师范专科学校试用教材

数学分析

（上）

东北地区师专数学教材协编组
《数学分析》编写组

延边教育出版社

师范专科学校试用教材

数学分析

（上）

东北地区师专数学教材协编组
《数学分析》编写组

延边教育出版社

内容提要

本书是编者根据原教育部1982年10月在昆明审订的师专数学专业教学大纲编写而成的。本书结合师专教学的实际，侧重基础理论的论述。叙述简明扼要，由浅入深，通俗易懂，范例较多，便于教学和阅读，可作为二、三年制师专数学专业试用教材，也可作高师数学专业函授教材及中学数学教师进修和各高校、成人高校有关专业学生学习的参考用书。

全书分上、中、下三册，上册内容为：函数和极限论，一元函数微分学。

责任编辑：徐贞淑 尹完柱

师范专科学校试用教材
数学分析
上 册
东北地区师专数学教材协编组
《数学分析》编写组
延边教育出版社出版发行
延边新华印刷厂印刷
787×1092毫米32开本 9.6875印张 194千字
1987年9月第1版 1987年9月第1次印刷
ISBN 7—80509—182—×/O·6
书号：13092·9 印数：1——5,140册
定价：2.00元

前　　言

鉴于目前尚没有正式出版师专数学专业教材的情况，东北十几所师专联合成立了东北地区师专数学教材协编组。协编组按照原教育部1982年10月在昆明审订的师专数学专业教学大纲，讨论了编写教材的各项事宜及编写要求，并拟出了师专数学专业各科教材的编写纲目。

本书由数学分析编写组编写。在编写过程中，注意体现辩证唯物主义观点以及理论联系实际和少而精等原则，特别注意面向师专的实际，同时又努力阐明系统的基本理论，并适当渗透现代分析的观点。在编写中，还努力将教学经验溶汇到教材中去，使教材便于教也便于学，这将有助于教者对学生进行分析基本功的训练和能力的培养，从而有益于提高教学质量。

本书按三年制大纲编写。部分章节打了“△”号，略去后，可适用于二年制专科使用，全书分上、中、下三册出版，三个学期可以讲授完。

上册第一、二、三章由张兴岩、尹完柱编写，第四、五章由王镇江、李敏霞编写，上册统稿由王镇江担任。中册第六至十二章分别由陆子采、梁志国、宋永发、邢玉香、张启寅、杜庆山、刘邦民编写，中册统稿由刘邦民担任。下册第十三章由王云、陈丽卿编写，第十四至十六章分别由巴起昌、周膺、赵建伦编写，下册统稿由陈丽卿担任。全书最后由尹完柱、张兴岩、刘邦民统写定稿。

在编写过程中，得到了吉林省教委会有关部门的支持和关怀，不少兄弟院校的领导和同志也给予了热情帮助和鼓励。延边教育出版社和延边新华印刷厂的同志们对本书的出版、发行做了大量的工作。在此，编者谨向上述各部门和同志表示感谢。

由于编写时间仓促，我们水平有限，本书难免会有许多缺点，甚至会有错误，希望读者批评指正。

东北地区师专数学

教材协编组

《数学分析》编写组

1987年 2月

目　　录

第一章　函　　数

第二章　极　限

第三章 函数的连续性

第四章 导数与微分

第一章 函 数

用数学方法来表现物质世界中量与量之间的相依关系，即函数．函数是表示物体运动规律的有力工具，是数学分析这个学科研究的主要对象．本章对函数及其有关问题作必要的讲解．

§1.1 实数概述

一 有理数和无理数

从中学数学教本中读者已熟悉了有理数和无理数，并学习了集合的初步知识，在这个基础上，我们进一步学习实数的基础知识．

有理数与无理数统称为**实数**．实数全体组成的集合称为**实数集**，表为R．实数集R的子集称为**数集**．有理数全体组成**有理数集**，无理数全体组成**无理数集**，二者并起来成为**实数集**．实数的概念是数学分析的基本概念之一，也可以说是整个数学的一个基本概念．数学分析的理论是建立在实数基础上的，熟悉和掌握实数的基本理论，对学好数学分析是一个重要的前提．本节的任务是，给出实数的主要性质和今后学习数学分析要用到的有关实数理论方面的一些结论．基于本教材的任务与要求，有些理论上的证明，这里不予叙述，读者可参考实数理

