



Guidance Series for Mathematics Majors
数学类专业学习辅导丛书

朱思铭
编

常微分方程 学习辅导与 习题解答

常微分方程在微积分概念出现后即已出现，发展初期是对具体的常微分方程希望能用初等函数或超越函数表示其解，属于“求通解”时代。早期的常微分方程的求解热潮被刘维尔证明里卡蒂方程不存在一般的初等解而中断，加上柯西初值问题的提出，常微分方程从“求通解”转向“求定解”时代……



高等教育出版社

数学类专业学习辅导丛书

常微分方程学习辅导 与习题解答

朱思铭 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程学习辅导与习题解答/朱思铭编. —北京:
高等教育出版社, 2009. 1

ISBN 978 - 7 - 04 - 024865 - 4

I. 常… II. 朱… III. 常微分方程 - 高等学校 - 教
学参考资料 IV. O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 193778 号

策划编辑	李 蕊	责任编辑	李华英	封面设计	赵 阳
责任绘图	朱 静	版式设计	王艳红	责任校对	殷 然
责任印制	陈伟光				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京市白帆印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	850 × 1168 1/32	版 次	2009 年 1 月第 1 版
印 张	23.375	印 次	2009 年 1 月第 1 次印刷
字 数	600 000	定 价	36.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24865 - 00

内 容 提 要

本书是常微分方程的教学参考书,为学习或讲授《常微分方程(第三版)》的师生补充教材以外的参考资料,并提供众多常微分方程模型,供常微分方程应用者和准备参加数学建模竞赛者参考。

除传统的内容提要、学习辅导、排疑解惑、例题增补及习题解答外,考虑到常微分方程应用的广泛性和在学科发展中的承前启后作用,书中增加了常微分方程的应用实例和历史与人物及考研试题等内容。同时,考虑到学生学习和教师备课有所不同,除内容提要和习题与习题解答外,又分别设置了学习辅导和补充提高两项内容,前者方便初学者自学,后者适合师生的进一步探索。

全书按原教材内容顺序依章分为“内容提要”、“学习辅导”、“补充提高”和“习题与习题解答”四个部分。“内容提要”列出定理、公式等基本内容;“学习辅导”含学习要点或解题指导、例题选讲、测试练习;“补充提高”含补充习题、排疑解惑、应用实例、历史与人物;“习题与习题解答”含本书中的测试练习和补充习题的解答以及《常微分方程(第三版)》中全部习题的解答或提示,为方便读者,与教材同步的习题在解答时同时列出题目。

书中还专章给出“期中、期末及硕士研究生入学试题”(包括套题、半套题及散题)和“数学软件在常微分方程中的应用”。附录中则列出科学计算自由软件 SCILAB 的使用和绘制轨线图貌的改进及解题常用的部分函数、微分、积分公式,并有各章排疑解惑、应用例题和历史与人物的细目索引。

前言

本书是常微分方程的教学参考书,为学习或讲授《常微分方程(第三版)》的师生补充教材以外的参考资料,并提供各种常微分方程模型,供常微分方程应用者和准备参加数学建模竞赛者参考。

早在联系修订《常微分方程(第三版)》时,高等教育出版社李蕊编辑就和我联系编写《常微分方程学习辅导与习题解答》一书,并曾寄来有关资料。修订完《常微分方程(第三版)》后,便趁着刚退休,已没有博士、硕士生教学任务的空闲时段开始编写了。因王寿松教授有学校督导工作,原约好和李艳会博士共同编写,因她熟悉计算机软件。后来她有更为迫切的任务,只好自己独立编写。经过一年多,终于在公式、符号和文字频繁转换的电脑输入的时间流逝中完成了。

希望这本常微分方程的学习、教学参考书能适合各种类型学生、教师的需要:对初学者给出学习要点或解题指导、测试练习及习题解答;对程度较高的学生可以作排疑解惑与补充提高;对讲课教师则介绍补充例题、考题及发展历史;同时对考研及参加数学建模竞赛的学生亦有所帮助;专注于常微分方程的实际应用及计算机具体应用于常微分方程的读者也能从中获益。

