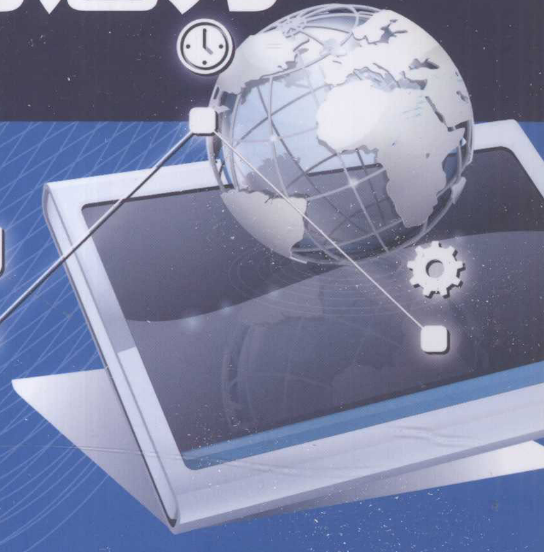
数学教师教育丛书

贾国涛 著

感悟 数学的魅力

GANWU SHUXUE DE MEILI



中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

数学教师教育丛书

感悟数学的魅力

贾国涛　编著

中国科学技术出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

感悟数学的魅力／贾国涛编著．—北京：中国科学技术出版社，2015.7

(数学教师教育丛书)

ISBN 978-7-5046-6953-7

Ⅰ.①感… Ⅱ.①贾… Ⅲ.①中学数学课—教学研究 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第127154号

策划编辑　王晓义
责任编辑　王晓义　徐木子
封面设计　孙雪骊
责任校对　何士如
责任印制　张建农

出　　版　中国科学技术出版社
发　　行　科学普及出版社发行部
地　　址　北京市海淀区中关村南大街16号
邮　　编　100081
发行电话　010-62103130
传　　真　010-62179148
投稿电话　010-62103347
网　　址　http://www.cspbooks.com.cn

开　　本　787mm×1092mm　1/16
字　　数　180千字
印　　张　11.5
印　　数　1—2000册
版　　次　2015年7月第1版
印　　次　2015年7月第1次印刷
印　　刷　北京京华虎彩印刷有限公司

书　　号　ISBN 978-7-5046-6953-7/G·685
定　　价　36.00元

《数学教师教育丛书》

编 委 会

序　言

近几年来,由于受形式主义、急功近利、浮躁情绪等不良之风的影响,应试教育的干扰,五花八门的中学教参层出不穷.从形式上看,确有"百花齐放,百家争鸣"的大好形势,但质量上令人担忧,甚至有人说,其中大部分是垃圾.虽然这种说法有些过于极端,但至少可反映出这些参考资料质量不高,社会效益差.近来笔者拜读了贾国涛老师《感悟数学的魅力》新作,却深感另有别样.其中我最欣赏的是他敬业的精神,对数学内在魅力的深刻体验.比如《美哉——微积分基本定理》《数学与地理的联系美》《三角形的重心之美》,等等.以上这些论述中,充分体现了作者一切为了学生的敬业精神及课堂教学的魅力.其实教育是一种崇高的育人事业,因此,教师在教育学生的同时,要不断地修炼自身的敬业精神,数学是一门科学,科学要真,特别是数学不仅要真,而且还要精、要准.因此这就要求教师要有扎扎实实的专业功底.教学是一门艺术,艺术贵在创新.我个人认为数学教学的创新,首先要体现在课堂教学中.具体地讲,教师要善于把抽象化、逻辑化、系统化的教科书知识,转化成生动的、形象的、过程化的、学生容易吸纳的知识,从而也可提升学生的学习兴趣和学习的主动性.读了这本书,使我对此有了更具体、更深入的体验.与此同时对中学教师的价值和使命有了进一步认识.

我与作者是在20世纪90年代初的一次学术研讨会上相识的,从此就开始我们在专业上的交往.十余年来,他为了实现自己的理想,一方面主动积极地不远千里求学、拜师;另一方面在教研实践中,扎扎实实地将教、学、研相融合.这里我要特别提到的是他还乐于阅读、善于创作.正因如此,他不仅课讲得生动,而且科研成果也多.在此期间,仅我看过他在有关学术刊物上发表的论文就不少.其实这本书就是以已发表的文章为基础的论文集.这也就是该书不同于有些"快餐"书的重要原因.

由此可见,《感悟数学的魅力》的出版,对广大读者特别是中学教师

而言,有其重要的现实意义.我深信通过阅读这本很有特色的书,至少对如何把自己造就成一个真正的优秀教师,又如何深入体验数学的内在魅力,使课堂更精彩等有很大的启迪.

