Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题全解 2

原题译自俄文第13版

最新校订本

南京大学数学系

廖良文 许宁 编著

一元函数的微分学

A·P·G 安徽出版集团

安徽人民出版社

ANHUI PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析
习题全解
（二）

南京大学数学系
廖良文　许　宁　编著
杨立信　译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解. 2/(苏)吉米多维奇著. 廖良文,许宁编著. 一合肥:安徽人民出版社,2005

ISBN 978-7-212-02696-7

Ⅰ.吉… Ⅱ.①吉…②廖…③许… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题Ⅳ.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113599 号

吉米多维奇数学分析习题全解(二)

(苏)吉米多维奇　著　廖良文　许　宁　编著　杨立信　译

责任编辑　王玉法　　**封面设计**　王国亮

出版发行　安徽人民出版社

发 行 部　0551-3533258　　0551-3533292(传真)

经　　销　新华书店

印　　刷　南京新洲印刷有限公司

开　　本　880×1230　1/32　**印张**　14.5　**字数**　350 千

版　　次　2010 年 1 月第 3 版(最新校订本)

标准书号　ISBN978-7-212-02696-7

定　　价　20.00 元

前 言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》，以俄文第 13 版（最新版本）为基础，新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，共计有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考，应安徽人民出版社的同志邀请，我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定，深受读者喜爱，畅销不衰。此次再版，我们纠正了前一版中存在的个别错误，对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意！

由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

目　录

第二章 一元函数的微分学

§1. 显函数的导数

1. 导数的定义

如果 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值，则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称作函数 $y = f(x)$ 的增量.

表达式：$y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ①

若有意义，则称为导函数，而函数 $f(x)$ 本身在此情况下称作可微分的函数.

导数 $f'(x)$ 在几何上为函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率[$\tan\alpha = f'(x)$].（图 6）

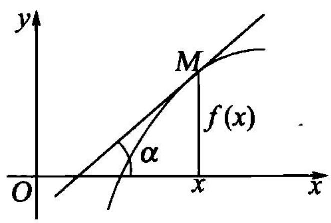

图 6

2. 求解导数的基本规则

如果 c 是常数且函数

$$u = u(x), v = v(x), w = w(x),$$

都有导数，则

(1) $c' = 0$；

(2) $(cu)' = cu'$；

(3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$；

(4) $(uv)'=u'v+v'u$;

(5) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq0)$;

(6) $(u^n)'=nu^{n-1}u'$(n 为常数);

(7) 如果函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 都有导函数,则

$y'_x=y'_u u'_x$.

3. 基本公式

设 x 是自变数,则

(1) $(x^n)'=nx^{n-1}$(n 为常数).

(2) $(\sin x)'=\cos x$.

(3) $(\cos x)'=-\sin x$.

(4) $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

(5) $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

(6) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(7) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(8) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

(9) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

(10) $(a^x)'=a^x\ln a(a>0),(e^x)'=e^x$.

(11) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\quad(a>0$,且 $a\neq1)$;

$(\ln x)'=\frac{1}{x}\quad(x>0)$.

(12) $(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x$.

(13) $(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x$.

(14) $(\operatorname{th}x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

(15) $(\mathrm{cth}x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

4. 单侧导数

表达式 $f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,

及 $$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

分别称作函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数.

导数 $f'(x)$ 的存在充要条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5. 无穷导数

如果在点 x 函数 $f(x)$ 是连续的,且

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x 有无穷的导函数. 在这种情况下函数 $y = f(x)$ 的图形在点 x 的切线与 Ox 轴垂直.

【821】 如果 x 由 1 变到 1000,求出自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \lg x$ 的对应增量 Δy.

解 $\Delta x = 1000 - 1 = 999$,

$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3$.

【822】 如果 x 由 0.01 变到 0.001,求出自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \dfrac{1}{x^2}$ 的对应增量 Δy.

解 $\Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009$,

$$\Delta y = \frac{1}{0.001} - \frac{1}{0.01} = 900.$$

【823】 若(1) $y = ax + b$;

(2) $y = ax^2 + bx + c$;

(3) $y = a^x$.

变量 x 有增量 Δx,求出增量 Δy.

解 (1) $\Delta y = [a(x+\Delta x) + b] - [ax + b]$

$= a\Delta x$.

(2) $\Delta y=[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+C]-[ax^2+bx+C]$

$$=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2.$$

(3) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$.

【824】 证明:(1) $\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$;

(2) $\Delta[f(x)g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

证 (1) $\Delta[f(x)+g(x)]$

$$\begin{aligned}&=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]\\&=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]\\&=\Delta f(x)+\Delta g(x).\end{aligned}$$

(2) $\Delta[f(x)g(x)]$

$$\begin{aligned}&=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\\&=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)\\&\quad+f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]\\&=\Delta f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\Delta g(x).\end{aligned}$$

【825】 经过曲线 $y=x^2$ 上的两个点 $A(2,4)$ 及 $A'(2+\Delta x,4+\Delta y)$ 引出割线 AA',求此割线的斜率,若(1) $\Delta x=1$;(2) $\Delta x=0.1$;(3) $\Delta x=0.01$;(4) Δx 为任意小.