针对学生学习和教师备课的不同层次,书中将结合《常微分方程(第三版)》的各章,分成“内容提要”、“学习辅导”、“补充提高”和“习题与习题解答”四个部分。第二部分“学习辅导”适合初学者;第三部分“补充提高”供较深入学习之用。

在“补充提高”中与其他辅导书不同的是,增加了“应用实例”

和“历史与人物”两部分。常微分方程模型是数学模型的重要组成部分,有大量的常微分方程应用,而原教材无法深入涉及,这里将在“应用实例”中作较充分阐述,介绍实际应用的各种常微分方程模型。既可窥见常微分方程的应用全貌,也可供常微分方程应用者和参加大学生、研究生数学建模竞赛者参考。

常微分方程是微积分的有机组成部分,数学史上伟大数学家都在常微分方程发展史上留下印记。“历史与人物”让我们了解常微分方程和某些数学思想的发展历史及相关杰出人物的成就,并感受数学的丰富多彩。

在“习题与习题解答”中则有本书中给出的测试练习和补充习题的解答以及《常微分方程(第三版)》中全部习题的解答,有些还给出了多种解法。如何既给出习题解答又要避免学生抄袭是一个不易解决的问题,我们不采用习题选解的办法,而给出全部习题的解答。但除部分详细解答作为范例外,相当部分采用提示或略解,只给出关键部分,中间过程需要自己推导、补充和说明。这既避免被抄袭,又节省篇幅。

除按原教材各章内容依顺序编写以方便学习、教学外,还根据需要编写了“期中、期末及硕士研究生入学试题”和“数学软件在常微分方程中的应用”两章。在后一章中讨论了常微分方程的计算机辅助分析,并按使用 Mathematica、MATLAB、Maple 和 SCILAB 软件分别给出某些常微分方程例题及习题的有关程序。这是对原教材附录Ⅱ的补充。特别推荐读者使用新介绍的科学计算自由软件 SCILAB,包括其较有特色的 SCILAB Demos。

最后,在附录中列出科学计算自由软件 SCILAB 的使用和绘制轨线图貌的改进;解题和建模常用的部分公式,包括函数、微分、积分公式。并对各章排疑解惑、应用例题、历史与人物和软件程序的细目给出索引,以方便查阅。

本书的编写曾参考了众多的常微分方程教材、参考书及习题集与习题解答,特别是李尚廉编、王高雄校订的油印本《常微分方

程习题课参考资料》(1983 年)。同时在“期中、期末及硕士研究生入学试题”中引用了大量中山大学常微分方程的有关试题。容志新、李艳会参加了第十章和附录 I 的编写。武汉大学博士生导师曾宪武教授和高等教育出版社的同志详细审阅了本书。我的已毕业的博士研究生们还分工校阅了初稿。审阅和校阅者们提出了大量修改意见,改正了错漏。在这里,对支持本书出版的有关同志特别是武汉大学的曾宪武教授、中山大学的王寿松、王其如、赵育林、姜正禄教授及高等教育出版社的编辑表示衷心的感谢!

本书希望能对常微分方程和数学模型的学习、教学及应用有所帮助。因编写较仓促,错漏之处在所难免,望广大读者提出宝贵意见。

朱思铭

中山大学康乐园

2008 年 6 月

使用说明

1. 本书前八章与原教材七章及附录 1(边值问题)的内容对应。后两章为试题和软件。附录为学习时供查阅的资料。

2. 前八章每章分为“内容提要”、“学习辅导”、“补充提高”和“习题与习题解答”四个部分。“内容提要”给出了必须掌握的概念、定理和公式。

3. “学习辅导”供初学者、自学者或复习者使用,内含学习要点或解题指导、例题选讲、测试练习。解题指导列出解题时应考虑的思路;例题选讲为原教材的补充;测试练习作为学习后的自我测验,往往不必全解。

4. “补充提高”供学生深入学习或教学者参考,含补充习题、排疑解惑、应用实例和历史与人物。“补充习题”既含测试练习中未要求全解的习题,也补充了较难或书中未涉及的方法的习题;“排疑解惑”解答了学习时可能的疑惑并对有关内容作了补充,包括书中未涉及的新方法;“应用实例”包含应用习题和应用模型,模型仅作指导性描述;“历史与人物”供读者了解常微分方程的历史发展及相关的历史人物,并介绍了一些近代典故。

