普通高等教育“十二五”规划教材
21世纪大学数学创新教材

丛书主编 陈 化

微分方程数值解

曾金平 杨余飞 关 力 编著

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

21世纪大学数学创新教材

丛书主编 **陈 化**

微分方程数值解

曾金平 杨余飞 关 力 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是大学信息与计算科学本科专业的专业基础课教材. 主要介绍微分方程数值解问题，内容包括一阶常微分方程初值问题的 Euler 折线法、线性多步法、Runge-Kutta 法、椭圆型微分方程边值问题的差分法和有限元法、抛物型和双曲型偏微分方程初边值问题的差分法等，并简要介绍了该领域的最新发展成果，如多重网格法和区域分解法等. 本书简述了偏微分方程及泛函分析中有关的预备知识和数值代数中的部分内容，便于阅读. 各章精选的部分与章节内容相匹配的习题，可加强学生的理论分析和数值模拟实验的能力.

本书可作为理工科相应专业的教材或参考书，对于从事科学与工程计算的工程人员或计算工作者也有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

微分方程数值解/曾金平，杨余飞，关力编著. —北京：科学出版社，2011.6

(　/陈化)

普通高等教育"十二五"规划教材　21 世纪大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-031065-1

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①曾… ②杨… ③关… Ⅲ. ①微分方程解法－数值计算－高等学校－教材 Ⅳ. ①O241.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 086959 号

责任编辑：吉正霞　李磊东 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科 学 出 版 社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第　一　版　　开本：B5(720×1 000)

2011 年 6 月第一次印刷　　印张：14 3/4

印数：1—3 000　　字数：281 000

定价：27.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《21世纪大学数学创新教材》丛书编委会

《21 世纪大学数学创新教材》丛书序

《21 世纪大学数学创新教材》为大学本科数学系列教材，大致划分为公共数学类、专业数学类两大块，创新是其主要特色和要求. 经组编委员会审定，列选科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材.

一、组编机构

《21 世纪大学数学创新教材》丛书由多所 985 和 211 大学联合组编：

丛书主编 陈 化

常务副主编 樊启斌

副 主 编 吴传生 何 穗 刘安平

丛书编委 （按姓氏笔画为序）

王卫华 王展青 刘安平 严国政 李 星
杨瑞琰 肖海军 吴传生 何 穗 汪晓银
陈 化 罗文强 赵东方 黄樟灿 梅全雄
彭 放 彭斯俊 曾祥金 谢民育 樊启斌

二、教材特色

创新是本套教材的主要特色和要求，创造双重品牌：

先进. 把握教改、课改动态和学科发展前沿，学科、课程的先进理念、知识和方法原则上都要写进教材或体现在教材结构及内容中.

知识与方法创新. 重点教材、高层次教材，应体现知识、方法、结构、内容等方面的创新，有所建树，有所创造，有所贡献.

教学实践创新. 教材适用，教师好教，学生好学，是教材的基本标准. 应紧跟和引领教学实践，在教学方法、教材结构、知识组织、详略把握、内容安排上有独到之处.

继承与创新. 创新须与继承相结合，是继承基础上的创新；创新需转变为参编者、授课者的思想和行为，避免文化冲突.

三、指导思想

遵循国家教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于课程教学的基本要

求，力求教材体系完整，结构严谨，层次分明，深入浅出，循序渐进，阐述精炼，富有启发性，让学生打下坚实的理论基础. 除上述一般性要求外，还应具备下列特点：

(1) 恰当融入现代数学的新思想、新观点、新结果，使学生有较新的学术视野.

(2) 体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学软件的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到具体教学内容中的现代精品教材.

(3) 在内容取舍、材料组织、叙述方式等方面具有较高水准和自身特色.

(4) 数学专业教材要求同步给出重要概念的英文词汇，章末列出中文小结，布置若干道(少量)英文习题，并要求学生用英文解答. 章末列出习题和思考题，并列出可进一步深入阅读的文献. 书末给出中英文对照名词索引.

(5) 公共数学教材具有概括性和简易性，注重强化学生的实验训练和实际动手能力，加强内容的实用性，注重案例分析，提高学生应用数学知识和数学方法解决实际问题的能力.

