高等学校教材

弹性力学

第二版

上册

徐芝纶

人民教育出版社

高等学校教材

弹性力学

（第二版）

上　册

徐芝纶

人民教育出版社

本书经工科力学教材编审委员会结构力学编审小组委托王德荣编委审阅，同意作为高等学校教材出版。

本书第一版获“1977～1981 年度全国优秀科技图书”奖。

高等学校教材

弹 性 力 学

（第二版）

上 册

徐芝纶 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.75 字数 300,000

1978 年 1 月第一版 1982 年 4 月第 2 版 1982 年 9 月第 4 次印刷

印数 55,501—10,500

书号 15012·0109 定价 1.35 元

第二版前言

本书在1979年出版以后，曾蒙若干兄弟院校的教师作为教材试用，并先后提出不少宝贵的意见和建议。现在已经按照这些意见和建议进行了修改，择要说明如下。

原书中关于楔形坝体温度应力的一般分析，数学运算较繁，在有限单元法广泛应用于坝体应力分析以后，已经失去了应用价值。原书中关于等截面直杆弯曲问题的解答，虽然属于古典弹性力学上的重大成就，但在工程上很少有人应用。因此，在修订版中删去了这两方面的内容。

修订版在平面问题的基本理论中增加了"斜方向的应变"这一节，是为了适应结构实验分析方面的需要；在薄板小挠度弯曲问题的边界条件中，增加了弹性支承边的边界条件，因为弹性支承是板壳理论中的一个重要概念，而且在很多的板壳结构中，支承构件的弹性也是必须加以考虑的。

原书中关于平面问题应力函数以及应力和位移的复变函数表示，沿用过去文献中的传统推导方法，引用了几个人为的调和函数，显得曲折而不自然。在修订版中，放弃了这些调和函数而用共轭复变数进行推导，比较直观，容易为学生接受。

等曲率扁壳的简化计算，是我国的力学工作者们在50年代末期和60年代初期的重大贡献，至今还不失为国际上的先进成果。因此，在修订版中稍许增多了这方面的内容。

此外，在很多的章节中，文字叙述和数学推导作了某些修改，习题也有些调整。

恳切希望兄弟院校的教师继续对本书进行严格的审查，把发

现的缺点和错误及时通知本人，以便再度加以修改或更正，使本书成为比较合用的一部教材。

徐芝纶

1982年4月

第一版前言

本书是为高等学校工科力学专业编写的弹性力学教材。

全书分上下两册，上册先讲平面问题，再讲空间问题，下册先讲薄板问题，再讲薄壳问题。这样安排，大致符合由浅入深、由易到难、循序渐进的原则。

为了训练学生理论推导和实际运算的能力，每章之后都附有难易程度不同的习题，任课教师可按照专业教学计划的要求和学生课外学时的多少，适当布置。

在大多数章的最后，列出了参考教材的目录，以使学生在阅读了这些教材以后，能够更全面、深入地掌握该章的内容。

内容索引和人名对照表，附在下册的书后。

本书承主审人北京航空学院王德荣同志和武汉建筑材料工业学院王龙甫同志，以及同济大学、大连工学院、太原工学院、华北水利水电学院、西南交通大学、天津大学参加审稿的同志提出了宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。

徐芝纶

1978 年 10 月

目　录

（上　册）

第一章　绪　论

§1-1　弹性力学的内容

弹性体力学，通常简称为弹性力学，又称为弹性理论，是固体力学的一个分枝，其中研究弹性体由于受外力作用或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

对工科力学专业说来，弹性力学的任务，和材料力学、结构力学的任务一样，是分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否具有所需的强度和刚度，并寻求或改进它们的计算方法。然而，这三门学科在研究对象上有所分工，在研究方法上也有所不同。

在材料力学里，基本上只研究所谓杆状构件，也就是长度远大于高度和宽度的构件。这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力和位移，是材料力学的主要研究内容。在结构力学里，主要是在材料力学的基础上研究杆状构件所组成的结构，也就是所谓杆件系统，例如桁架、刚架等等。至于非杆状的结构，例如板和壳，以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构，则在弹性力学里加以研究。对于杆状构件作进一步的、较精确的分析，也须用到弹性力学。

虽然在材料力学和弹性力学里都研究杆状构件，然而研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆状构件，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外，大都还引用一些关于构件的形变状态或应力分布的假定，这就大大简化了数学推演，但是，得出的解答有时只是近似的。在弹性力学里研究杆状构件，一般都不必引用那些假定，因而得出的结果就比较精确，并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

例如，在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下的弯曲，就引用了平面截面的假定，得出的结果是：横截面上的正应力(弯应力)按直线分布。在弹性力学里研究这同一问题，就无须引用平面截面的假定。相反地，还可以用弹性力学里的分析结果来校核这个假定是否正确，并且由此判明：如果梁的高度并不远小于梁的跨度，而两者是同等大小的，那么，横截面上的正应力并不按直线分布，而显然是按曲线变化的，如图 7-7 所示，并且，材料力学里给出的最大正应力将具有很大的误差。

