如指掌了. 今后如果没有特别声明,所讨论的函数都限于单值函数.

下面再看几个函数的例子.

【例 3】 $\forall x\in \mathbf{R}$,对应的 y 是不超过 x 的最大整数. 显然,$\forall x\in \mathbf{R}$,都对应唯