四、主编职责

丛书组编委员会和出版社确定全套丛书的编写原则、指导思想和编写规范，在这一框架下，每本教材的主编对本书具有明确的责权利：

1. 拟定指导思想

按照丛书的指导思想和特色要求，拟出编写本书的指导思想和编写说明.

2. 明确创新点

教改、课改动态，学科发展前沿，先进理念、知识和方法，如何引入教材；知识和内容创新闪光点及其编写方法；教学实践创新的具体操作；创新与继承的关系把握及其主客体融合.

3. 把握教材质量

质量是图书的生命，保持和发扬科学出版社“三高”、“三严”的传统特色，创出品牌；适用性是教材的生命力所在，应明确读者对象，篇幅要结合大部分学校对课程学时数的要求.

4. 掌握教材编写环节

(1) 把握教材编写人员水平，原则上要求博士、副教授以上，有多年课程教学经历，熟悉课程和学科领域的发展状况，有教材编写经验，有扎实的文字功底.

(2) 充分注意著作权问题，不侵犯他人著作权.

(3) 讨论、拟定教材提纲，并负责编写组的编写分工、协调与组织.

(4) 拟就内容简介、前言、目录、样章，统稿、定稿，确定交稿时间.

(5) 负责出版事宜，敦促编写组成员使用本教材，并优先选用本系列教材.

《21世纪大学数学创新教材》组编委员会

2009年6月

前 言

随着计算科学的兴起和发展，产生了一系列计算性的学科分支，如计算流体学、计算气动力学、计算量子化学、计算生物学、计算地质学、计算气象学、计算材料科学、计算天文学、数理经济学等. 而研究如何在计算机上进行大规模科学计算的计算方法和理论（称为计算数学）是这些交叉学科的基础、核心和联系纽带. 其中，微分方程数值解法与科学和工程有着更为密切的联系. 这是因为自然科学与工程技术中各种基本规律往往可以用微分方程或微分方程组描述. 然而，能够求出精确解的微分方程或微分方程组则少之又少. 因此，微分方程数值解是计算数学中最重要的分支之一. 它随着计算科学与技术的发展得到了深刻的研究和广泛的应用.

在微分方程数值解中，可根据所采用的离散方式和理论，将数值方法进行分类. 最常用的有常微分方程初值问题数值解法（包括 Euler 折线法、线性多步法、Runge-Kutta 法、打靶法等）以及偏微分方程数值解法（包括差分法、有限元法和谱方法以及由它们派生出来的各种算法，如边界元法、有限体积法、区域分解法、多重网格法等）. 本书力图将微分方程基础理论和数值分析相结合，使得熟悉微分方程模型和理论的数学爱好者明白数值求解的重要性，同时，作为数值分析者，也应明白，一个好的数值方法的建立及其数值分析往往依赖于对微分方程基础理论的认知程度. 然而，本书作为信息与计算科学本科专业的专业课程的教材，不可能也没有必要包罗万象. 本书将针对一些典型问题介绍相应的典型算法，使学生循序渐进地掌握本课程的基础理论、算法分析与设计，为今后解决实际计算问题或进行深层次的专业研究奠定必要的基础.

本书第 1 章简要介绍微分方程及其定解问题和物理背景，同时简要介绍本书常用的一些数学预备知识. 在其余章节里逐一介绍求解微分方程的各类数值解法，主要包括四大板块：常微分方程数值解（第 2 章）、椭圆型微分方程差分法和有限元法（第 3 章至第 5 章）、抛物型微分方程的差分法（第 6 章）和双曲型微分方程的差分法（第 7 章）. 最后两章简要介绍数值线性代数的部分内容和快速算法. 不仅包括求解线性代数方程组的经典算法，如三角分解直接法和古典松弛迭代法等，而且包括最新发展起来的快速算法，如 FFT、多重网格法、区域分解法等，便于学生了解本学科最新

发展动态，开拓其视野.