王仲春

2014 年 5 月于西北师范大学

目　　录

第一部分　品味数学魅力——教材分析视角

第二部分　感悟数学力量——课堂教学视角

第三部分　体会数学精妙——问题解决视角

第一部分

品味数学魅力——教材分析视角

有人认为,数学难学,数学教材很难读懂;也有人认为,数学教材就像压缩饼干,越啃越有味道,魅力无穷.尽管教材编写者充分考虑了学生学习的困难,用循序渐进的方法,阐述了一个个抽象的数学问题,但由于学生的学习背景以及理解能力的差异,许多学生对数学课学得似懂非懂,一知半解,长此以往便产生畏惧心理.数学的学习,要读懂教材,须品味数学之魅力,理解数学之概念.对于较难的数学概念,尽可能由简入手,由浅入深,必将事半功倍.

《美哉——微积分基本定理》是从学生认知规律出发,将微积分基本定理进行了由浅入深的解读;《走进二维柯西不等式》则从不同角度对不等式进行了证明,并给出了该不等式在代数、三角、几何问题中的广泛应用.该部分文章都是对教材相应内容的纵深思考.《数学与地理的联系之美》将数学与地理学中的一些问题联系起来,深化了对地理的理解,也品味了数学的魅力.

1. 美哉——微积分基本定理

但凡学过微积分的人都知道微积分基本公式即牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式，即设 $F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$. 但对此公式的推导过程，许多人十分茫然，感到特别费解.

现行的高中教材(选修 2－2)及大学数学分析教材都有对该公式长篇的推导. 要问大家能否读懂，绝大多数人的回答是：很繁；光知道大概意思，特别是曲边梯形的面积怎么变成了 $F(b)-F(a)$，就很难理解. 大多数人只是会用公式求一些定积分.

如果我们仅会用公式而不知其过程与方法，我们就无法真正掌握其知识的内涵，更难享受学科之乐趣."是什么"重要，"为什么"更重要. 当我们掌握了一些原理，特别是搞明白"为什么"，必然使得我们对方法的使用更灵活，运用更熟练.

为了描述微积分基本公式的推导过程，我们先从定积分的定义说起. 先看大家熟悉的例子.

例 1　如图 1.1－1 所示，求直线 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 和曲线 $y=x^2$ 围成的图形的面积.

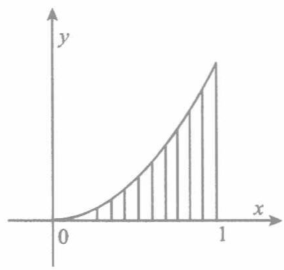


图 1.1－1

解：(1)将曲边梯形分割成 n 个小曲边梯形. 用分点

$$0=\frac{0}{n}<\frac{1}{n}<\cdots<\frac{i-1}{n}<\frac{i}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1$$

把区间 $[0,1]$ 等分成 n 个小区间，如图 1.1－1 所示，则每个小区间 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$，$\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$，…，$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$，…，$\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}\right]$ 的长度 $\Delta x=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}$，过各分点作 x 轴的垂线，把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，它们的面积分别记作 ΔS_1，ΔS_2，…，ΔS_i，…，ΔS_n.

(2)用小矩形的面积近似代替小曲边梯形的面积. 在小区间$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$上任取一点$\zeta(i=1,2,\cdots,n)$. 为了方便,取$\zeta$为小区间的左端点,用以点$\zeta_i$的纵坐标$f(\zeta_i)=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$为长,以小区间长度$\Delta x$为宽的小矩形面积近似代替小曲边梯形的面积,可以近似的表示为

$$\Delta S_i\approx f(\zeta_i)\cdot\Delta x=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n},(i=1,2,\cdots,n).$$

(3)求和

因为每一个小矩形的面积可以作为相应的小曲边梯形面积的近似值,所以n个小矩形的面积之和就是曲边梯形的面积和的近似值,即

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\cdot\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

(4)求和式的极限

当$n\to\infty$时,$\Delta x\to 0$. 和式的极限就是曲边梯形的面积,因为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{1}{n^3}[0+1^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},\text{故}S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta x=\frac{1}{3}.$$

类似的实际问题很多,我们抽象出一般思想,给出定积分的概念.

将函数$f(x)$给定的区间$[a,b]$等分成n个小区间,在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上取一点$\zeta_i(i=1,2,\cdots,n)$,作和式$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta x$($\Delta x$为小区间的长度),我们把$n\to\infty$时,$\Delta x\to 0$,和式$I_n$的极限叫作函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分,记作$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,即$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta x$.

定积分的定义给我们的感觉是分割、求和、取极限.

对于例1,问题不算十分复杂,如果遇到比较复杂的函数,分割、求和、取极限,说起来容易,做起来就难了.

例如求 $\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$，也就是求 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴围成的曲边梯形的面积. 先分割，问题不大，但求和难度很大，难以求出和，也就谈不上取极限了.