已知曲线在点 A 上的切线的斜率等于多少?

解 割线 AA' 的斜率为

$$k_{AA'}=\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4+\Delta x,$$

(1) $k_{AA'}=5$, (2) $k_{AA'}=4.1$,

(3) $k_{AA'}=4.01$, (4) $k_{AA'}=4+\Delta x$.

于是,在 A 点的切线斜率为

$$k_A=\lim_{A'\to A}k_{AA'}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4,$$

【826】 利用函数 $y=x^3$ 将 Ox 轴上的线段 $1\leqslant x\leqslant 1+h$ 映射到 Oy 轴上. 求其平均的伸长系数. 若(1) $h=0.1$;(2) $h=0.01$;(3) $h=0.001$,求出上述系数的值. 又当 $x=1$ 时,伸长系数等于多少?

解 平均伸长系数为

$$\overline{L}=\frac{(1+h)^3-1}{h}=3+3h+h^2$$

(1) $\overline{L}=3+3\cdot(0.1)+(0.1)^2=3.31$;

(2) $\overline{L}=3+3\cdot(0.01)+(0.01)^2=3.0301$;

(3) $\overline{L}=3+3\cdot(0.001)+(0.001)^2=3.003001$.

于是，在点 $x=1$，伸长系数为

$$L\big|_{x=1}=\lim_{h\to0}\overline{L}=\lim_{h\to0}(3+3h+h^2)=3.$$

【827】 某点沿 Ox 轴运动的规律用下式表示：

$$x=10t+5t^2,$$

其中 t 表时间(以秒计)；x 表距离(以米计).

求出在时间 $20\leqslant t\leqslant 20+\Delta t$ 内某点的平均运动速度，若：(1) $\Delta t=1$；(2) $\Delta t=0.1$；(3) $\Delta t=0.01$. 计算此平均速度的值当 $t=20$ 时其运动速度等于多少？

解 平均速度为

$$\overline{v}=\frac{[10(20+\Delta t)+5(20+t)^2]-[10\times20+5\times20^2]}{\Delta t}$$

$$=210+5\Delta t,$$

(1) $\overline{v}=210+5\times1=215$(米/秒)，

(2) $\overline{v}=210+5\times0.1=210.5$(米/秒)，

(3) $\overline{v}=210+5\times0.01=210.05$(米/秒)，

于是当 $t=20$ 时运动的速度为

$$v\big|_{t=20}=\lim_{\Delta t\to0}\overline{v}=\lim_{\Delta t\to0}(210+5\Delta t)=210(\text{米}/\text{秒}).$$

【828】 根据导数的定义，直接求出以下函数的导数：(1) x^2；(2) x^3；(3) $\dfrac{1}{x}$；(4) $\sqrt{x}$；(5) $\sqrt[3]{x}$；(6) $\tan x$；(7) $\cot x$；(8) $\arcsin x$；(9) $\arccos x$；(10) $\arctan x$.

解 (1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$，

于是 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(2x+\Delta x)=2x$.

(2) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

(3) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

(4) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x > 0).$$

(5) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x+\Delta x)x} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad (x \neq 0).$$

(6) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\tan x + \tan\Delta x}{1 - \tan x\tan\Delta x} - \tan x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\tan\Delta x(1 + \tan^2 x)}{\Delta x(1 - \tan x\tan\Delta x)}$$

$$= 1 + \tan^2 x = \sec^2 x.$$

(7) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\cot(x+\Delta x) - \cot x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\tan x - \tan(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\tan x\tan(x+\Delta x)}$$

$$= -\sec^2 x \cdot \frac{1}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

(8) 由三角函数公式有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x+\Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\cdot x\right]}{\Delta x}.$$

令　$t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\,x$,

则当 $\Delta x\to 0$ 时,$t\to 0$. 从而

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2(1-x^2)-x^2\left[1-(x+\Delta x)^2\right]}{\Delta x\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\right]}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

其中　$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1.$

(9) 由三角函数公式,有

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arccos(x+\Delta x)-\arccos x}{\Delta x}\\
&= \frac{\arcsin\left[x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}\right]}{\Delta x}.
\end{aligned}$$

令　$t=x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}$,

则当 $\Delta x\to 0$ 时,$t\to 0$. 于是

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x-\Delta x}{x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}+(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

(10) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\arctan(x+\Delta x)-\arctan x}{\Delta x}$

$$=\frac{\arctan\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arctan\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)},$$

于是 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arctan\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{1}{1+x^2},$$

其中利用$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arctan t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\tan u}=1$.

【829】 若 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

求 $f'(1),f'(2),f'(3)$.

解 $f'(x)=(x-2)^2(x-3)^3+2(x-1)(x-2)(x-3)^3$

$$+3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$$

$$=2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9).$$

于是 $f'(1)=(-1)^2(-2)^3=-8$,

$f'(2)=f'(3)=0$.

【830】 若:$f(x)=x^2\sin(x-2)$,求 $f'(2)$.