在第1章常微分方程数值解中，本书主要针对一阶常微分方程初值问题，介绍Euler折线法、线性多步法、Runge-Kutta法等基本数值计算方法；在偏微分方程数值解中，本书主要针对三类典型的线性偏微分方程：椭圆型、抛物型和双曲型偏微分方程初边值问题，讨论方程的数学性质，如解的存在性、唯一性、稳定性等，进而给出数值求解相应问题的差分法或有限元法等.

差分法和有限元法是求解偏微分方程最基本的数值计算方法. 形象地说，差分法即是先将求解区域划成一个网格，然后在网格点处将微分方程中解的导数(或偏导数)用相应的差商近似，进而得到微分方程解在网格点处的近似解所满足的差分方程的方法. 它是历史最悠久的也是最简单实用的一种数值方法，其基本思想可追溯到Newton和Euler时代. 可以说有了微积分便有了差分法. 此方法简单直观，适合于各类微分方程且便于上机实现，因此应用广泛. 但是此方法对网格的依赖程度较大，不易处理边界比较复杂的问题. 有限元法则基于变分原理，此方法首先将求解区域剖分成有限个单元(称为有限单元)，并建立由在每个有限单元上为多项式的分片多项式组成的函数空间(称为有限元空间)，然后利用变分原理将微分方程写成变分形式，进而在有限元空间中求得变分问题的解(称为有限元解)，此解一般由其在剖分节点处的函数值或导数值决定，它们满足一组线性或非线性方程，也即有限元法最终归结于求解一个线性或非线性方程组. 有限元方法的要点是化整为零，裁弯取直，对复杂的边界的处理很方便，它特别适合于解决复杂问题，它的算法程序都可以标准化，易于在计算机上实现，故目前已成为求解各类微分方程的主导方法之一.

本书各章内容相对独立，便于取舍. 阅读本书的大部分内容只需具备数学分析、线性代数知识. 考虑到部分读者缺乏偏微分方程和泛函分析的相关知识，本书在第1章简要介绍了一些预备知识. 这些知识只需了解基本结论，不必理会理论的推导. 为了提高学生解决实际问题的能力，在习题中，适量选编了一部分与教材内容相匹配的上机实验题，供教师在条件允许的情况下指导学生进行模拟计算，以便加深学生对课堂内容的理解. 这部分实验习题的实现需要学生掌握至少一门用于科学计算的算法语言或数学软件，如C语言、Fortran、Matlab、Maple或Mathematica等. 同时也需要学生了解计算方法中的部分内容(如第8章).

由于作者水平有限，书中难免有疏漏和不妥之处，恳请使用本书的师生和读者反馈给我们宝贵的建议，对此我们不胜感激.

编　者

2011年5月

目　录

第 1 章 引 言

本章将简单介绍微分方程及其定解问题. 同时，根据一些基本的物理定律，如 Newton 运动定律及守恒定律等，导出几类典型的微分方程，如波动方程、热传导方程、Poisson 方程、Navier-Stokes 方程、Schrödinger 方程等. 本章还将给出本书中常用的一些数学记号和数学基础知识.

1.1 微分方程及其定解问题

设 d 为自然数，$\mathbb{R}^d$ 中点 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_d)$，未知函数 $u(x)$，则含有 $u(x)$ 及其偏导数的方程称为微分方程. 它的一般形式可表示为

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_d, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_d^{m_d}}\right)=0, \tag{1.1.1}$$

其中 $m=m_1+m_2+\cdots+m_d$ 称为上述微分方程的阶. 当 $d>1$ 时，方程(1.1.1)称为偏微分方程. 当 $d=1$ 时，方程(1.1.1)退化为如下 m 阶常微分方程：

$$F\left(x, u, \frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d} x^m}\right)=0.$$

如果微分方程关于未知函数及其各阶导数或偏导数是线性的，则称之为线性微分方程，否则称之为非线性微分方程. 例如，微分方程

$$\sum_{i, j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^d b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x) u=0 \tag{1.1.2}$$

为二阶线性微分方程. 当 $d=1$ 时，为二阶线性常微分方程；当 $d>1$ 时，为二阶线性偏微分方程，而微分方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1 \tag{1.1.3}$$