能否有简单方法呢？有！牛顿-莱布尼茨公式告诉了我们.

如果函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，并且导函数 $F'(x)=f(x)$，则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

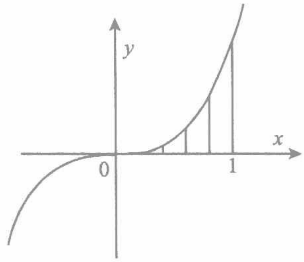


图 1.1－2

我们先从例 1 出发去研究. 根据定积分的概念. 例 1 中的曲边梯形的面积实际上就是求一个定积分，即 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$，结果为 $\frac{1}{3}$. 我们知 $\frac{1}{3}x^3$ 的导数 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$，即若 $F(x)=\frac{1}{3}x^3$，则 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\frac{1}{3}$.（图 1.1－2）

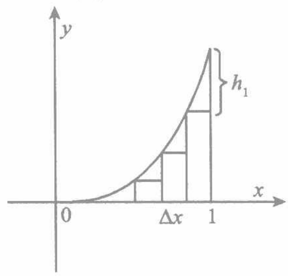


图 1.1－3

为什么恰好为 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=F(1)-F(0)$ 呢？

下面来究其原因.

作 $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ 的图像，如图 1.1－3 所示，将 $[0,1]$ 呈 n 等分，

$$F(1)-F(0)=\left[F(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]+\left[f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f\left(\frac{n-2}{n}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-F(0)\right].$$

这就相当于我们把 $F(1)-F(0)$ 分割成 n 段，也就是 n 个小台阶 $h_1,h_2,\cdots,h_n$. 记任一小台阶 $F(x_i)-F(x_{i-1})=h_i$，而 $h_i\approx f(x_{i-1})\cdot\Delta x_i=x_{i-1}\cdot\Delta x_i$，

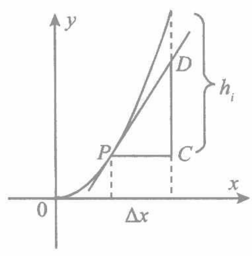


图 1.1－4

如图 1.1－4 所示，$F(1)-F(0)=h_1+h_2+\cdots+h_n=\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}F'(x_{i-1})\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i-1}\cdot\Delta x_i$，求极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}x^2\cdot\Delta x_i$，根据定积分的定义，它就是$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

一般地，若函数$F(x)$在$[a,b]$上的导数为$f(x)$，即$F'(x)=f(x)$，也就是说$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(b)-F(a)=h_1+h_2+\cdots+h_n$，$h_i\approx f(x_{i-1})\cdot\Delta x_i$，则$F(b)-F(a)=\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}F'(x_{i-1})\cdot\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\cdot\Delta x_i=\int_a^b f(x)\Delta x$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}F'(x)\cdot\Delta x_i=\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，也就是函数$y=f(x)$与两条直线$x=a$，$x=b$围成的曲边梯形的面积恰为原函数两端点的纵坐标之差.

多么奇妙的结论啊！

此定理被称为微积分基本定理，在高等数学、物理中有广泛地应用.这里先谈一个在物理上的运用.

设一物体做匀变速直线运动，其位移为t的二次函数$s=2t^2+1$，则从$t=2$到$t=5$时，位移是多少？

此问题太容易了，即$s(5)-s(2)=51-9=42$.

根据导数的定义，速度为$S'(t)=4t=v(t)$，如果先知道其速度为$v(t)=4t$，求2秒到5秒时其位移为多少时，由于是匀变速运动，我们只有先分割、求和、取极限，显得很繁. 如果利用$\int_2^5 4x\mathrm{d}x=42$来的十分快捷. 也就是速度对于时间的积分成了位移，而位移对时间的导数为速度. 我们马上对此定理理解了，不仅理解得深，记得牢，还能熟练应用.

函数$y=x$与$y=0$，$x=1$围成的区域面积为$\frac{1}{2}$，

函数$y=x^2$与$y=0$，$x=1$围成的区域面积为$\frac{1}{3}$，

函数$y=x^3$与$y=0$，$x=1$围成的区域面积为$\frac{1}{4}$，

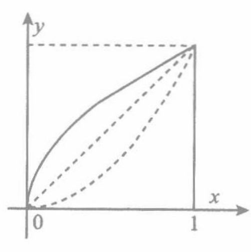


图 1.1－5

如图1.1－5所示. 依次类推

$y=x^n(n>1)$与$y=0,x=1$围成的区域的面积为$\frac{1}{n+1}$;

但$y=x^{\frac{1}{2}}$与$y=0,x=1$围成的区域面积为$\frac{2}{3}$,又$\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$;

故$y=x^n(n>0)$与$y=0,x=1$围成的区域的面积为$\frac{1}{n+1}$.

