线性代数

田俊忠　编著

科学出版社

线 性 代 数

田俊忠 编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书融入数学建模的思想，研究了线性代数的新体系. 以线性方程组的求解问题作为问题驱动，循序渐近地展开矩阵的基本运算(线性运算、乘积、转置、逆与分块)、行列式运算与初等变换运算，并用矩阵的秩理论统一处理了向量的线性相关性问题与二次型的化简；以矩阵多项式的计算问题作为问题驱动，展开矩阵的特征值与特征向量理论，从而解决矩阵的相似对角化问题；以矩阵、向量、多项式和函数等对象共同的线性运算性质为直观背景，简单地介绍了线性空间与线性变换的有关内容. 全书注重通过问题驱动展开内容，既保持了内容的科学性与系统性，又强调了概念产生的应用背景，循序渐近，以利于读者更好地理解和掌握代数理论，提高应用代数方法解决实际问题的能力. 每章配备精选习题，以供掌握内容训练之用.

本书可作为理工类、经管类、医药类和农林类等专业的线性代数教材，也可供报考硕士研究生复习之用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/田俊忠编著. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-033867-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①田… Ⅲ. ①线性代数 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 044198 号

责任编辑：相 凌 唐保军／责任校对：郑金红

责任印制：张克忠／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2012 年 3 月第一次印刷 印张：14 1/4

字数：280 000

定价：26.00 元

前　言

线性代数是理工类、经济管理类专业本科生的一门重要数学基础课程, 是学生学习后续专业课程的数学工具, 对于培养学生的抽象思维能力和计算能力具有十分重要的基础性作用. 作者经过 30 年的执教探索, 在理论体系方面进行了新的思考, 与其他同类书相比, 本书具有以下新的特点:

(1) 以线性方程组为主线, 从提出问题、分析问题到解决问题, 逐步展开矩阵、行列式、矩阵的初等变换与 n 维向量, 直至线性方程组的完美解决. 形成了本书前四章中的矩阵、行列式和 n 维向量三大理论知识和数学工具.

(2) 以矩阵计算为问题, 从提出问题、分析问题到解决问题, 逐步展开特征值与特征向量理论.

(3) 从具体到抽象, 引入线性空间与线性变换, 概括矩阵、矢量、n 维向量、多项式、函数等对象共同的线性运算本质, 上升到线性空间.

(4) 进程安排与叙述方式上先易后难, 循序渐进. 矩阵理论部分, 矩阵的概念与基本运算先于行列式, 初等变换运算后于行列式. 通过各方面的实例先建立矩阵的概念, 把矩阵运算与向量组的线性相关性和线性方程组的某个变形紧紧地联系起来. 向量组的线性相关性是个难关, 本书先分析矢量的运算性质, 作为 n 维向量空间理论的直观, 使抽象与具体直观相呼应.

(5) 在概念的处理上, 把矩阵作为最高工具, 行列式作为矩阵的行列式 (或子式), 线性方程组、n 维向量组、二次型、线性变换等都可由矩阵表示. 把矩阵的秩作为核心概念来处理, 用矩阵的秩统一定义向量组的秩、二次型的秩.

基于以上特点, 本书整个理论体系相关定理的表述与证明发生了变化, 更为清晰、简洁、严谨. 易于学生从整体上把握, 使知识体系容易联系起来.

书中精选了较多的典型例题, 每章配备了相应的习题, 例题和习题是训练内容所必需的, 部分习题是内容的有益补充.

本书从设想、构思到撰写出版得到了科学出版社的大力支持, 在此表示感谢; 书稿的讨论承蒙数学教研室同行的厚爱, 提出了许多宝贵的意见, 在此一并致谢. 同时感谢科学出版社的相凌与马玉龙两位同志, 他们在本书的编辑和策划方面做了

大量工作.

书中难免有不足之处, 恳请同行和读者批评指正.

田俊忠

2011 年 12 月于北方民族大学基础教学部

目　录

第一章 矩阵及其基本运算

矩阵是线性代数的一个最基本的概念, 矩阵的运算是线性代数的基本内容, 在数学科学、自然科学、工程技术、生产实践与科学实验、经济管理以及社会科学中有非常广泛的应用. 本章正是从实际问题出发, 引出矩阵的概念, 然后介绍矩阵的基本运算, 包括线性运算、乘法、转置、求逆与分块.

§1 矩阵的基本概念

一、引例

引例 1.1 在日常生活和工作中, 研究对象的属性数据统计表时刻出现在我们身边. 例如, 某个班级学生各门课程的考试成绩统计表如表 1.1 所示.

表 1.1 考试成绩统计表

姓名 \ 课程	数学	物理	化学	英语	计算机
张刚	98	90	87	72	94
王萍	88	94	84	98	90
李丽	92	91	88	80	78
武川	86	96	85	84	92

如果将学生标号为 1, 2, 3, 4, 将课程编号为 1, 2, 3, 4, 5, 则成绩统计表可以用对应的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

来表示, 其中 a_{ij} 表示第 i 个学生的第 j 门课程的考试成绩.