为一阶非线性偏微分方程. 如果在一个微分方程中,包含有不含未知函数 $u(x)$ 及其导数或偏导数的项(称为自由项),则方程称为非齐次微分方程,否则称为齐次微分方程. 例如,式(1.1.2)为齐次微分方程,式(1.1.3)为非齐次偏微分方程. 如果一个函数具有某微分方程中所需要的各阶连续导数或偏导数,且代入该方程中能使之成为一个恒等式,则称此函数为该微分方程的解或古典解. 例如,函数 $f(x)+g(y)$ 为二阶齐次偏微分方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$ 的古典解,其中 $f(x)$, $g(y)$为任意给定的一阶连续可微函数. 由此可见,和常微分方程一样,微分方程的解也是无穷的. 一般来说,将描述一个物理过程的方程称为泛定方程. 要想完全确定一个物理过程,还需给出相应的具体条件,这样的条件称为定解条件. 泛定方程加上定解条件便构成一个定解问题.

对于一个物理过程,用来描述其初始状态的条件称为初始条件,它一般用未知函数或其关于时间的导数或偏导数在初始时间的值来表示. 而描述边界状态的条件称为边界条件. 根据定解条件的不同,可将定解问题进行分类. 泛定方程和初始条件构成的定解问题称为初值问题,也称为 Cauchy 问题;泛定方程和边界条件构成的定解问题称为边值问题;而泛定方程和初始条件以及边界条件一起构成的定解问题称为初边值问题,也称为混合问题.

在下一节里,将给出几类典型的微分方程及其相应的定解问题. 这些问题是本书后面各章节中提出的各类数值算法的求解对象.

1.1.1 一阶常微分方程及其初值问题

设连续函数 $f(x, y)$已知,求函数 $y(x)$,使其满足如下常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x, y). \tag{1.1.4}$$

方程(1.1.4)称为一阶常微分方程. 当 $f(x, y)$为 y 的线性函数,即 $f(x, y)=a(x)y+g(x)$ 时,方程退化为线性系统:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y+g(x), \tag{1.1.5}$$

其中 $a(x)$, $g(x)$为已知的连续函数.

一阶常微分方程(1.1.4)的一般解中含有一个自由度. 要想确定该问题的解,需给出满足特定条件的定解条件. 通常可用初始条件 $y(x_0)=y_0$ 作为定解条件. 此时,可得到相应的定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x, y), \quad x>x_0, \\ y(x_0)=y_0.\end{cases} \tag{1.1.6}$$

问题(1.1.6)称为一阶常微分方程初值问题. 由常微分方程基础理论知,对于线性系统(1.1.5)对应的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y+g(x), & x>x_0,\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}$$

其解析解的表达式为

$$y(x)=\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}a(t)\mathrm{d}t}y_0+\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{\int_{s}^{x}a(t)\mathrm{d}t}g(s)\mathrm{d}s.$$

而在一般情况下,初值问题(1.1.6)的解析解往往只有极少部分可以求出. 本书第2章将介绍初值问题(1.1.6)的数值解法.

1.1.2 几类典型的偏微分方程及其定解条件

本书主要研究三类典型的线性偏微分方程,即抛物型、双曲型和椭圆型偏微分方程的数值解法. 这三类偏微分方程描述了不同本质的物理现象. 下面给出它们的数学表示形式及其定解条件.

一般地,二阶线性椭圆型偏微分方程可写成

$$Au:=-\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{j=1}^{d}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x)u=f(x),\quad x\in\Omega,\tag{1.1.7}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_d)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为有界区域(其边界为 Γ),系数 $a_{ij}(x)$, $b_j(x)(i,j=1,2,\cdots,d)$, $c(x)$ 充分光滑且矩阵 $(a_{ij}(x))\in\mathbb{R}^{d\times d}$ 为正定矩阵. 特别地,在微分方程(1.1.7)中取 $(a_{ij}(x))=I$(单位矩阵),$b_j(x)=0(j=1,2,\cdots,d)$, $c(x)=0$, 可得到 Poisson 方程

$$-\Delta u=f,\tag{1.1.8}$$

其中 Δ 称为 Laplace 算子,定义 $\Delta u=\sum_{j=1}^{d}\dfrac{\partial^2u}{\partial x_j^2}$. Poisson 方程(1.1.8)是椭圆型偏微分方程的典型代表. 当 $f=0$ 时,Poisson 方程退化成如下 Laplace 方程

$$-\Delta u=0.\tag{1.1.9}$$

方程(1.1.9)又称为调和方程,其解称为调和函数.