又例如，在材料力学里计算有孔的拉伸构件，通常就假定拉应力在净截面上均匀分布。弹性力学里的计算结果表明：净截面上的拉应力远不是均匀分布，而在孔的附近发生高度的应力集中，如图 4-10 所示，孔边的最大拉应力会比平均拉应力大出几倍。

弹性力学可以分为数学弹性力学和实用弹性力学两部分。在数学弹性力学里，只用精确的数学推演而不引用关于形变状态或应力分布的假定。本书上册的内容属于数学弹性力学。在实用弹性力学里，和在材料力学里一样，也引用一些关于形变状态或应力分布的假定来简化数学推演，得出具有一定近似性的解答。这样，按照分析的方法和解答的精度说来，实用弹性力学是接近材料力学的；但是，由于其中所研究的问题比较复杂，同时还要用到数学弹性力学中的结果，所以这些研究内容归入弹性力学。本书下册的内容就属于实用弹性力学。

虽然弹性力学里通常是不研究杆件系统的，然而近几十年来，不少人曾经致力于弹性力学和结构力学的综合应用，使得这两门学科越来越密切结合。弹性力学吸收了结构力学中的超静定结构分析法以后，大大扩展了它的应用范围，使得某些比较复杂的本来是无法求解的问题，得到了解答。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性，但应用在工程上，通常却是足够精确的。在近二十几

年间发展起来的有限单元法，把连续弹性体划分成有限大小的单元构件，然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解，更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

此外，对同一结构的各个构件，甚至对同一构件的不同部分，分别用弹性力学和结构力学或材料力学进行计算，常常可以节省很多的工作量，而仍然得到令人满意的结果。

总之，材料力学、结构力学和弹性力学这三门学科之间的界线不是很明显的，更不是一成不变的。我们不应当强调它们之间的分工，而应当更多地发挥它们综合应用的威力，才能使它们更好地为我国的社会主义建设事业服务。

§ 1-2 弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、形变和位移。这些概念，虽然在材料力学和结构力学里都已经用到过，但在这里仍有再加以详细说明的必要。

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力，两者也分别简称为体力和面力。

所谓体力，是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力。物体内各点受体力的情况，一般是不相同的。为了表明该物体在某一点 P 所受体力的大小和方向，在这一点取物体的一小部分，它包含着 P 点而它的体积为 ΔV，图 1-1 a。设作用于 ΔV 的体力为 $\Delta \boldsymbol{Q}$，则体力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta V$。如果把所取的那一小部分物体不断减小，即 ΔV 不断减小，则 $\Delta \boldsymbol{Q}$ 和 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta V$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。现在，命 ΔV 无限减小而趋于 P 点，假定体力为连续分布，则 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta V$ 将趋于一定的极限 $\boldsymbol{F}$，即

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta V} = \boldsymbol{F}。$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{F}$，就是该物体在 P 点所受体力的集度。因为 ΔV 是标量，所以 $\boldsymbol{F}$ 的方向就是 $\Delta \boldsymbol{Q}$ 的极限方向。矢量 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影 X、Y、Z，称为该物体在 P 点的体力分量，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。它们的因次是[力][长度]$^{-3}$。

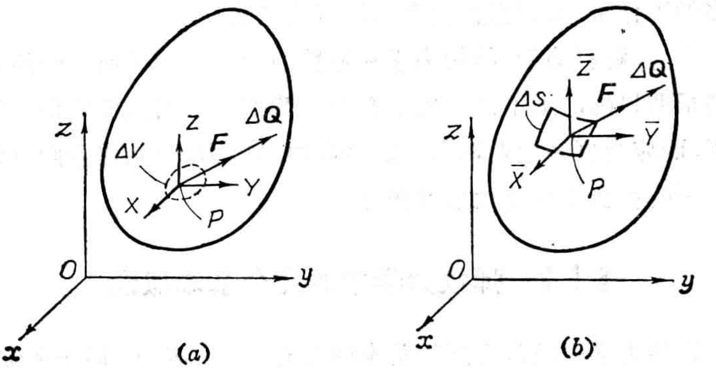

图 1-1

所谓面力，是分布在物体表面上的力，例如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受面力的情况，一般也是不相同的。为了表明该物体在其表面上某一点 P 所受面力的大小和方向，在这一点取该物体表面的一小部分，它包含着 P 点而它的面积为 ΔS，图 1-1 b。设作用于 ΔS 的面力为 $\Delta \boldsymbol{Q}$，则面力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta S$。与上相似，命 ΔS 无限减小而趋于 P 点，假定面力为连续分布，则 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta S$ 将趋于一定的极限 $\boldsymbol{F}$，即

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta S} = \boldsymbol{F}。$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{F}$ 就是该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔS 是标量，所以 $\boldsymbol{F}$ 的方向就是 $\Delta \boldsymbol{Q}$ 的极限方向。矢量 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影 $\bar{X}$、$\bar{Y}$、$\bar{Z}$，称为该物体在 P 点的面力分量，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。它们的因次是[力] [长