5. “习题与习题解答”含本章中给出的测试练习和补充习题的解答及《常微分方程(第三版)》中全部习题的解答。对《常微分方程(第三版)》中同步习题附上题目。解答中有些还给出多种方法和注释。除部分详细解答外,往往省略部分中间推导过程,具体解答时由学习者补全。

6. 第九章“期中、期末及硕士研究生入学试题”给出了几套常微分方程期中、期末试题和硕士研究生入学考试的试题及其解答。

其中半套题是指常微分方程不作为专科而作为综合考试的一部分和其他科目合考的题目,其考试时间和分数约占一半。除完整的试题作套题、半套题外还选列了各院校出的较好的常微分方程试题作为散题,并附以解答。

7. 第十章“数学软件在常微分方程中的应用”含常微分方程的计算机辅助分析论述和 Mathematica、MATLAB、Maple 和 SCILAB 软件程序两部分。其常微分方程例题及习题的各软件程序基本不重复。

8. 附录中则列出科学计算自由软件 SCILAB 的使用和绘制轨线图貌的改进及解题和建模常用的部分函数、微分、积分公式。并有各章排疑解惑、应用例题和历史与人物的细目索引供查阅。

9. 书中引用本书部分时直接用章节号标明;引用教材《常微分方程(第三版)》时则用“书”及章节号;引用参考文献时只列明“文”与参考文献编号及章节号,均用数字表示。对某些较难的或较特别的(如应用模型或软件等)用星号“*”标注。

10. 书中例题、测试题及补充题多取自众多参考文献,如[文1]~[文8]及[文26],而历史与人物中的材料则多取自[文36]~[文38]及[文17],均不一一列注。

目 录

第一章 绪论	1
§ 1.1 内容提要	1
§ 1.1.1 常微分方程模型	1
§ 1.1.2 常微分方程基本概念	5
§ 1.2 学习辅导	8
§ 1.2.1 学习要点	8
§ 1.2.2 例题选讲	9
§ 1.2.3 测试练习	11
§ 1.3 补充提高	11
§ 1.3.1 补充习题	11
§ 1.3.2 排疑解惑	12
§ 1.3.3 应用实例	14
§ 1.3.4 历史与人物	19
§ 1.4 习题与习题解答	23
§ 1.4.1 测试练习解答	23
§ 1.4.2 补充习题解答	24
§ 1.4.3 习题 1.2 及其解答	26
第二章 一阶微分方程的初等解法	33
§ 2.1 内容提要	33
§ 2.1.1 变量分离方程与变量变换	33
§ 2.1.2 线性方程与常数变易法	34
§ 2.1.3 恰当方程与积分因子	34
§ 2.1.4 一阶隐式微分方程与参数表示	36

§ 2.2 学习辅导	37
§ 2.2.1 解题指导	37
§ 2.2.2 例题选讲	41
§ 2.2.3 测试练习	47
§ 2.3 补充提高	49
§ 2.3.1 补充习题	49
§ 2.3.2 排疑解惑	51
§ 2.3.3 应用实例	54
§ 2.3.4 历史与人物	60
§ 2.4 习题与习题解答	62
§ 2.4.1 测试练习解答	62
§ 2.4.2 补充习题解答	65
§ 2.4.3 习题 2.1 及其解答	84
§ 2.4.4 习题 2.2 及其解答	92
§ 2.4.5 习题 2.3 及其解答	101
§ 2.4.6 习题 2.4 及其解答	113
§ 2.4.7 习题 2.5 及其解答	116
第三章 一阶微分方程的解的存在定理	131
§ 3.1 内容提要	131
§ 3.1.1 解的存在唯一性定理与逐步逼近法	131
§ 3.1.2 解的延拓	132
§ 3.1.3 解对初值的连续性和可微性定理	133
§ 3.1.4 奇解	135
* § 3.1.5 数值解	135
§ 3.2 学习辅导	137
§ 3.2.1 学习要点	137
§ 3.2.2 例题选讲	138
§ 3.2.3 测试练习	141
§ 3.3 补充提高	143