问题(1.1.7)的定解条件通常有如下三类边界条件: Dirichlet 条件、Neumann 条件和 Robin 条件. 它们分别可表示为

$$u = g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1.1.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1.1.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1.1.12}$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示函数 u 沿 Γ 的外法线 n 的方向导数;$\sigma(x)$为定义在 Γ 上的已知函数. 边值条件(1.1.10)～(1.1.12)也分别称为第一类、第二类和第三类边界条件. 它们分别和式(1.1.7)一起构成相应的定解问题. 例如,Poisson 方程结合 Dirichlet 条件,可得到如下 Poisson 方程的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = g(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

如下两个方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{1.1.13}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{1.1.14}$$

分别称为抛物型和双曲型偏微分方程,它们都为发展型方程. 这类方程通常结合初始条件及边值条件一起构成定解条件. 例如,如下抛物型方程初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = v(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

和双曲型方程初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = v(x),\ u_t(x, 0) = w(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

其中 $w(x)$和 $v(x)$为定义在 Ω 上的已知函数.

本书将针对模型问题(1.1.8)、(1.1.13)及(1.1.14),研究相应的数值解法,如有限元法和差分法等. 还将讨论连续问题和离散问题的适定性(解的存在性、唯一

性与稳定性)以及离散问题的逼近性质(误差估计)等问题.

1.2 预备知识

1.2.1 基本记号与 Green 公式

在这一节里,我们简要介绍本书中常用的一些数学符号及 Green 公式. 首先引入下面基本记号.

$\mathbb{R}$	实数空间
$\mathbb{R}_+$	非负实数的全体构成的集合
$\mathbb{R}^d$	d 维实向量空间: $\{x=(x_1, \cdots, x_d): x_i \in \mathbb{R}, i=1, \cdots, d\}$
$\mathbb{R}_+^d$	d 维非负向量空间: $\{x=(x_1, \cdots, x_d): x_i \in \mathbb{R}_+, i=1, \cdots, d\}$
Ω	$\mathbb{R}^d$ 中的区域,即连通开集,当 $d=1$ 时,即为开区间
Γ	Ω 的边界 $\partial\Omega$,通常假定其光滑或为多面体
$\bar{\Omega}$	$\Omega \cup \Gamma$
$\|\Omega\|$	Ω 的体积(当 $d=1$ 时为长度,当 $d=2$ 时为面积)
$x \cdot y$	向量的数量积: $x \cdot y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$, 其中 $x=(x_1, \cdots, x_d)$, $y=(y_1, \cdots, y_d)$
∇	梯度算子: $\nabla u = \mathrm{grad}\, u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_d}\right)$
div	散度算子: $\mathrm{div}\, v = \nabla \cdot v = \sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$,其中 $v=(v_1, \cdots, v_d)$
Δ	Laplace 算子: $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$
D^α	$\|\alpha\|$ 阶偏导数算子: $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\|\alpha\|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_d} x_d}$, 其中 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ 为非负整数, $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$
$C(M)$	在 $M(M \subset \mathbb{R}^d)$ 上的连续函数的全体构成的函数空间
$\\|u\\|_{C(M)}$	(简记为 $\\|u\\|_C$) 函数 u 在 $C(M)$ 上的最大模: $\\|u\\|_{C(M)} = \sup_{x \in M} \|u(x)\|$
$C^k(\Omega)$	在 Ω 上 k 阶连续可微的函数的全体构成的函数集合
$C^k(\bar{\Omega})$	$C^k(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega): D^\alpha u \in C(\bar{\Omega}), \forall\ \|\alpha\| \leqslant k\}$, 其中 Ω 有界