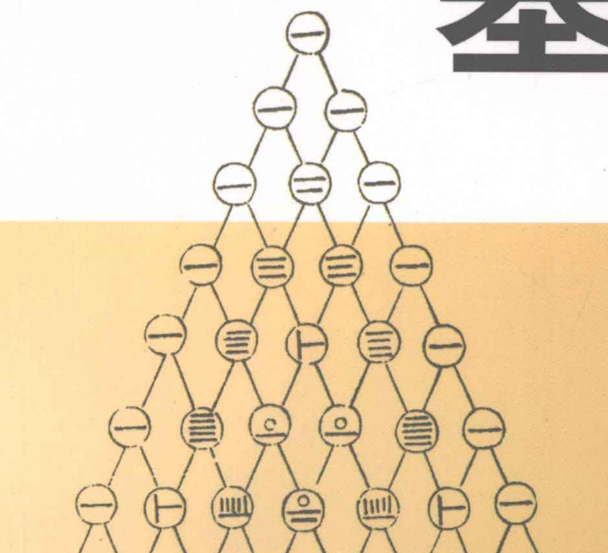
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

中国数学史基础

·ZHONGGUOSHUXUESHIJICHU·

李兆华 主编

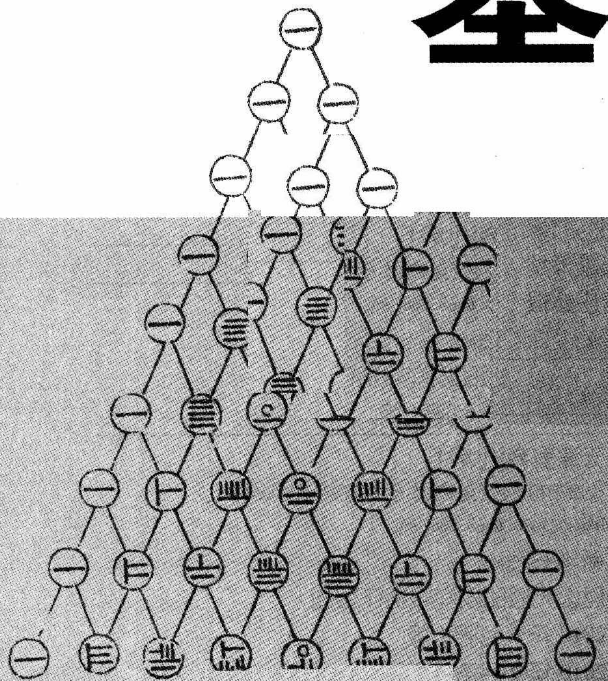


天津教育出版社
TIANJIN EDUCATION PRESS

中国数学史基础

·ZHONGGUOSHUXUESHIJICHU·

李兆华 主编



天津教育出版社
TIANJIN EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

中国数学史基础 / 李兆华主编. 一天津:天津教育出版社,2010.9

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

ISBN 978 -7 -5309 -6180 -3

Ⅰ.①中… Ⅱ.①李… Ⅲ.①数学史 - 中国 - 高等学校 - 教材 Ⅳ.①O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 186737 号

中国数学史基础

出版人	胡振泰
主编	李兆华
选题策划	王光昭
责任编辑	王光昭
装帧设计	郭亚非
出版发行	天津教育出版社 天津市和平区西康路 35 号 邮政编码 300051 http://www.tjeph.com.cn
经销	新华书店
印刷	唐山天意印刷有限责任公司
版次	2010 年 9 月第 1 版
印次	2010 年 9 月第 1 次印刷
规格	16 开(787 × 1092 毫米)
字数	315 千字
印张	20.75
定价	29.80 元

目　录

绪 论

中国数学史是数学史的重要分支之一。主要研究对象为数学著作、数学成果、数学思想、数学家及其产生的背景与发生的影响。中国数学史的断代与分期,目前尚无统一标准。一般说来,起自上古止于1911年,其间以17世纪为界分为前后两大阶段。17世纪之前,主要表现为以筹算为中心的中国传统数学体系与算法的确立;17世纪之后,主要表现为以笔算为中心的西方数学的传入与研究。进一步地,又可依其自身特征分为五个发展时期:

1. 中国传统数学的萌芽时期(上古—西汉末,约公元前4000年—约公元前50年);

2. 中国传统数学体系的形成与发展时期(西汉末—北宋初,约公元前50年—公元960年);

3. 中国传统数学的繁荣时期(北宋初—元初,公元960—1303年);

4. 中国传统数学的低落时期(元初—明末,公元1303—1607年);

5. 中西数学的合流时期(明末—清末,公元1607—1911年)。

近年来,国内外对于本学科的研究取得了较大的进展,但仍有不少理论的和具体的问题需要进一步地探讨。

中国传统数学的萌芽

从上古至西汉末为中国传统数学的萌芽时期。自新石器时代至夏、商、周,先民对形和数已经有了较多的认识。西汉中期的《算数书》说明中国传统数学已经积累了丰富的知识。十进位值制的计数法和算筹的出现为此期数学的特征。

对形和数的早期认识。西安半坡遗址出土的约公元前 4000 年左右的各种陶器,反映出先民对立体形状已有一定的认识。陶器上的图案,诸如矩形、三角形等,则反映出对平面图形的若干认识。陶器上刻有按三角形排列的圆点,第一层一,第二层二,直到末层八,其中的意义今已难以确知,但可反映出对于整数的认识已多于五,陶器上出现的刻画符号有|、‖等,与半坡约同时的姜寨出土的陶片中还出现了|||、—等。这些符号均与后世的筹码相类似。中国是世界上最早采用十进位值制的地区。商代甲骨文的数字已经构成了完整的十进制。甲骨文已有一至九这 9 个数目字,以及十、百、千、万等。表示多位数时,常用合文连同位值一同表出,与十进位值制的原则完全相符。

算筹,是中国传统数学的主要计算工具。它的出现约在西周(公元前 1046 年世纪—公元前 771 年)。春秋战国(公元前 770 年—公元前 221 年)时期,应用已属普遍。20 世纪 50 年代,长沙战国晚期墓有竹制算筹出土。据《逸周书》、《楚辞》、《方言》等书记载推测,早期的算筹尚无定制,树枝、竹枝、茅草之属皆可为筹。西汉(公元前 206 年—公元 25 年)时期,算筹已有定制。《汉书》律历志载:"其算法用竹,径一分,长六寸,二百七十一枚而成六觚,为一握。"由《汉书》律历志、《数术记遗》(3 世纪)、《隋书》律历志等记载来看,算筹的长度逐渐变短。从出土的战国、西汉、东汉算筹实物来看,均较时代与之相近的文献记载长度稍短。用算筹表示数字有纵横两式:

横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

据《孙子算经》(约 400 年)、传本《夏侯阳算经》(785 年左右)的记载,用算筹表示多位数时,从末位到首位须遵守纵横相间的原则,用空位表示零。例如,1860867 记为