引例 1.2 事物的存在与发展总是处在相互联系中, 事物与事物之间的联系有数量上的表现, 称之为流量. 流量的分布可以用对应的矩形数表来表示. 例如, 国民经济投入产出表, 设有 n 个生产部门, 编号分别为 $1, 2, \cdots, n$, 用 a_{ij} 表示第 j 个生产部门生产一个单位的产品时所消耗的第 i 个生产部门生产的产品数量, 则国民经济部门之间的经济技术联系可以用相应的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

来表示.

引例 1.3　4 个城市间的通航线如图 1.1 所示. 其中 $i=1,2,3,4$ 表示城市的代码, 它们之间的连线和箭头表示城市之间航线的线路与方向. 若令

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{从城市 } i \text{ 到城市 } j \text{ 有一条航线}, \\ 0, & \text{从城市 } i \text{ 到城市 } j \text{ 没有航线}, \end{cases} \quad 1 \leqslant i,j \leqslant 4,$$

则 4 个城市之间的航线图对应于一个 4 行 4 列的矩形表格. 若记 $A=(a_{ij})$, 则

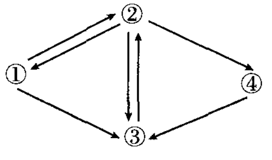

图 1.1

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

反映了 4 个城市的通航情况.

引例 1.4　在平面解析几何中, 当坐标轴逆时针方向旋转 θ 角时, 新旧坐标之间存在如下的变换公式:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{cases}$$

显然. 这种新旧坐标之间的关系完全可以由公式中的系数所构成的数表

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

确定.

引例 1.5　三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

将方程组的系数与常数项按照原来的位置排成 3 行 4 列的矩形表格

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix},$$

则线性方程组可由对应的矩形表来表示.

二、矩阵的定义

定义 1.1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称之为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵. 为了表示它是一个整体, 总是加一个括弧, 并用大写黑体字母表示, 记作

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

这 $m \times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素, 数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元. $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为实矩阵, 元素是复数的矩阵称为复矩阵. 本书中的矩阵除特别说明外, 都指实矩阵.

当 $m=n$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 称为 n 阶方阵, 记为 $\boldsymbol{A}_n$, 即

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

第 i 行第 i 列的元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 称为主对角线元素, 第 i 行第 $n+1-i$ 列的元素 $a_{i,n+1-i}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的副对角线元素.

当 $n=1$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times 1}$ 称为 m 维列向量, 常用希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 表示. 记为

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

当 $m=1$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}_{1\times n}$ 称为 n 维行向量, 记为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

当 $m=n=1$ 时, 得到一个 1×1 的矩阵 $\boldsymbol{A}_{1\times 1}=(a_{11})$, 也记作 a_{11}.

对于两个矩阵, 若行数相等且列数也相等, 则称它们为同型的. 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 同型, 并且它们的对应元素相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij},\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n,$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等, 记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

元素均为零的矩阵为零矩阵, 记为 $\boldsymbol{O}$.

注意: 不同型的零矩阵是不相等的.

矩阵的应用非常广泛, 下面仅举几个例子.

例 1.1　将某种物资从 m 个产地 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 运往 n 个销售地 $B_1,B_2,\cdots,B_n$, 用 a_{ij} 表示由产地 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 运往销售地 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的物资数量, 则调运方案可用矩阵 (1.1) 来表示. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

例 1.2　一组 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与另一组 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \qquad\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1.2}$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换, 其中 a_{ij} 为常数 $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$.

给定了线性变换 (1.2), 它的系数所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 也就确定了. $\boldsymbol{A}$ 称为线性变换 (1.2) 的系数矩阵. 反之, 如果给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵, 则线性变换也就确定了. 因此, 线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

三、几种特殊矩阵

1. 单位矩阵

若由 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到另外 n 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的线性变换为恒等变换, 即有

$$\begin{cases} y_1=x_1, \\ y_2=x_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ y_n=x_n, \end{cases}$$

则它的系数矩阵为

$$E=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix},$$

从左上角到右下角的直线 (称为主对角线) 上的元素都为 1, 其他元素都为零.

2. **对角矩阵**

线性变换

$$\begin{cases}y_1=\lambda_1x_1,\\y_2=\lambda_2x_2,\\\quad\cdots\cdots\\y_n=\lambda_nx_n,\end{cases}$$

对应的系数矩阵为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix},$$

称之为对角矩阵, 其特点是不在主对角线上的元素全为零. 对角矩阵可记为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 时, 称之为数量矩阵. 即

$$\lambda E=\begin{pmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\0&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{pmatrix}.$$

3. **三角矩阵**

若一个方阵的主对角线下方的元素全为零. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

则称之为上三角矩阵, 即当 $i>j$ 时, $a_{ij}=0$.