§ 3.3.1	补充习题	143
§ 3.3.2	排疑解惑	144
§ 3.3.3	应用实例	149
§ 3.3.4	历史与人物	158
§ 3.4	习题与习题解答	159
§ 3.4.1	测试练习解答	159
§ 3.4.2	补充习题解答	164
§ 3.4.3	习题 3.1 及其解答	172
§ 3.4.4	习题 3.3 及其解答	183
§ 3.4.5	习题 3.4 及其解答	186
§ 3.4.6	习题 3.5 及其解答	193
第四章 高阶微分方程		198
§ 4.1	内容提要	198
§ 4.1.1	线性微分方程的一般理论	198
§ 4.1.2	常系数线性微分方程的解法	200
§ 4.1.3	高阶微分方程的降阶和幂级数解法	205
§ 4.2	学习辅导	208
§ 4.2.1	解题指导	208
§ 4.2.2	例题选讲	211
§ 4.2.3	测试练习	214
§ 4.3	补充提高	216
§ 4.3.1	补充习题	216
§ 4.3.2	排疑解惑	217
§ 4.3.3	应用实例	221
§ 4.3.4	历史与人物	233
§ 4.4	习题与习题解答	235
§ 4.4.1	测试练习解答	235
§ 4.4.2	补充习题解答	241
§ 4.4.3	习题 4.1 及其解答	256

§ 4.4.4	习题 4.2 及其解答	266
§ 4.4.5	习题 4.3 及其解答	279
第五章 线性微分方程组		290
§ 5.1	内容提要	290
§ 5.1.1	存在唯一性定理	290
§ 5.1.2	线性微分方程组的一般理论	292
§ 5.1.3	常系数线性微分方程组	295
§ 5.2	学习辅导	298
§ 5.2.1	解题指导	298
§ 5.2.2	例题选讲	299
§ 5.2.3	测试练习	306
§ 5.3	补充提高	308
§ 5.3.1	补充习题	308
§ 5.3.2	排疑解惑	309
§ 5.3.3	应用实例	314
§ 5.3.4	历史与人物	332
§ 5.4	习题与习题解答	333
§ 5.4.1	测试练习解答	333
§ 5.4.2	补充习题解答	341
§ 5.4.3	习题 5.1 及其解答	359
§ 5.4.4	习题 5.2 及其解答	363
§ 5.4.5	习题 5.3 及其解答	381
第六章 非线性微分方程		410
§ 6.1	内容提要	410
§ 6.1.1	稳定性	410
§ 6.1.2	V 函数方法	413
§ 6.1.3	奇点	415
§ 6.1.4	极限环和平面图貌	417
§ 6.1.5	分支与混沌	419

§ 6.1.6	哈密顿系统	421
§ 6.2	学习辅导	425
§ 6.2.1	学习要点	425
§ 6.2.2	例题选讲	426
§ 6.2.3	测试练习	432
§ 6.3	补充提高	433
§ 6.3.1	补充习题	433
§ 6.3.2	排疑解惑	434
§ 6.3.3	应用实例	442
§ 6.3.4	历史与人物	458
§ 6.4	习题与习题解答	463
§ 6.4.1	测试练习解答	463
§ 6.4.2	补充习题解答	467
§ 6.4.3	习题 6.1 及其解答	473
§ 6.4.4	习题 6.2 及其解答	482
§ 6.4.5	习题 6.3 及其解答	490
§ 6.4.6	习题 6.4 及其解答	493
§ 6.4.7	习题 6.5 及其解答	503
§ 6.4.8	习题 6.6 及其解答	508
第七章	一阶线性偏微分方程	516
§ 7.1	内容提要	516
§ 7.1.1	基本概念	516
§ 7.1.2	一阶线性偏微分方程与常微分方程组的关系	517
§ 7.1.3	利用首次积分求解常微分方程组	518
§ 7.1.4	一阶线性偏微分方程的解法	519
§ 7.1.5	柯西问题	520
§ 7.2	学习辅导	520
§ 7.2.1	解题指导	520
§ 7.2.2	例题选讲	521