𝍠𝍰𝍥　𝍧𝍮𝍦

数学知识的积累。大约西周末期成书的《周易》记载的阳爻(⚊)、阴爻(⚋)以及由此所得到的四象、八卦、六十四卦,与今之有重复排列的计算结果相同。从 m 个不同元素中每次取 n 个的有重复排列为 $P_m^n=m^n$。《周易》的结果是 $m=2,n=2,3,6$ 时的特例。春秋时期,简单的算术知识已属士人的常识。《韩诗外传》卷三载,齐桓公招贤,期年而士不至,因有人以"九九薄能"受到礼遇,遂使四方之士相导而至。"九九"是古代的算术代称。由此可见春秋时期算术知识普及之一斑。战国时期,墨家学派提出一些定义和命题在中国数学史上有重要意义。《墨子》经上、经说上、经下、经说下等四篇与数学有关。如,"平,同高也"(高度相等),"直,参也"(三点共线),"圜,一中同长也"(中心到圆周各点等距),"方,柱隅四讙也"(四个角皆为直角)等,均与今之几何学定义一致。墨家的这些定义与命题对中国传统数学有一定影响。1984 年,湖北江陵张家山西汉墓出土的竹简《算数书》是中国数学史上的重大发现。据考证,该墓下葬时间在公元前 187 年至公元前 157 年间。简文内容涉及到整数、分数四则运算、比例计算、面积计算等,其中的一些标题和题目还出现在稍后的《九章算术》(约公元前 50 年)中。《周髀算经》(约公元前 100 年)是一部论述盖天说的著作。该书记载了勾股定理、比较复杂的分数计算、开平方计算及"日高术"。后者对重差术的发展有重要影响。从该书可以看到数学已经成为天文学的不可缺少的工具。

中国传统数学体系的形成与发展

从西汉末至北宋初,中国传统数学体系逐步形成并得到发展。经过长期的积累,至公元前 50 年左右确立了中国传统数学的经典《九章算术》。该书的确立标志着以筹算为中心的中国传统数学体系业已形成。其后六七百年间,在算法、算理及应用诸方面均有不断的发展。唐初李淳风奉敕注释十部算经,对此期的数学文献做了一次比较系统的整理。各种筹算算法的确立为此期数学的特征。

中国传统数学体系的形成。《九章算术》九卷,共 246 题、202 术。内容涉及算术、平面几何、立体几何、初等代数等分支。该书突出成就在于代数方面,特别是开平方法、开立方法、多元一次方程组解法及正负数加减法则等,均属世界数学史上领先的成果。开平方法与开立方法的原理相同。首先估得初商,而后每

求得方根的一位数之后便作减根变换。在减根变换后的方程中略去高次项，而仅以一次项系数除常数项得方根的下一位数。这一算法奠定了此后方程解法的基础。多元一次方程组解法，数学史上称之为直除法，与今之加减消元法原理相同。相消过程中出现的正数与负数的加减运算依“正负术”进行。此外，方程组的解法中还涉及正数与负数的相乘运算。《九章算术》以实用为标准将题目分为九类，每类之中算法相同的题目集中排列而后给出术文。这种体例构成了中国传统数学体系的基本模式。术文亦即算法，构成了该体系的主要部分，而作为算法基础的数学理论，则包含在算法之中。新课题、新算法的不断出现使得该体系得到了不断的发展。

中国传统数学体系的发展。三国时代吴国人赵爽《周髀算经》注中的“勾股圆方图注”与“日高图注”是勾股算法的重要发展。“勾股圆方图注”用出入相补原理给出勾股定理及常用勾股恒等式的严谨证明，其中包括二次方程正根的几何解法。“日高图注”证明了“盖天说”的日高公式。《九章算术》勾股卷共有 8 题属于旁要术内容。赵氏的证明奠定了由旁要术向重差术发展的基础。

刘徽《九章算术》注（263 年）与《海岛算经》（263 年）对中国传统数学体系、算法做出卓越贡献。刘徽《九章算术》注序称：“故枝条虽分而同本干者，知发其一端而已。”这种探本求源的治学态度与其注文中所体现的深刻数学观点一脉相承。注文的贡献约分两点：1. 对该书若干重要算法的正确性及其内在联系予以论证，使之建立在严谨的理论基础之上。 2. 给出若干富有创造性的算法，使该书内容得以丰富。《九章算术》的方田、粟米、衰分、均输、盈不足、方程诸卷绝大多数问题是一次的，算法中涉及到一组成比例的量。例如，分数的分子与分母，衰分卷的列衰，盈不足卷的人数、出钱数与盈不足数，方程每行的数值等。对此，刘徽定义了“率”以概括这一类量。从而，上述各类问题的算法概括为率的变换与运算。方田卷经分术刘注：“凡数相与者谓之率。率者，自相与通。有分则可散，分重叠则约也。等除法实，相与率也。”根据率的“自相与通”性质，刘徽给出“齐同”的概念。所谓齐同是指将率作恒等变换使两个率基于同一比较标准。例如，方田卷合分术刘注：“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。同者，相与通同共一母也。齐者，子与母齐。势，不可失本数也。”盈不足卷第四题刘注：“盈朒维