度]$^{-2}$。

物体受了外力的作用，或由于温度有所改变，其内部将发生内力。为了研究物体在其某一点P处的内力，假想用经过P点的一个截面mn将该物体分为A和B两部分，而将B部分撇开，图1-2。撇开的部分B将在截面mn上对留下的部分A作用一定的内力。取这一截面的一小部分，它包含着P点而它的面积为ΔA。设作用于ΔA上的内力为$\Delta \boldsymbol{Q}$，则内力的平均集度，即平均应力，为$\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta A$。

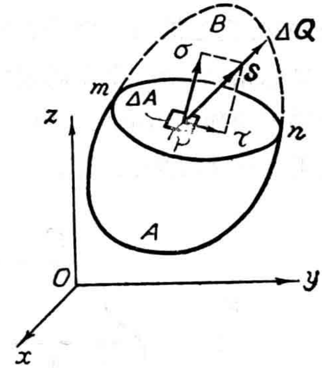

图 1-2

现在，命ΔA无限减小而趋于P点，假定内力为连续分布，则$\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta A$将趋于一定的极限$\boldsymbol{s}$，即

$$\lim_{\Delta A \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A}=\boldsymbol{s}。$$

这个极限矢量$\boldsymbol{s}$就是物体在截面mn上的、在P点的应力。因为ΔA是标量，所以应力$\boldsymbol{s}$的方向就是$\Delta \boldsymbol{Q}$的极限方向。

对于应力，除了在推导某些公式的过程中以外，通常都不用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量和物体的形变或材料强度都没有直接的关系。与物体的形变及材料强度直接相关的，是应力在其作用截面的法向和切向的分量，也就是正应力σ和剪应力τ，图1-2。应力及其分量的因次也是[力][长度]$^{-2}$。

显然可见，在物体内的同一点P，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从物体内取出一个微小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴而长度为$PA=\Delta x$、$PB=\Delta y$、$PC=\Delta z$，图1-3。将每一

面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个坐标角码。例如，正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上，同时也是沿着 x 轴的方向作用的。剪应力用 τ 表示，并加上两个坐标角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，剪应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的。

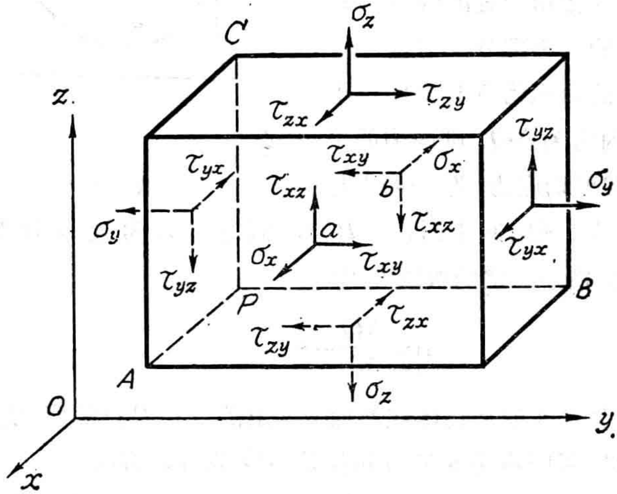

图 1-3

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图上所示的应力分量全部都是正的。注意，虽然上述正负号规定，对于正应力说来，结果是和材料力学中的规定相同(拉应力为正而压应力为负)，但是，对于剪应力说来，结果却和材料力学中的规定不完全相同。

六个剪应力之间具有一定的互等关系。例如，以连接前后两面中心的直线 ab 为矩轴，立出力矩平衡方程，得到

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2}-2\tau_{zy}\Delta y\Delta x\frac{\Delta z}{2}=0。$$

同样可以立出其余两个相似的方程。简化以后，得出

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}。\tag{1-1}$$

这就证明了剪应力的互等关系：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力，是互等的（大小相等，正负号也相同）。因此，剪应力记号的两个角码可以对调。

在这里，我们没有考虑应力由于位置不同而有的改变（也就是把六面体中的应力当做均匀应力），而且也没有考虑体力的作用。以后可见，即使考虑到应力随位置不同而有的改变，并考虑到体力的作用，仍然可以推导出剪应力的互等关系。

顺便指出，如果采用材料力学中的正负号规定，则剪应力的互等关系将成为

$$\tau_{yz}=-\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=-\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=-\tau_{yx},$$

显然不如采用上述规定时来得简单。但也应当指出，在利用莫尔圆（即应力圆）时，就必须采用材料力学中的规定。

以后可见，在物体的任意一点，如果已知 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy} 这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力。因此，上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

所谓形变，就是形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此，物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点 P 的形变状态，在这一点沿着坐标轴 x、y、z 的正方向取三个微小的线段 PA、PB、PC，图 1-3。物体