论方面的书籍自行学习与补充。

实数有如下一些性质：

1° 任何两个实数α与β之间有且仅有下述三种关系之一：

$\alpha=\beta$，$\alpha<\beta$，$\alpha>\beta$

2° 若$\alpha>\beta$，$\beta>\gamma$，则可推得$\alpha>\gamma$；

若$\alpha<\beta$，$\beta<\gamma$，则可推得$\alpha<\gamma$。

其中，γ为实数。

性质1°、2°说明了对两个实数可以确定大小关系，这个特性叫实数的**有序性**。

3° 不论α与β是两个怎样的实数，若$\alpha>\beta$，则总可以找到一个实数（甚至是有理数）γ，使γ介于α与β之间：$\alpha>\gamma>\beta$。

由此性质可以看出，α与β之间有无穷多个实数，这个特性叫实数的**稠密性**。

实数的连续性是一个极为重要的概念。为讲明这个问题，先讲一下数集**分割**的概念。

给定一个非空数集，现在把它分成两个非空的集合A与A′。就是说，我们假定

（1）给定集合中的每一个数在而且只在A与A′两个集合的一个中，

（2）集合A中的每一个数a小于集合A′中的每一个数a'。

数集的这种分法就叫**分割**。A叫分割的**下类**。A′叫分割的**上类**。分割用A|A′表示。

现在我们讨论实数集的分割。我们把实数集分成两个非空的集合，分法具备上述两条要求时，就成为实数集的一个分

割。产生这种分割的界数总是存在的，这个界数或属于下类，或属于上类。我们可以作一个比喻来想象这件事，假如有一根无限长的链条，要想把链条断成两部分，只须在任一链节上断开，这一链节或属于这半部，或属于那半部，不可能不存在这样的链节。上述思想可归纳成定理。

4° **狄台金定理** 对于实数集合任何的分割 $A|A'$，存在产生这个分割的实数r，实数r或是下类A中的最大数，或是上类A'中的最小数。

实数集合的这个性质叫实数集的**连续性**，也叫**完备性**。这个性质表明，在实数轴上处处有实数，实数轴是没有空隙的。

二 实数的几何表示

在平面解析几何中，已讲过实数与数轴上的点之间的一一对应关系。下边我们具体解剖一下这种对应关系是如何建立的。

形如$\frac{p}{q}$的实数，其中p及q都是整数，且$q \neq 0$，我们称之为**有理数**，有理数$\frac{p}{q}$可用数轴上的点表示。在数轴上找这点的方法如下：自数轴原点O起，向右(当$\frac{p}{q}>0$时)或向左(当$\frac{p}{q}<0$时)截取线段$\overline{OA}$，使$\overline{OA}$的值与单位长度OU之比等于p与q之比，即$\frac{OA}{OU}=\frac{p}{q}$(图1.1)，这样所得之点A叫做**有理点**，$\frac{p}{q}$是点A的坐标，点A是$\frac{p}{q}$的几何表示，可记为$A(\frac{p}{q})$。

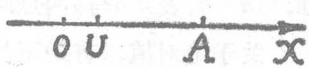

图 1.1

数轴上任何两个不相同的有理点$A(a)$与$B(b)$之间还有有理

点，比如$C(\frac{a+b}{2})$就是一个.由此可以看到，数轴上的有理点是处处稠密的。但是，我们说有理点之间还有“空隙”。事实上，我们可以找到非有理点。比如，以边长为1的正方形对角线作为线段，以数轴原点向右截取，得到截点D，由几何知，$OD=\sqrt{2}$，D点就是非有理点。不难想象，这样的点在数轴上也是处处稠密的。这样的点叫**无理点**，每个无理数对应一个无理点。综上分析，数轴上的全体点与全体实数之间就构成了一一对应关系。今后，我们对数与点不加以区别，有时把点说成数，把数叫做点。

三　绝对值和绝对值不等式

任何实数都有绝对值，其定义如下：

实数a的**绝对值**，当a是正数或零时，就是它本身，当a是负数时，则是它的相反数。a的绝对值记为$|a|$。$|a|$可以表为

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当}a\geqslant 0\\ -a, & \text{当}a<0\end{cases}$$

对任意实数a，由绝对值定义，有$|a|\geqslant 0$，$|-a|=|a|$，$\sqrt{a^2}=|a|$，$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$。