乘两设者，欲为齐同之意。”方程术刘注：“先令右行上禾乘中行，为齐同之意。为齐同者，谓中行直减右行也。从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣。”均输卷第十题刘注：“凡率错互不通者皆积齐同用之。仿此，虽四五转不异也。”齐同的率便可进行“相并”、“今有”、“通计”、“直减”等各种运算。于是，散见于该书各卷的分数运算、比例算法、盈不足以及方程诸算法皆统之于“率”。该书商功章给出的各种简单几何体的体积公式未予证明。刘徽注文给出刘徽原理、截面原理，并对一些主要公式予以证明，从而使得该书中的体积算法系统化、严格化。对于多面体，刘徽以长方体($V=abc$)、堑堵($V=\frac{1}{2}abc$)、阳马($V=\frac{1}{3}abc$)、鳖臑($V=\frac{1}{6}abc$)为基本几何体，其他各种或分割为或等积变形为这四种求积。对于圆柱、圆锥、圆台则作其外切正四棱柱、外切正四棱锥、外切正四棱台，由体积之比等于同一高度截面积之比得所求体积。至此，除球体积公式，简单几何体体积公式都得到证明。刘徽创造性算法的代表是割圆术与阳马术，建立了圆周率古典算法与体积算法的基础。

《海岛算经》根据勾股不失本率原理(相似勾股形对应边成比例)证明了重差公式并推广到“三望”、“四望”的情形，建立了系统的重差术，即勾股测量算法。

《孙子算经》三卷、《张丘建算经》三卷(约 466—485 年)是《九章算术》之后出现的两部算经，其中某些算法有共同之处。《孙子算经》以其“物不知数”算法影响后世独深。该题相当于求解一次同余式组。此题虽然比较简单，但算法有明确的构造性，给出孙子定理的最初形式。后经秦九韶等人发展成为一般算法。《张丘建算经》记载了丰富的等差数列算法。其中个别公式已见于《九章算术》刘徽注，而大部分属于新增。该两书均涉及到最小公倍数的概念，并给出算法。“二色差分”及“三色差分”是该两书，特别是《张丘建算经》独到之处。已知甲物单价 α，乙物单价 $\beta(\alpha>\beta)$，又知共钱 M 买得共物 N，求甲、乙二物各若干。这类问题通常称为二色差分。《孙子算经》卷下第 31 题给出这类问题的算法，《张丘建算经》卷中第 18 题有明确表述。这一算法为后世常用。百鸡问题是三色差分的最早记载。该题相当于求解三元一次不定方程组。《张丘建算经》所给答案正确，但所载术文不完全。这促使后世学者不断探讨，遂形成内容丰富的各色差分

及其算法。由三色差分发展过程推测,《张丘建算经》本法可能是先设一物为若干,并算出对应的钱数,将原题转化为二色差分求解。

继刘徽之后,祖冲之将 π 的精确度提高到一个新水平。据《隋书》卷十六载,祖冲之给出 $3.1415926<\pi<3.1415927$,并化为便于算筹表示的分数 $\pi\approx\frac{355}{113}$(密率),$\pi\approx\frac{22}{7}$(约率)。这是当时世界上最精确的 π 值。在刘徽的基础上,祖暅成功地给出球体积算法。刘徽在《九章算术》注文中指出球体积旧有算法误差过大。他作正方体的两个内切圆柱使其轴线互相垂直,并称其相交部分为牟合方盖,进而指出正方体内切球体积与牟合方盖体积之比为 $\pi:4$,即 $V_{球}:V_{牟合方盖}=\pi:4$。刘徽未能求出牟合方盖的体积,球体积只得付之阙疑。祖暅运用"幂势既同则积不容异"这一原理求出八分之一牟合方盖的体积,进而由刘徽的比例式求得球体积。在中国数学史上,刘徽首先运用两等高几何体体积之比等于截面积之比这一原理,祖暅成功地运用这一原理给出球体积的算法。在西方数学史上,这一原理称为卡瓦列里(B. F. Cavalieri)原理。