§ 7.2.3	测试练习	526
§ 7.3	补充提高	527
§ 7.3.1	补充习题	527
§ 7.3.2	排疑解惑	527
§ 7.3.3	应用实例	531
§ 7.3.4	历史与人物	539
§ 7.4	习题与习题解答	541
§ 7.4.1	测试练习解答	541
§ 7.4.2	补充习题解答	544
§ 7.4.3	习题 7 及其解答	549
第八章	边值问题	561
§ 8.1	内容提要	561
§ 8.1.1	边值问题的存在唯一性	561
§ 8.1.2	待定常数法	562
§ 8.1.3	特征值和特征函数	563
§ 8.2	学习辅导	564
§ 8.2.1	解题指导	564
§ 8.2.2	例题选讲	565
§ 8.2.3	测试练习	568
§ 8.3	补充提高	568
§ 8.3.1	补充习题	568
§ 8.3.2	排疑解惑	570
§ 8.3.3	应用实例	573
§ 8.3.4	历史与人物	577
§ 8.4	习题与习题解答	579
§ 8.4.1	测试练习解答	579
§ 8.4.2	补充习题解答	582
第九章	期中、期末及硕士研究生入学试题	590
§ 9.1	期中、期末试题套题(1)	590

§ 9.1.1	期中试题套题(1)	590
§ 9.1.2	期末试题套题(1)	591
§ 9.1.3	期中试题套题(1)解答	593
§ 9.1.4	期末试题套题(1)解答	596
§ 9.2	期中、期末试题套题(2)	601
§ 9.2.1	期中试题套题(2)	601
§ 9.2.2	期末试题套题(2)	603
§ 9.2.3	期中试题套题(2)解答	605
§ 9.2.4	期末试题套题(2)解答	609
§ 9.3	考研试题套题(1)	611
§ 9.3.1	考研试题套题(1)	611
§ 9.3.2	考研试题套题(1)解答	612
§ 9.4	考研试题套题(2)	615
§ 9.4.1	考研试题套题(2)	615
§ 9.4.2	考研试题套题(2)解答	616
§ 9.5	考研试题半套题(1)	621
§ 9.5.1	考研试题半套题(1)	621
§ 9.5.2	考研试题半套题(1)解答	622
§ 9.6	考研试题半套题(2)	624
§ 9.6.1	考研试题半套题(2)	624
§ 9.6.2	考研试题半套题(2)解答	625
§ 9.7	考研试题半套题(3)	625
§ 9.7.1	考研试题半套题(3)	625
§ 9.7.2	考研试题半套题(3)解答	626
§ 9.8	考研试题散题	628
§ 9.8.1	考研试题散题	628
§ 9.8.2	考研试题散题解答	629
第十章	数学软件在常微分方程中的应用	633
§ 10.1	常微分方程的计算机辅助分析	633

102	§ 10.1.1	计算机数学软件	633
102	§ 10.1.2	常微分方程计算机辅助分析	634
102	§ 10.1.3	常微分方程计算机辅助分析的具体处理	639
102	§ 10.2	Mathematica 程序选	641
100	§ 10.2.1	辅助计算	641
101	§ 10.2.2	辅助判断	643
100	§ 10.2.3	绘图	647
203	§ 10.2.4	微分方程直接求解	649
003	§ 10.3	MATLAB 程序选	653
110	§ 10.3.1	辅助计算	653
110	§ 10.3.2	绘图	657
110	§ 10.4	Maple 程序选	664
210	§ 10.4.1	辅助计算	664
210	§ 10.4.2	辅助判断	666
010	§ 10.4.3	绘图	669
150	* § 10.4.4	微分方程直接求解	671
150	§ 10.5	SCILAB 程序选	676
150	§ 10.5.1	辅助计算	676
150	§ 10.5.2	绘图	681
150	§ 10.5.3	SCILAB Demos(演示)	687
附录 I	科学计算自由软件 SCILAB		689
150	§ 1	SCILAB 使用	689
150	§ 2	绘制轨线图貌的改进	698
附录 II	解题和建模常用的部分公式		704
150	§ 1	函数	704
150	§ 2	导数、微分	707
150	§ 3	不定积分	709
索引			715
参考文献			725