解 $f'(x)=2x\sin(x-2)+x^2\cos(x-2)$,

于是 $f'(2)=2^2\cos 0=4$.

【831】 $f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$,求 $f'(1)$.

解 法一:

$$f'(x)=1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}},$$

所以　$$f'(1)=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\pi}{4}.$$

法二：当 $x=1$ 时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\Delta x+\Delta x\arcsin\sqrt{\dfrac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}}{\Delta x}$$

$$=1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

于是　$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)$$

$$=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\pi}{4}.$$

【832】　若函数 $f(x)$ 在点 a 可微分，求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

解　设 $x-a=\Delta x$，则当 $x\to a$ 时，$\Delta x\to 0$，于是

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a).$$

【833】　证明：如果函数 $f(x)$ 可微分，且 n 为自然数，则

$$\lim_{x\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x),\qquad ①$$

反之，如果对于函数 $f(x)$ 存在极限 ①，能否断定此函数有导数？

研究狄利克雷函数的例子（参阅第一章，题 734）.

证　$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)}{\dfrac{1}{n}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

反之，$f(x)$ 不一定可导. 例如，对于狄利赫列函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

在任一有理数点是不连续，当然在这些点也不可导. 但当 x 为有理数时，$x+\frac{1}{n}$ 仍为有理数，故

$$\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)=1-1=0 \qquad (x \text{ 为有理数}),$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}n\left[\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)\right]=0.$$

利用导数表，求下列函数的导函数(834 ～ 843).

【834】 $y=2+x-x^2$，

问 $y'(0)$；$y'\left(\frac{1}{2}\right)$；$y'(1)$；$y'(-10)$ 等于多少?

解 $y'(x)=1-2x$，

所以 $$y'(0)=1, y'\left(\frac{1}{2}\right)=0,$$
$$y'(1)=-1, y'(-10)=21.$$

【835】 $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$

问 x 为何值时：

(1) $y'(x)=0$；(2) $y'(x)=-2$；(3) $y'(x)=10$.

解 $y'(x)=x^2+x-2$.

(1) 由 $y'(x)=0$，得
$$x^2+x-2=0.$$
解之得 $x=-2$ 或 $x=1$；

(2) 由 $y'(x)=-2$，得
$$x^2+x=0.$$
解之得 $x=-1$ 或 $x=0$，

(3) 由 $y'(x)=10$，得
$$x^2+x-12=0.$$
解之得 $x=-4$ 或 $x=3$.

【836】 $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$.

解 $y' = 10a^3x - 5x^4$.

【837】 $y = \dfrac{ax+b}{a+b}$.

解 $y' = \dfrac{a}{a+b}$.

【838】 $y = (x-a)(x-b)$.

解 $y' = (x-b)+(x-a) = 2x-(a+b)$.

【839】 $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

解
$$\begin{aligned}
y' &= (x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^3 \\
&\quad + 3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2 \\
&= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3) \\
&\quad + 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2)] \\
&= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9).
\end{aligned}$$

【840】 $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

解
$$\begin{aligned}
y' &= \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha) + (x\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha \\
&= x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha.
\end{aligned}$$

【841】 $y = (1+nx^m)(1+mx^n)$.

解
$$\begin{aligned}
y' &= mnx^{m-1}(1+mx^n) + (1+nx^m)n \cdot mx^{n-1} \\
&= mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (n+m)x^{n+m-1}].
\end{aligned}$$

【842】 $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

解
$$\begin{aligned}
y' &= -(1-x^2)^2(1-x^3)^3 - 4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3 \\
&\quad - 9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2 \\
&= -(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x)^2(1+6x+15x^2+14x^3) \\
&= -(1-x)^5(1+x)(1+2x) \cdot \\
&\quad (1+4x+7x^2)(1+x+x^2)^2.
\end{aligned}$$

【842.1】 $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$.

解
$$\begin{aligned}
y' &= 20(5+2x)^9(3-4x)^{20} - 80(5+2x)^{10}(3-4x)^{19} \\
&= 20(5+2x)^9(3-4x)^{19} \cdot [3-4x-4(5+2x)] \\
&= -20(12x+17)(5+2x)^9(3-4x)^{19}.
\end{aligned}$$

【843】 $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$.

解 $y'=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{9}{x^4}\right)\qquad(x\neq 0).$

【844】 证明公式：

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

证 $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'$

$$=\frac{(ax+b)'(cx+d)-(ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{a(cx+d)-(ax+b)\cdot c}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}\qquad(cx+d\neq 0).$$

求下列函数的导数(845 ～ 871).

【845】 $y=\frac{2x}{1-x^2}.$

解 $y'=\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}$

$$=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}\qquad(x\neq\pm 1).$$

【846】 $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}.$

解 $y'=\left[\frac{2}{1-x+x^2}-1\right]'=\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$

【847】 $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}.$

解 $y'=\frac{(1-x)^2(1+x)^3-x[3(1-x)^2(1+x)^2-2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6}$

$$=\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}\qquad(x\neq\pm 1).$$

【848】 $y=\frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}.$