2. 数学与地理的联系之美

我们知道，地球在绕太阳旋转，同时地球也在不停地自转. 自转的轴即南北极的连线与地球公转的轨迹平面的夹角为66°34′，而赤道平面与黄道平面的夹角始终为23°26′（准确为23°26′12″，本文按23°26′讨论）. 那么春夏秋冬是怎样形成的呢？（图1.2－1）

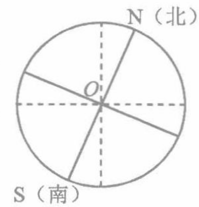


图1.2－1

我们可做形象的比喻. 我们把地球看作人的上半身材（北极为头，南极为屁股），则在不同的季节，太阳光直射点在赤道的南北移动.

当夏至时，太阳直射在地球的上腰部，头部为极昼.

秋分时，太阳的直射点为赤道，即地球的腰.

冬至时，太阳直射到地球的下腰部，屁股为极夜.

春分时，直射点又到地球的腰.

直射的南北偏移，形成了春夏秋冬（图1.2－2）.

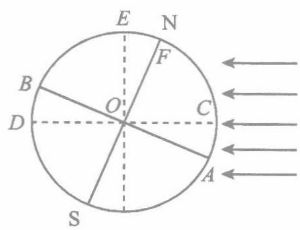


图1.2－2

当夏至时，为何到北回归线23°26′呢？

太阳光线的直射点在C点，AB为地球赤道平面的直径，也就是$\angle AOC=23°26'$. 用数学的方法证明极为容易，由于$AO\perp OF$，$OC\perp OE$，也就是$\angle AOC$的两边与$\angle FOE$的两边分别垂直，所以$\angle AOC=23°26'$.

当冬至时，太阳光线直射到D点，同理，可得$\angle DOB=\angle EOF$（图1.2－3）.

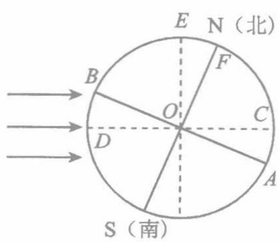


图1.2－3

还有一个十分有趣的现象. 就是地球上不同的季节正午太阳光与地面的夹角，即可视角的问题，对于学地理的学生来讲，难度比较大，若用数学的方法去研究，会变得简单了许多.

例如，地球上某地在北纬 35°，求夏至、冬至、春分、秋分时太阳正午可视角.

设所求地为点 M，要求太阳光线与地面的夹角，过点 M 作地球的切线，则光线与地面的夹角为光线与切线所夹的角.

设切线与光线的交点为 N，由平行线的性质可知 $\angle ONM$ 为所求角. 另外，$\triangle OMN$ 为直角三角形. 所以 $\angle ONM=90°-(35°-23°26')=78°26'$（图1.2－4）.

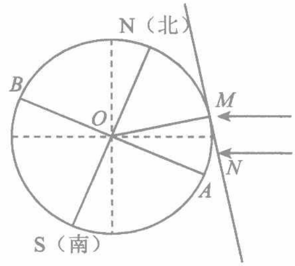


图 1.2－4

因此，该地区在夏至时，太阳正午的可视角为 78°26′，类似地，还可得出，该地区在冬至时太阳的可视角. 我们仍过 M 点作地球的切线与太阳直射光线的交点为 N，则 $\angle ONM=90°-(35°+23°26')=31°34'$.

在该季节，当点 M 向北移动时，太阳光线与地面的夹角 $\varphi=90°-(\alpha-\theta)$，$\varphi$ 为当地正午太阳高度角，α 为当地纬度，θ 为直射点纬度，以北纬为正，以南纬为负越来越小，在到达 E 点时，即北纬 66°34′（90°－23°26′）时，光线与地面相切，阴影部分无法看到太阳，进入极夜状态. 当太阳直射回归线时，极昼、极夜范围最大.（图 1.2－5）

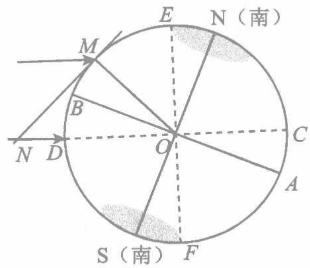


图 1.2－5

同样，在夏至时，南纬 66°34′以南进入极夜状态.

据说，在欧洲北部，冬天光照时间很短，夜很长，接近 20 个小时，人们常常围着火炉与蜡烛，听老人讲故事，许多故事经过加工整理，就成了童话了. 在冬至左右，许多北欧人选择了去赤道附近的海滩上晒太阳. 在 2004 年 2 月 26 日，印度洋发生特大海啸，除本地的居民外，很多不幸的遇难者是来自北欧国家.