王孝通《缉古算经》(7 世纪初)共 20 题。主要讨论一类三次方程的建立与解法。因当时天元术尚未出现,而主要依据几何方法建立方程,故该书涉及较多的体积算法与勾股恒等式,且颇有新意。"开带从立方"求得三次方程的一个正根。该书是中国古代第一本方程专著,它的出现标志着中国传统数学在方程的建立和解法方面开始系统化。

经汉、唐数百年间的发展,积累了以十部算经为代表的丰富内容。这十部算经是:《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》(6 世纪)、《五经算术》(6 世纪)、《缉古算经》、《夏侯阳算经》以及《缀术》。唐代国子监算学馆以李淳风等注释的上述十部算经为主要教材。十部算经由李淳风等注释之后成为定本。这是对前一段数学著作的一次系统整理,对后世数学的发展产生了深远的影响。北宋元丰七年(1084 年)秘书省刊刻十部算经时,《夏侯阳算经》、《缀术》已经失传,而以 8 世纪末唐代的一本算术书(即今传本《夏侯阳算经》)代前一种,实刻九部。南宋鲍澣之翻刻时,又以《数术记遗》刻入,复得十部。

中国传统数学的繁荣

从北宋初至元初，中国传统数学呈现繁荣发展的局面。诸多新的算法相继出现，其中不少成果在世界数学史上遥遥领先，从而使得中国传统数学成为当时世界数学的高峰。明确的计算程序性与较高的理论抽象性为此期数学的特征。

算法的发展。11 世纪中期出现的贾宪三角形是新的开方法即增乘开方法的精炼概括。原图列至五乘方（相当于二项式六次幂展开式系数），并附有如下的五句口诀

左袤乃积数，右袤乃隅算，中藏者皆廉，以廉乘商方，命实而除之。

前三句说明横行各数的名称：左边的 1 是被开方数系数 1，右边的 1 是隅算，中间诸数是各廉。后两句则是增乘开方法步骤的概括。和贾宪三角形一起，还有“增乘方求廉法草”说明该三角形的构成法则。贾宪的增乘开平方法、增乘开立方法与《九章算术》开方法的原理相同，仅将分项计算的程序改进为随乘随加计算的程序，使得开方运算成为一种简单算法的机械重复。正是由于这一特点，增乘开方法出现以后不久便推广为求解一般高次方程正根的方法。

约 11 世纪早期出现的刘益《议古根源》在求解高次方程方面有重要贡献。刘益之前，中国传统数学讨论的高次方程对系数均有所限制。刘益所讨论的方程仅限制等号右端的常数项为正，其余各项可正可负。刘益求解方程正根的正负开方术与增乘开方法基本相同，而与“带从开方”不同。秦九韶《数书九章》（1247 年）记载的正负开方术是在增乘开方法基础上产生的求解一般高次方程正根的方法。秦九韶对方程系数的限制与刘益的论述基本相同，但所讨论的方程数量较多，难度较大，算法更加规范。全书共有 26 个方程，其中包括一个十次方程。秦九韶正负开方术只要自上而下依升幂排列方程各项系数并注意到初商的运算须与方程各项系数加减，其余步骤与增乘开方法相同。

建立方程的一般方法即天元术出现于 12 世纪。现有资料以李冶《测圆海镜》（1248 年）记载最早。天元术即未知数。建立方程的步骤，先设所求数为“天元一”，根据已知条件建立两个等值的多项式，而后“相消”得到天元式亦即方程。天元术出现之前，建立方程主要依据几何方法，具有很大的局限性。随着一般高