类似地, 若一个方阵主对角线上方的所有元素均为零, 则

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

称为下三角矩阵, 即当 $i<j$ 时, $a_{ij}=0$.

上、下三角矩阵统称为三角矩阵.

4. 行阶梯矩阵

若能画出一条阶梯线, 折线下方的元素全为零, 每个台阶只有一行, 台阶数即为非零行的行数, 竖线后面的第一个元素为非零元, 也就是非零行的第一个非零元, 这样的矩阵称为行阶梯矩阵. 例如,

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

5. 行最简形矩阵

对于一个行阶梯矩阵, 若非零行的第一个非零元为 1, 并且非零首元所在的列中其余元素全为零, 则称这样的行阶梯矩阵为行最简形矩阵. 例如,

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

6. 标准形矩阵

对于一个行阶梯形矩阵, 若非零行的第一个非零元为 1, 其他位置上的元素都为零, 并且非零首元所在的列中其余元素也为零, 则这样的矩阵称为标准形矩阵, 记为 $\boldsymbol{F}$, 即

$$
\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.
$$

显然, 单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 是标准形矩阵.

§2 矩阵的线性运算

矩阵之所以重要是由于在矩阵中引入运算, 使之反映了某类事物的客观规律. 矩阵的运算是矩阵理论的基石, 我们从矩阵的运算开始研究矩阵理论, 首先介绍矩阵的基本运算.

一、矩阵的加法

定义 1.2 设有同型的两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, 我们把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+a_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

容易证明, 矩阵加法满足下列运算规律:

定理 1.1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 均为同型的 $m\times n$ 矩阵, 则有

(1) 交换律: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) 结合律: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵. 显然有

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

由此定义矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

二、矩阵的数乘

定义 1.3 设 λ 是常数, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 则矩阵

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积, 简称矩阵的数乘.

由定义 1.3 可以证明, 矩阵的数乘运算满足下列运算规律:

定理 1.2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵, λ,μ 为数, 则有

(5) $1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$;

(6) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A}) = \mu(\lambda\boldsymbol{A})$;

(7) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{A}$;

(8) $\lambda(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B}$.

矩阵的加法与数乘结合起来称为矩阵的线性运算.

§3　矩阵的乘积

一、问题的引入

设有两个线性变换, 已知从变量 x_1, x_2 到变量 u_1, u_2, u_3 的线性变换为

$$T_1: \begin{cases} u_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ u_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2, \\ u_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2, \end{cases} \tag{1.3}$$

它所对应的矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

又已知从变量 u_1, u_2, u_3 到变量 y_1, y_2 的线性变换为

$$T_2: \begin{cases} y_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3, \\ y_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3, \end{cases} \tag{1.4}$$

它所对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

那么由变量 x_1, x_2 到变量 y_1, y_2 的线性变换是什么? 此线性变换所对应的矩阵又是什么?

要想求出从 x_1, x_2 到 y_1, y_2 的线性变换, 可将式 (1.3) 代入式 (1.4), 从而得到

$$T: \begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})x_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})x_2, \end{cases}$$

它所对应的矩阵记为 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$. 则

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

线性变换 T 可以看成是先作线性变换 T_1, 再作线性变换 T_2 的结果. 将线性变换 T 称为线性变换 T_2 与线性变换 T_1 的乘积, 记作

$$T = T_2T_1.$$

相应地, 将线性变换 T 所对应的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 定义为线性变换 T_2 所对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与线性变换 T_1 所对应的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积, 即

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB},$$

所以有

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

二、矩阵乘积的定义

一般地, 有如下定义:

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是一个 $m \times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是一个 $s \times n$ 矩阵, 则规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$, 其中

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} \\
&= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n,
\end{aligned}$$

并把此乘积记作

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}.$$

按定义 1.4, 一个 $1 \times s$ 行向量与一个 $s \times 1$ 列向量的乘积是一个数, 即

$$\begin{aligned}
(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} \\
&= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

因此, 矩阵的乘法规则可表示如下:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{is}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & \boxed{b_{2j}} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \boxed{\vdots} & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & \boxed{b_{sj}} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

由此表明, 乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 的 (i,j) 元 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的乘积. 需要特别注意的是, 只有当左矩阵的列数与右矩阵的行数相等时, 两个矩阵才能相乘.

例 1.3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求矩阵的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解　由于 $\boldsymbol{A}$ 是 2×4 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数, 所以 $\boldsymbol{AB}$ 有意义. 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 是 2×3 矩阵. 设

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

根据式 (1.5) 有

$$c_{11}=(2,\ 0,\ -3,\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}=-13,$$

$$c_{12}=(2,\ 0,\ -3,\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=2,$$

$$c_{13}=(2,\ 0,\ -3,\ 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=7,$$

$$c_{21}=(5,\ 1,\ 0,\ 4)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}=9,$$