绝对值的几何意义是，$|a|$表示a点到原点的距离。不难推知，$|a-b|$表示a与b两点间的距离。

关于绝对值，有如下与定义等价的不等式。我们用符号$\Longleftrightarrow$表示可互相推出。

$$|x|\leqslant A\Longleftrightarrow -A\leqslant x\leqslant A \qquad (1)$$

$$|x-a|\leqslant A\Longleftrightarrow a-A\leqslant x\leqslant a+A \qquad (2)$$

关于绝对值的运算性质，有如下四条：

1° $|x+y|\leqslant|x|+|y|$（三角不等式） (3)

证明 由(1)有

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,\quad -|y|\leqslant y\leqslant|y|$$

把两式边边相加，得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant(|x|+|y|)$$

再由(1)，有

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

不等式(3)可推广，即

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

2° $|x-y|\geqslant|x|-|y|$ (4)

事实上，$|x|=|(x-y)+y|$，由(3)，得

$$|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$$

移项，有

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|$$

显然还有

$$|x+y|\geqslant|x|-|y|$$

3° $|x_1x_2\cdots x_n|=|x_1|\cdot|x_2|\cdot\cdots\cdot|x_n|$ (5)

显然还有$|x^n|=|x|^n$。

4° $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\ (y\neq0)$ (6)

四 区间

在研究函数性质时，要考虑变量的变化范围，也叫变量的

变域。变域往往由所谓区间来表达，区间是实数集R的特殊子集，区间分有限和无限两类。

(1) **有限区间** 设a，$b\in\mathbf{R}$，且$a<b$，则称数集$\{x|a<x<b\}$为开区间，记作(a, b)； 数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间，记作$[a, b]$；数集$\{x|a\leqslant x<b\}$和$\{x|a<x\leqslant b\}$都称为半开半闭区间，分别记作$[a, b)$和$(a, b]$。

根据实数与数轴上的点的一一对应关系，开区间(a, b)表示数轴上a、b两点之间的所有点的全体，闭区间$[a, b]$比开区间(a, b)多两个端点，半开半闭区间只比开区间多一个端点。

区间的端点为有限点的区间统称为有限区间（如图 1.2）

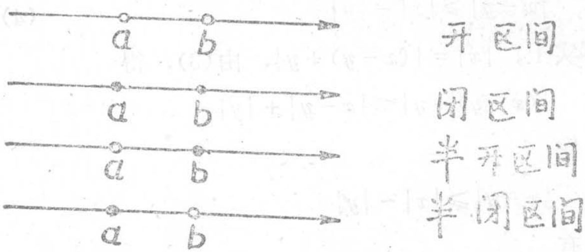

图 1.2

图中的实点表示包含端点，空心点表示不包含端点。

(2) **无限区间** 满足不等式$x\geqslant a$的全体实数，用区间$[a, +\infty)$表示，符号∞读作"无穷大"。同样，满足不等式$x<a$的全体实数，用区间$(-\infty, a)$表示。类似地可定义区间$(a, +\infty)$，$(-\infty, a]$，全体实数R也可写成区间的形式$(-\infty, +\infty)$。这些区间统称为无限区间。

(3) **邻域** 邻域是一个非常重要的概念。邻域是针对某一

点而言，一般是指以该点为中心的一个对称开区间。

定义 以点a为中心，而长度等于2δ的开区间，叫做a点的δ邻域，记为$U(a,\ \delta)$，δ叫做邻域的半径。邻域用不等式可表为$|x-a|<\delta$，即$a-\delta<x<a+\delta$。也可用区间记号表为$(a-\delta,\ a+\delta)$（如图1.3）。

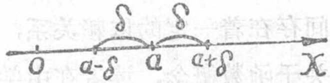

图 1.3

在a的邻域内去掉a，即$\{x|0<|x-a|<\delta\}$，称为a的去心邻域，记为$U^{\circ}(a,\ \delta)$，或简单地记为$U^{\circ}(a)$。

习题 1.1

1．求证不等式：

(i) $|x-y|\geqslant||x|-|y||$，

(ii) $|x+x_1+x_2+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$。

2．解不等式，并用区间表示不等式的解：

(1) $|2x-1|\leqslant3$，

(2) $|x|>|x+1|$，

(3) $(|x|+x)(1-x)<0$，

(4) $||x+1|-|x-1||<1$。

3．设$f(x)=x+1$，$\varphi(x)=x-2$，解方程

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|.$$