次方程解法的出现，建立方程一般方法成为必需，天元术的出现可能受到设所求数为 1 这一方法的启发。此外，该书的“圆城图式”将“勾股容圆”推广为一般情形。

《数书九章》中的大衍总数术，亦即通常所说的孙子定理，是此期数学突出成就之一。这一算法由其最初形式发展为一般形式，秦九韶的贡献有如下两点：1. 求定数法。给出的 k 个模（问数）非两两互素时，秦氏设法将其化为两两互素（定数）。2. 求一术。正确地给出求 M'_i（乘率）的算法，即 $M_iM'_i\equiv 1 \pmod{m_i}$ 的解法。求一术是秦氏的杰作。

南宋朱熹、蔡元定分别在《周礼》郑玄注、司马迁《史记》律书基础上给出由三分损益法所得十二律长的十进分数值换算为九进小数值的算法。他们的算法与现代的十进小数换算为九进小数的方法原理相同。这一工作为明代朱载堉的工作奠定了基础。此期的筹算简化算法有新的发展。杨辉《算法通变本末》三卷（1274 年）比较详细地介绍了这些方法，其中有加法代乘五法、减法代除四法、求一乘、求一除及归除口诀等。朱世杰《算学启蒙》三卷（1299 年）记载的归除口诀三十六句与今常用者已大体相同。简化算法对珠算的产生与发展有重要影响。此外，《授时历》（1280 年）运用招差术给出三次插值多项式以计算日月五星的行度，是历法中插值算法的重要发展。

算法的创立。纵横图（幻方）及其构造规律是此期创立的新算法之一。纵横图的出现可上溯至《周易》系辞传“天地之数”与《易纬乾凿度》“太乙九宫”这两段文字的郑玄注。宋代道家河图、洛书之说即本于此。作为数学问题提出并研究其构造规律始自杨辉《续古摘奇算法》（1275 年）。除河图、洛书之外，该书卷上又给出 13 种纵横图：四四图、五五图、六六图、七七图、六十四图、九九图、百子图、聚五图、聚六图、聚八图、攒九图、八阵图、连环图，其中有些图给出易换术与求积术。此后，王文素《算学宝鉴》（1524 年）、程大位《算法统宗》（1592 年）均载此项内容，至清保其寿《增补算法浑圆图》（约 1880 年）又发展为在正四面体、正方体及球面上布数。这些内容现已成为组合数学研究课题。阿拉伯和西方大约从 14 世纪开始此项研究。

会圆术及其应用是又一个新算法。所谓会圆术是指圆径、弦、矢及所对弧长

的近似算法，始见于北宋沈括《梦溪笔谈》卷十八。元代王恂、郭守敬编制《授时历》，运用会圆术求得球大圆的弧长。这一算法与球面直角三角形的解法相通。

朱世杰《四元玉鉴》(1303 年)记载的四元术是在天元术基础上产生的一种新算法。四元术相当于四元高次方程组的表示、建立及解法。四元的名称是天、地、人、物。四元相当于 x、y、z、w。其算法的关键是四元相消。朱世杰将其分为“剔而消之”、“互隐通分相消”、“内外相乘相消”三步。尽管这三步的名称各异、演算步骤不尽相同，然而其原理与现在的解方程组的互乘对消法并无不同。

《四元玉鉴》中的垛积术与招差术是另一新的算法。中国传统数学将高阶等差数列依其几何意义称为垛积。垛积术包括两方面的内容：对给定的垛由项数求和；对给定的垛由和求项数。沈括《梦溪笔谈》卷十八记载的隙积术指出，以刍童体积值代替垛积总数失之于少，另行给出垛积求和公式，是为垛积术之创始。朱世杰的贡献在于将垛积术建立在贾宪三角形基础之上，利用该三角形的规律计算垛积的和数，从而开创了以贾宪三角形为基础构造各类垛积的一般方法及其求和法。朱世杰主要讨论两类垛积：三角垛和四角垛。朱世杰的招差术是建立垛积求和公式的通法。朱氏给出三阶等差级数的求和公式。运用朱氏的方法可以导出高阶等差数列求和公式。

中国传统数学的低落

从元初至明末，中国传统数学呈现低落状态。所谓低落状态是指以筹算为中心的算法未能达到前一时期的水平而数学发展的重点转向日用算法的普及。这一趋势导致珠算的产生与发展。珠算(包括算盘和算法)的产生与发展，就其本身而言，是中国传统数学向前发展的一种表现。然而，此期间数学的整体水平明显低于前一时期，则是一个显然的事实。至于低落的原因乃是数学史界讨论中的一个问题。诸如理学的影响、八股取士对数学发展的阻碍等都是已经指出的因素。“筹珠交替”为此期数学的特征。

传统数学的研究。从《透帘细草》、《算法全能集》、《详明算法》、《丁巨算法》(1355 年)及《通原算法》(1372 年)等书可以看到元初至明初数学发展的一些情况。《透帘细草》作者及年代无考，今存 71 题。该书中开立方题后载：“旧草冗

繁，今以透帘开之。”据此，“透帘”二字当有简明之意。玄览堂本《算法全能集》二卷，题“长沙贾亨季通类编”。与传本《详明算法》相比较，该书少“田亩纽粮”一节，多“开平方”一节，多“田亩丈量”节开平方一题，其余内容基本相同。该书文字论述精审，版刻有元初风格。《详明算法》二卷，今传据洪武癸丑(1373年)庐陵李氏明经堂刊本排印的朝鲜铜活字本，卷首有安止斋序。据此序称：“旧本极为详明，访求之久，不复可得”，“以所闻如旧法分上下二卷尽其说”。卷下末称：“凡不切于初学者不及□载。”由此可知，今传本当系旧本的改编本。又据程大位“算经源流”，《详明算法》为“元儒安止斋何平子作”，今传本无“何平子”三字。据此，程大位所见本与今传本不同。这两种《详明算法》的祖本可能是上述的《算法全能集》。《丁巨算法》原本八卷，今存89题。严恭《通原算法》今存64题。上述各书主要是日常应用的计算问题，浅显易明。其中的简化算法、开平方法与开立方法的记载对研究筹算向珠算的转变有参考价值。除此之外，还有一些数学内容散见它书。如元代赵友钦《革象新书》卷下“勾股测天”节、“乾象周髀”节、舒天民《六艺纲目》卷下“数集纲目”节分别介绍勾股测量、割圆、《九章算术》大意，并无创新。

明代中叶数学发展的情形有所好转。吴敬《九章详注比类算法大全》十卷首一卷(1450年)、王文素《新集通证古今算学宝鉴》四十一卷首一卷(1524年)、周述学《神道大编历宗算会》十五卷(1558年)可为此期传统数学的代表。与元初至明初算书相比较，这些著作的卷帙较大，内容广泛。不足之处是，缺乏新意，甚至对宋元时期一些难度较大的算法存在误解。例如，吴敬的著作，卷首介绍算学预备知识及各种常用算法，卷一至卷九诸卷各分为“古问”、“比类”、“诗词”三部分。其中“古问”多摘自杨辉《详解九章算法》相应各卷内容，“比类”为新收的同类题目，“诗词”为歌括体的算题及解法。卷十专列各种开方问题。该书对天元术有误解，不用增乘开方法。顾应祥《勾股算术》二卷(1533年)、《弧矢算术》不分卷(1552年)及《测圆算术》四卷(1553年)是明代中叶比较重要的算书。其中，第一种论勾股定理与勾股恒等式，第二种论沈括以来的弧矢算法，第三种论李冶勾股测圆问题。顾氏虽未能正确理解天元术，而上列三书却体例分明间有心得。

珠算的产生与发展。此处所说的珠算是指与现在大体相同的算盘与算法，